١ المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل The Fundamental Theorem of Calclus

تعريف:
نقول أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على الفترة I إذا كان :

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I$$

١.١ المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

هذه المبرهنة تربط بين الاشتقاق (التفاضل) والتكامل بحيث تستخدم لتسهيل إيجاد التكاملات
النظرية (المبرهنة):

(١) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت F معرفة على نفس الفترة $[a, b]$ بالشكل التالي:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

حيث $x \in [a, b]$ فإن الدالة F قابلة للاشتقاق عند x ومشتقتها هي الدالة f أي أن $F'(x) = f(x)$.
(٢)إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت G دالة أصلية للدالة f فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

مثال:
أوجد التكامل

$$\int x dx$$

الحل:
بأستخدام الجزء الثاني من النظرية فإننا نبحث عن الدالة الاصلية التي اذا اشتققناها نحصل على x، نجد أن الدالة $\frac{x^2}{2}$ اذا اشتققناها نحصل على x.
أي لإيجاد التكامل لدالة ما نحاول أن نجيب عن السؤال التالي:
ماهي الدالة التي مشتقتها تساوي الدالة التي بداخل التكامل اي التي نريد ان نكاملها؟

مثال:
أوجد التكامل

$$\int_1^2 \frac{3}{2\sqrt{x}}\, dx$$

الحل:
نبحث عن الدالة التي مشتقتها هي الدالة $\frac{3}{2\sqrt{x}}$ فلو اخذنا الاشتقاق للدالة $3\sqrt{x}$
نجد ان حاصل الاشتقاق يساوي $\frac{3}{2\sqrt{x}}$
وهي نفس الدالة المراد ايجاد التكامل لها

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{3}{2\sqrt{x}}\, dx = 3\sqrt{x}\Big]_1^2 =$$

مبرهنة:
إذا كانت g قابلة للاشتقاق على الفترة I ومدها محتوى في الفترة $[a,b]$ وان f متصلة فإن:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f\left(g\left(x\right)\right)g'(x), \forall x \in [a,b]}$$

نتائج على المبرهنة السابقة:

- $$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{a} f(t)\,dt = -f\left(g\left(x\right)\right)g'(x), \forall x \in [a,b]}$$
- اذاكانت كل من f و g كما في المبرهنة وكانت h تحقق شروط g

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = f\left(h\left(x\right)\right)h'(x) - f\left(g\left(x\right)\right)g'(x), \forall x \in [a,b]}$$

ملاحظة: للتذكير فقط ببعض قوانين الاشتقاق: اذا كانت f و $g \neq 0$ قابلتين للاشتقاق

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

$$\boxed{\left(fg\right)' = fg' + f'g}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

مثال:

احسب المشتقات للدوال التالية:(أي أوجد $F'(x)$) او $\frac{d}{dx}$

$$(1) \qquad F_1(x) = \int_1^{3x^2} \frac{u^3}{\sqrt{2+u^2}}\, du$$

الحل: نلاحظ ان $g' = 6x \leftarrow g(x) = 3x^2$

$$\Rightarrow F_1'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^{3x^2} \frac{u^3}{\sqrt{2+u^2}}\, du = \frac{(3x^2)^3}{\sqrt{2+(3x^2)^2}}(6x)$$

$$(2) \qquad F_2(x) = \int_{\sqrt{x+1}}^{2} \frac{|\cos(2+t^3)|}{t}\, dt$$

الحل: نلاحظ ان $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leftarrow g(x) = \sqrt{x+1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_2'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x+1}}^{1} \frac{|\cos(1+t^3)|}{t}\, dt \\ &= -\frac{|\cos(1+(\sqrt{x+1})^3)|}{\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \end{aligned}$$

$$(3) \qquad F_3(x) = \int_{\sin(x)}^{2x} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

الحل: نلاحظ ان $g'(x) = \cos(x) \leftarrow g(x) = \sin(x)$

و

$h'(x) = 2 \leftarrow h(x) = 2x$

$$\Rightarrow F_3'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\sin(x)}^{2x} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

$$(4) \qquad F_4(x) = \int_{\cos(x)}^{\sin(2x)} \sqrt{1-t^2}\, dt$$