١ التكامل المحدود Definite Integral

لاحظنا في المحاضرة السابقة انه عندما يكون عدد الفترات الجزئية n المقسمة للفترة $[a,b]$ للدالة $f(x)$ تؤول الى ∞ فإن مقياس التجزئ المنتظم $||P||$ يقترب من الصفر.

تعريف:
الدالة f تكون قابلة للتكامل على $[a,b]$ وتكاملها يساوي المساحة A اذا كان

$$\lim_{||P||\to 0} S(f,P,w) = A$$

حيث
$S(f,P,w) = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i$، مهما كان الاختيار ل w.
على وجه التحديد اذا كان :
لكل $0 < \varepsilon$ يوجد $0 < \delta$ وكان P تجزئيا يحقق $\delta > ||P||$ فلكل w على P يكون $|S(f,P,w) - A| < \delta$

تعريف:
إذا كانت الدالة f معرفة على الفترة $[a,b]$ ، فإننا نعرف التكامل المحدد للدالة f على الفترة $[a,b]$ والذي يرمز له بالرمز

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

كما يلي

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f,P,w) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i}$$

ملاحظة: في هذه الحالة نوجد التكامل عن طريق استخدام مجموع ريمان.

ملاحظة: $||P|| \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$

$$\boxed{\int_a^b mx\,dx = \lim_{n\to\infty} m(b-a)\Big[a+\frac{(a-b)(n+1)}{2n}\Big] = \frac{m(b^2-a^2)}{2}}$$

مثال :
أستخدم مجموع ريمان لحساب التكامل للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 1]$
الحل: لدينا

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i}$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \frac{b-a}{n} \Rightarrow \Delta x_i = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \qquad , \\ x_i &= a + \frac{i(b-a)}{n} \Rightarrow x_i = \frac{i}{n} \\ f(x_i) &= f\left(\frac{i}{n}\right) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{i^2}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2}{n^2}\right) \frac{1}{n} \\ &= \end{aligned}$$

تمرين : أستخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل التالي

$$\int_0^3 (2x-1)\,dx$$

ملاحظات:
(١)إذا كانت f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فسوف نستخدم التعبير

$$\int_a^b f$$

او التعبير

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

للتعبير عن قيمة التكامل.
الرمز dx هو الرمز التفاضلي ومن خلاله يمكن الاستدلال على متغير الدالة التي يجب ايجاد التكامل له.

(٢) اذا كان $a=b$ فان تكامل الدالة على الشكل التالي:

$$\int_a^a f = 0$$

(٣)اذا كان $a>b$ فان تكامل الدالة على الشكل التالي:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

نظرية:
اذا كانت $f(x)$ دالة غير سالبة وقابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فإن مساحة المنطقة A تحت منحنى $f(x)$ يعطي من خلال:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

قابلية الدالة للتكامل تعني:
(١) الدالة $f(x)$ (متناقصة او متزايدة)
$f(x)$ **متزايدة اي لكل** $x_1 \leq x_2$ **فإن** $f(x_1) \leq f(x_2)$
$f(x)$ **متناقصة لكل** $x_1 \leq x_2$ **فإن** $f(x_1) \geq f(x_2)$
حيث $x_1, x_2 \in [a,b]$

(٢) النوع الثاني من الدوال القابلة للتكامل هي تلك الدوال المتصلة على الفترة $[a,b]$ [١]

نتائج:
لتكن $f(x) = x^n$ **و** $n \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\int_0^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^b = \frac{b^{n+1}}{n+1}}$$

$$\boxed{\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{1}{1+n}\left[b^{n+1} - a^{n+1}\right]}$$

مثال :
أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى للدالة $f(x) = 2 + x - x^2$ على الفترة $[0,1]$
الحل:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_0^1 (2 + x - x^2)dx \\ &= \left[\frac{2x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

---

[١] **تكون الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$**
- إذا كانت $f(x)$ متصلة عند كل نقاط الفترة (a,b) بما فيها نقطتي طرفي الفترة
- إذا كانت $f(x)$ متصلة على يسار النقطة b
-إذا كانت $f(x)$ متصلة على يمين النقطة a

تمرين: أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى للدالة $f(x) = 4 - x^2$ **على الفترة** $[-2, 2]$

١.١ خواص التكامل المحدود Properties of the Definite Integral

- خاصية خطية التكامل

  - إذا كان كل من f, g دالتين قابلتين للتكامل على الفترة $[a, b]$ فإن $f + g$ قابلة للتكامل بحيث

$$\int_a^b f \pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g$$

  - إذا كانت f دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ وكان $k \in \mathbb{R}$ فإن kf قابلة للتكامل بحيث

$$\int_a^b kf = k \int_a^b f$$

- خاصية جمع الفترات

  - إذا كان كل من f دالة قابلة للتكامل على الفترتين $[a, c]$ ، $[c, b]$ فإن

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

- خاصية الأطراد (التزايد)

  - إذا كان كل من f, g دالتين قابلتين للتكامل على الفترة $[a, b]$ بحيث $f(x) \geq g(x)$ لكل $x \in [a, b]$ فإن

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

  - إذا كانت f دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ وكانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$ فإن

$$\int_a^b f \geq 0$$

...

ملاحظة:

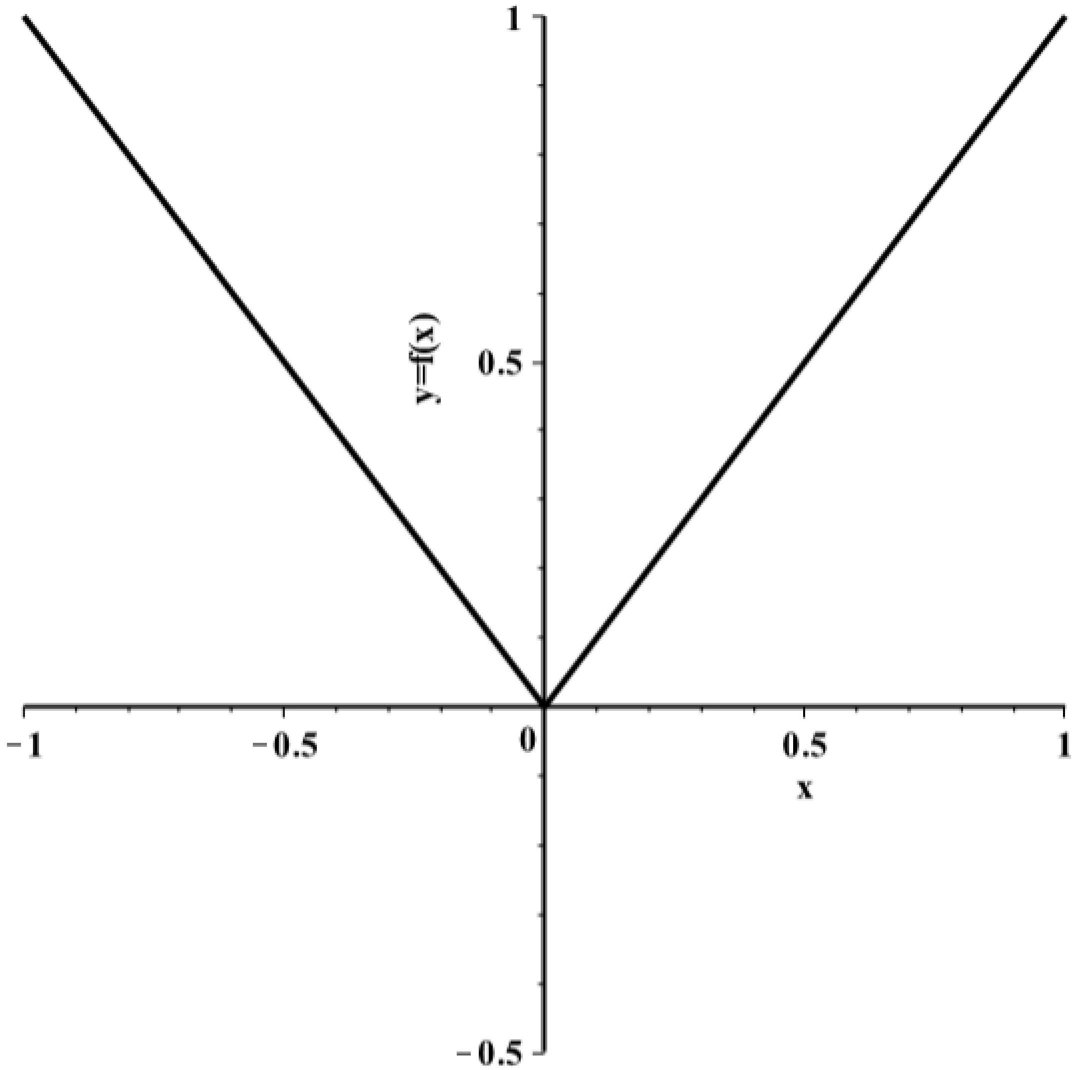
- نستخدم خواص التكامل بفاعلية لايجاد التكاملات وذلك لتسهيل الحسابات و لسهولة التعامل معها.
-

$$\int_a^b f.g \neq \int_a^b f. \int_a^b g$$

مثال :أوجد قيمة التكامل

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx$$

الحل: نلاحظ اننا نريد ايجاد التكامل للقيمة المطلقة للدالة $f(x)$ لو قمنا برسم الدالة



$$|x| = \begin{cases} x & ,1 \geq x > 0 \\ -x & ,0 > x \geq -1 \end{cases}$$

مثال : أوجد قيمة التكامل

$$\int_{-1}^{4}(2+|x-3|)\,dx$$

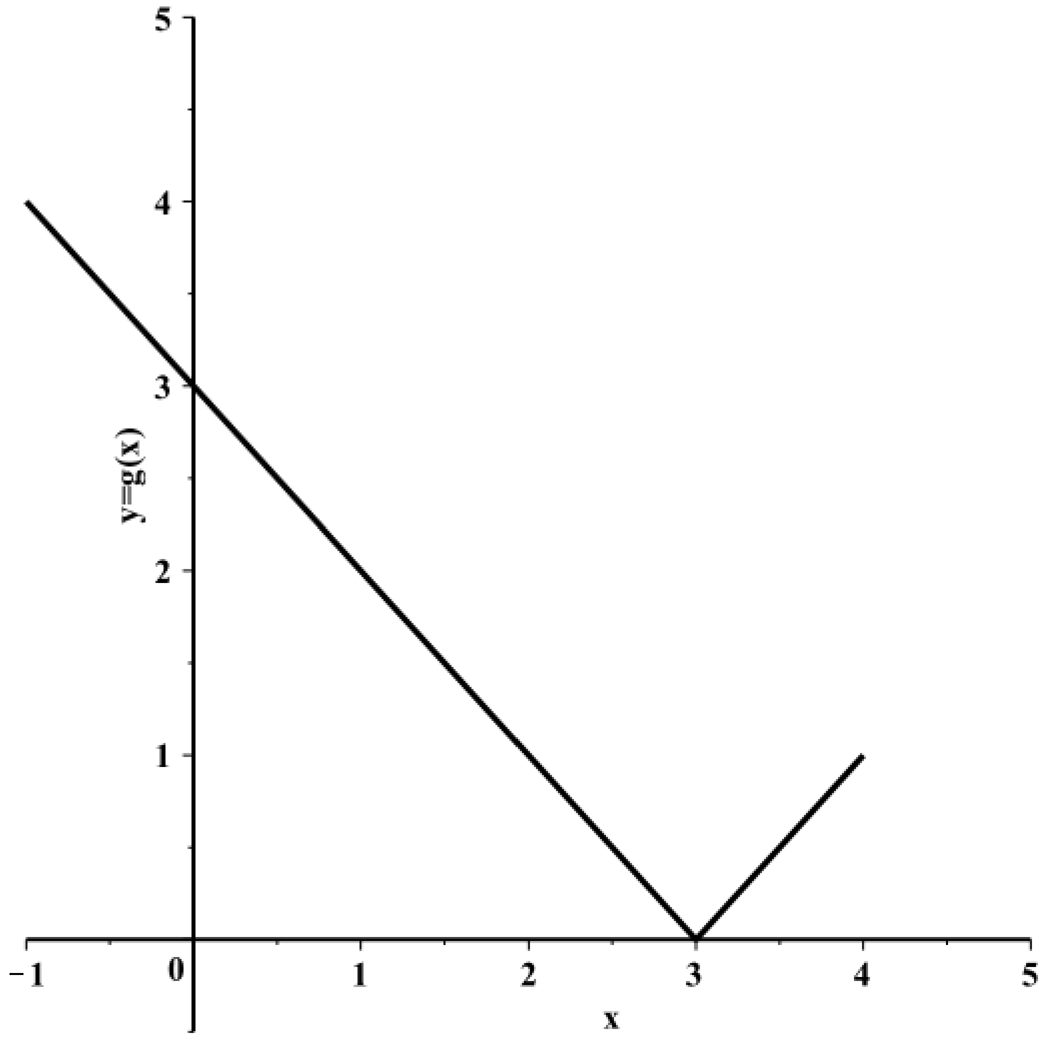
الحل: باستخدام خواص التكامل المحدود يمكننا ايجاد التكامل كمايلي

$$\int_{-1}^{4}(2+|x-3|)\,dx=\int_{-1}^{4}2\,dx+\int_{-1}^{4}|x-3|\,dx$$

حيث $f(x)=2$، $g(x)=|x-3|$ من السهل جدا ايجاد التكامل ل $f(x)$ كمايلي:

$$\int_{-1}^{4}f(x)dx \quad = \quad \int_{-1}^{4}2\,dx=\Big[2x\Big]_{-1}^{4}=\Big[2(4)-2(-1)\Big]=10$$

الان لو نلاحظ اننا نريد ايجاد التكامل للقيمة المطلقة للدالة $|x-3|$ لو قمنا برسم هذه الدالة



$$g(x)=|x-3|=\begin{cases} x-3 & ,x\geq 3 \\ 3-x & ,x<3 \end{cases}$$

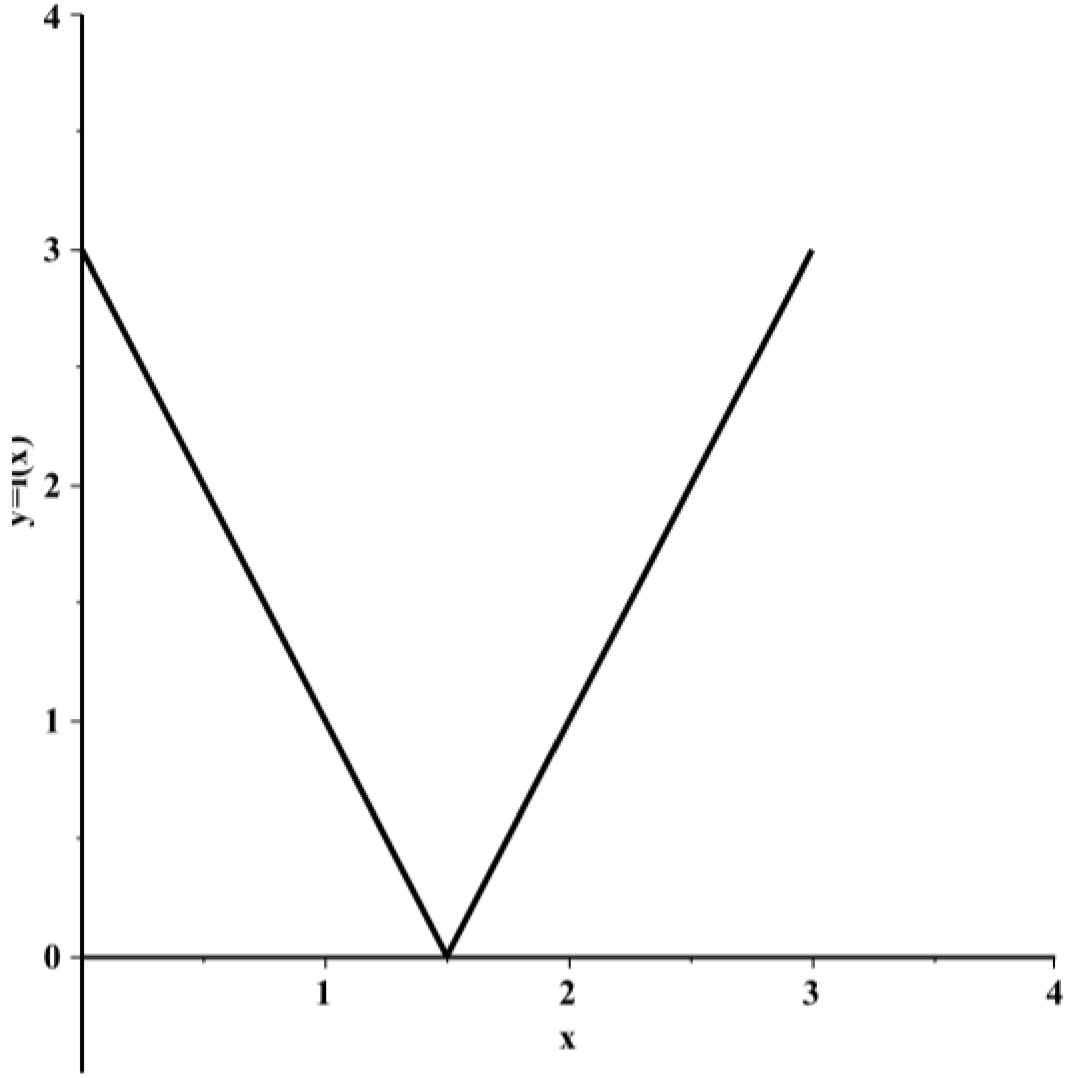
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{-1}^{4} |x-3|\,dx &= \int_{-1}^{3} 3-x\,dx+\int_{3}^{4} x-3\,dx \\
&= \left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3}+\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_{3}^{4} \\
&= \left[3(3)-\frac{3^2}{2}\right]-\left[3(-1)-\frac{(-1)^2}{2}\right] \\
&+ \left[\frac{4^2}{2}-3(4)\right]-\left[\frac{3^2}{2}-3(3)\right] \\
&= 8+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{4} 2+|x-3|\,dx = \int_{-1}^{4} f(x)\,dx+\int_{-1}^{4} g(x)\,dx=10+\frac{17}{2}=\frac{37}{2}$$

تمرين: اوجد قيمة التكامل

$$\int_0^3 |2x-3|\,dx$$

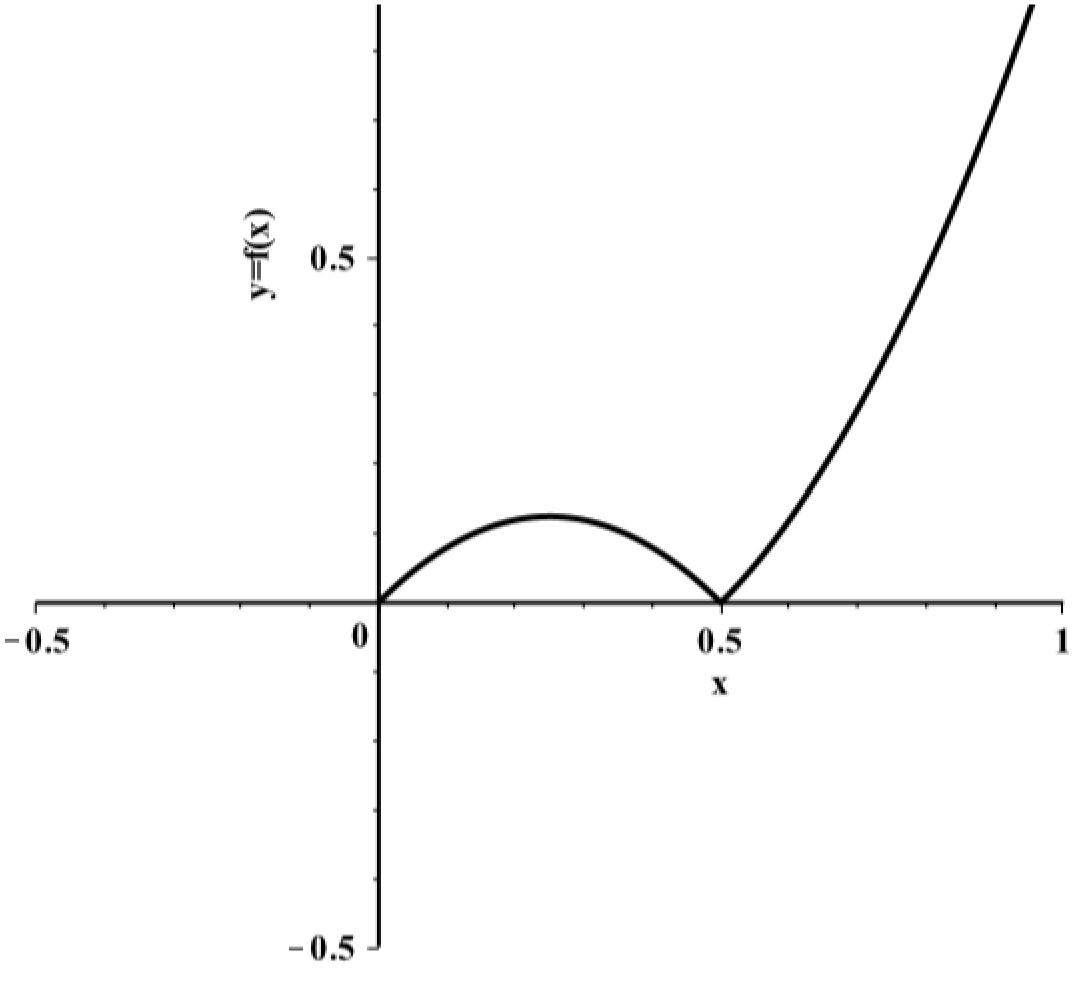
للمساعدة الرسمة و الناتج النهائي للتكامل يساوي $\frac{9}{2}$



مثال : أوجد قيمة التكامل

$$\int_0^1 |x(2x-1)|\, dx$$

الحل: نرسم الدالة



نلاحظ أن النقطتين $x = \frac{1}{2}$ و $x = 0$ تجعل المقدار $x(2x-1)$ صفرا.

$$|x(2x-1)| = \begin{cases} x(2x-1) & ,1 \geq x > 0.5 \\ -(x(2x-1)) & ,0.5 > x > 0 \end{cases}$$

لايجاد قيمة التكامل نوجد مساحة المناطق تحت المنحنيات و فوق محور x

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^1 |x(2x-1)|\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} -\Big(x(2x-1)\Big)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x(2x-1)\,dx \\
&= -\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(x(2x-1)\Big)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x(2x-1)\,dx \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

٢.١ مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل
Mean Value Theroem for Integrals

إذا كانت f متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنه يوجد على الأقل عدد $c \in (a, b)$ بحيث:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)}$$

البرهان:
راجع الكتاب

مثال:
تحقق من مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = x^2 + 3x + 2$ على الفترة $[1, 4]$ وذلك بإيجاد كل قيم $c \in (a, b)$

الحل:
الدالة $f(x)$ كثيرة حدود وهي متصلة على الفترة $[1, 4]$ اذن شروط المبرهنة محققة. نبحث الان عن $c \in [1, 4]$ وذلك اولا بايجاد قيمة التكامل التالي

$$\int_1^4 (x^2 + 3x + 2)\,dx = \frac{99}{2}$$

وبتطبيق المبرهنة نجد أن

$$\begin{aligned}
\frac{99}{2} &= (c^2 + 3c + 2)(4-1) \\
\frac{99}{2} &= 3(c^2 + 3c + 2) \\
\frac{99}{2} &= 3c^2 + 9c + 6 \\
0 &= 3c^2 + 9c - \frac{87}{2}
\end{aligned}$$

وبحل هذه المعادلة والتي هي من الدرجة الثانية بإستخدام القانون المميز

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

حيث a هو معامل x^2 و b معامل x و c هو الحد المطلق

نجد حلين لهذة المعادلة $c_1 = 2.6$ و $c_2 = -5.6$
وبما ان $c = 2.6 \Leftarrow c_2 \notin (1,4)$ لانها تحقق المبرهنة.

تمرين: حقق من مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = 1+x^2$ على الفترة $[-1, 2]$ وذلك بإيجاد كل قيم $c \in (a, b)$.