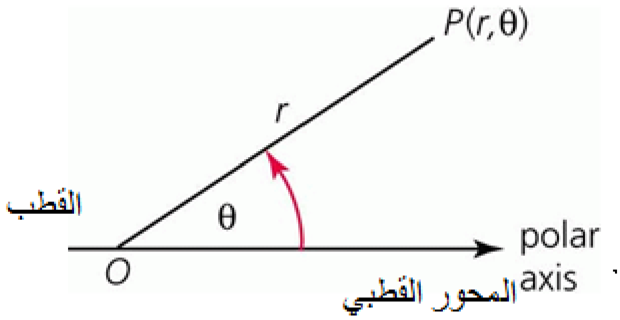
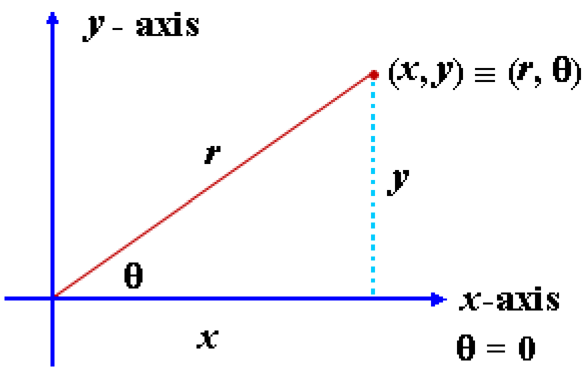
١ الإحداثيات القطبية Polar Coordinates :

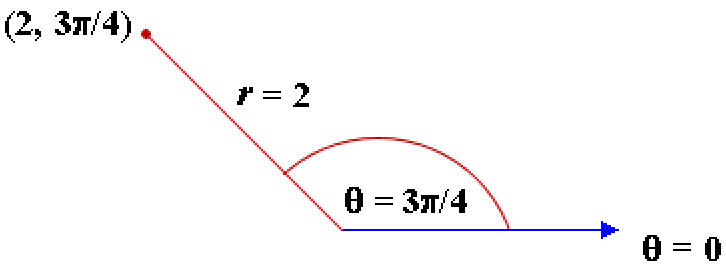
١.١ الإحداثيات القطبية
Polar Coordinates and Polar Curves :

زوج القيم (r, θ) يصف مكان نقطة في نظام الإحداثيات القطبي، التي كنا نستخدم الاحداثيات الديكارتية (x, y) لوصف او تحديد هذه النقطة في المستوى.
حيث r هي المسافة من نقطة الأصل O، و
θ هي مقياس الزاوية بين محور القطبي وراي تمتد من أصل من خلال نقطة معينة

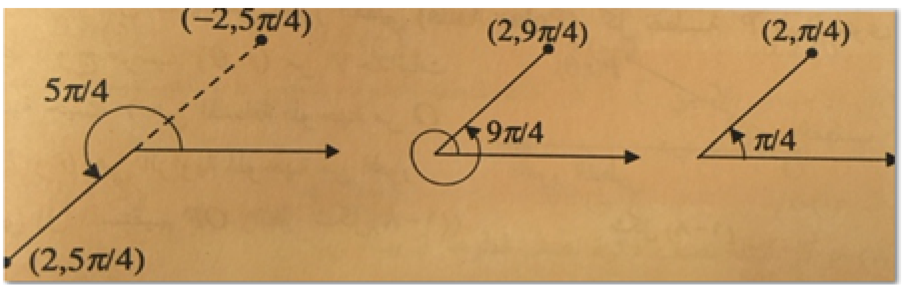




مثال: النقطة التي احداثيتها القطبية $(2, \frac{3\pi}{4})$ تكون على الشكل



ملاحظة: النقطة في الاحداثيات الديكارتية لها تمثيل وحيد هو (x, y)، لكن في الاحداثيات القطبية يكون للنقطة نفسها اكثر من وصف او تمثيل انظر الشكل التالي

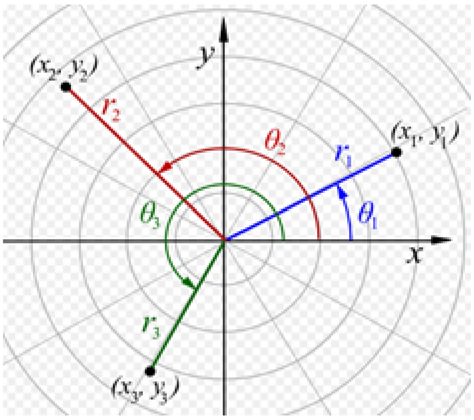


وبشكل عام يكون لدينا

$$(r, \theta + 2n\pi) = (r, \theta) = (-r, \theta + (2n+1)\pi)$$

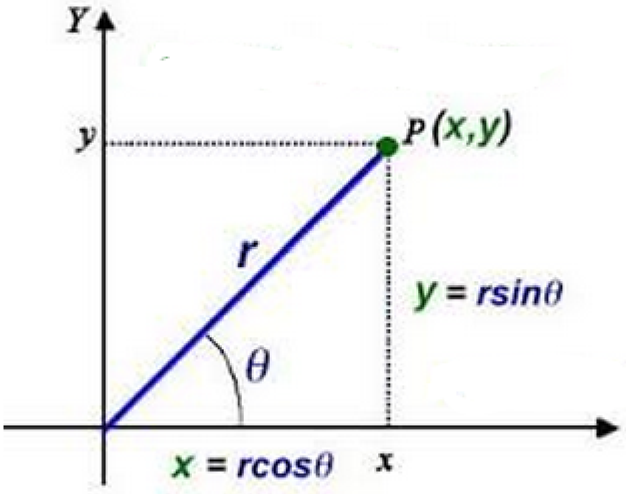
٢.١ العلاقة بين الإحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية
:Relationship between Polar and Rectangular Coordinates

اذا كان (x, y) نظام الاحداثيات الديكارتي،
وكان (r, θ) نظام الاحداثيات القطبي



وللانتقال بين الاحداثيات القطبية و الديكارتية

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta, & y &= r\sin\theta \\
r^2 &= x^2 + y^2, & \tan\theta &= \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$



مثال: حول المعادلات الديكارتية التالية الي معادلات قطبية.

$$(1)\ \ x^2 + y^2 = 1$$

$$(2)\ \ xy = 1$$

مثال: حول المعادلات القطبية التالية الي معادلات ديكارتية.

$$(1)\quad 2r + r\cos\theta = 6$$

$$(2) r\sin\theta = 2$$

٣.١ رسم المنحنيات القطبية Graphs in Polar Coordinates:

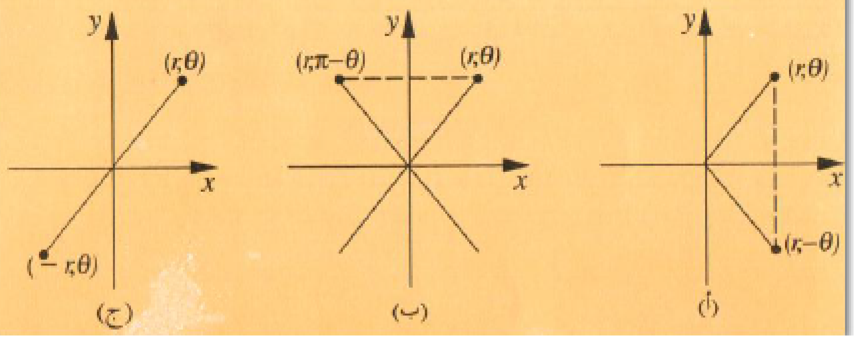
لرسم المنحنيات في الاحداثيات القطبية يجب أن نعرف المحور القطبي أو المحور المعامد للمحور القطبي $\theta = \pi/2$

مبرهنة: (اختبار التماثل)
يكون بيان المعادلة القطبية $r = f(\theta)$ متماثلا حول:

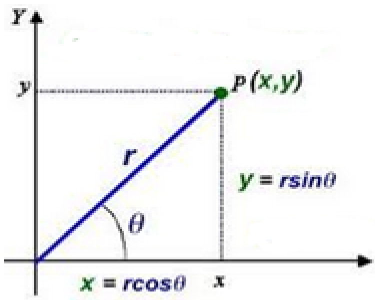
(١) المحور القطبي (محور x) إذا كانت المعادلة لا تتغير بتبديل (r,θ) بالزوج $(r,-\theta)$ أو تبديل (r,θ) بالزوج $(-r,\pi-\theta)$.

(٢) المستقيم $\theta = \pi/2$ (محور y) إذا كانت المعادلة لا تتغير بتبديل (r,θ) بالزوج $(r,\pi-\theta)$ أو تبديل (r,θ) بالزوج $(-r,-\theta)$.

(٣) حول القطب O (نقطة الأصل) إذا كانت المعادلة لا تتغير بتبديل (r,θ) بالزوج $(-r,\theta)$ أو تبديل (r,θ) بالزوج $(r,\theta+\pi)$.



١.٣.١ المستقيمات في الاحداثيات القطبية Lines in Polar Coordinates:



معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و ينحرف عن المحور القطبي بزاوية θ_0 هي:

$$\theta = \theta_0$$

بوضع $y = r\sin\theta$ يأخذ المستقيم الأفقي $y = k$ قطبياً الشكل

$$r = k\csc\theta$$

و بوضع $x = r\cos\theta$ نرى أن معادلة المستقيم الرأسي $x = k$ القطبية هي

$$r = k\sec\theta$$

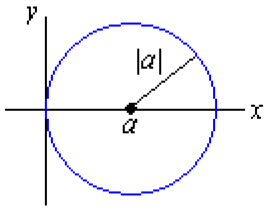
وتكون معادلة المستقيم العام $ax + by = c$ القطبية هي

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

٢.٣.١ الدوائر في الاحداثيات القطبية Circles in Polar Coordinates:

معادلة الدائرة التي مركزها $(a, 0)$ والمارة بنقطة الاصل في الاحداثيات القطبية تعطى بالمعادلة

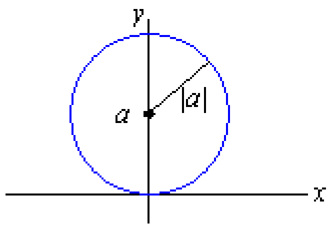
$$r = 2a\cos\theta$$



r=acos(θ)

معادلة الدائرة التي مركزها $(0, a)$ و المارة بنقطة الاصل في الاحداثيات القطبية تعطى بالمعادلة

$$r = 2a\sin\theta$$

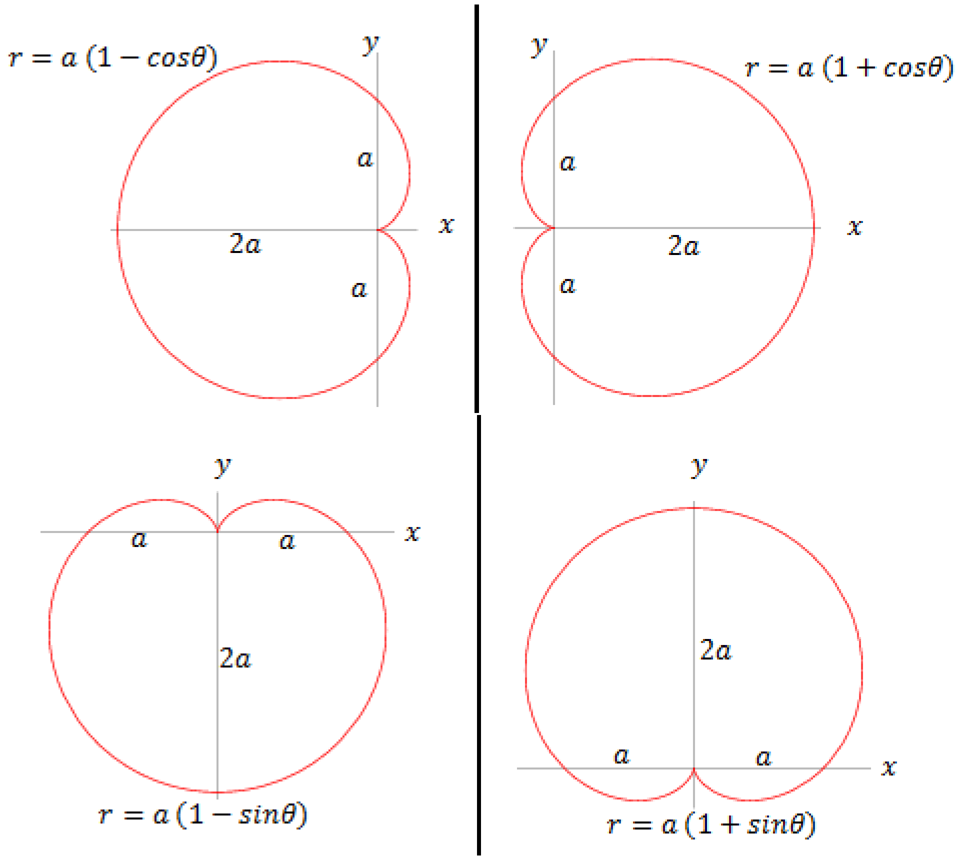


r=asin(θ)

٣.٢.١ المنحنيات القلبية Cardioids:

معادلات المنحنيات القلبية (تأخذ شكل القلب) تعطى بالبيانات القطبية التالية

$$r = a(1 \pm \cos\theta), \qquad r = a(1 \pm \sin\theta) \quad \forall \;\; a \in \mathbb{R}$$

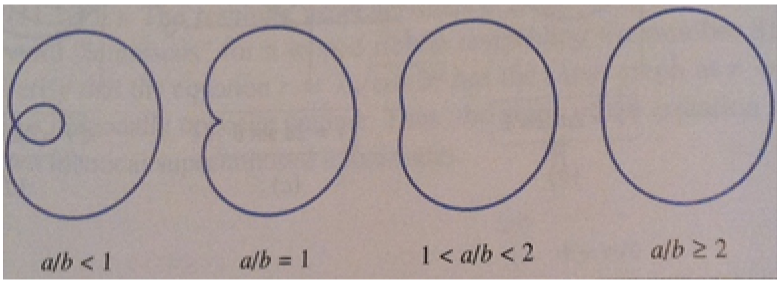


٤.٣.١ المنحنيات الصدفية الدائرية Limacons:

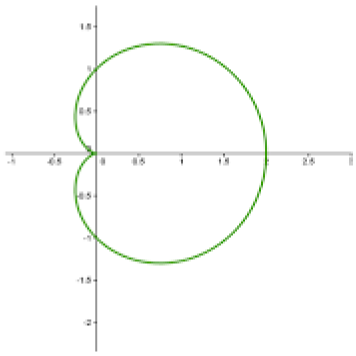
معادلات المنحنيات الصدفية تعطى بالبيانات التالية

$$r = a \pm b\cos\theta, \qquad r = a \pm b\sin\theta, \quad a > 0,\ b > 0$$

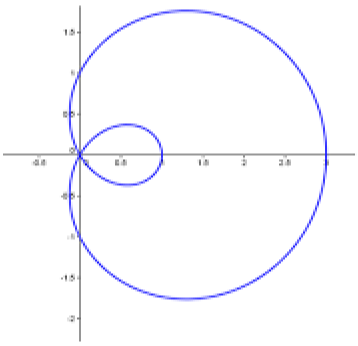
وشكل المنحنى يعتمد على النسبة $\frac{a}{b}$ كما هو موضح بالشكل التالي



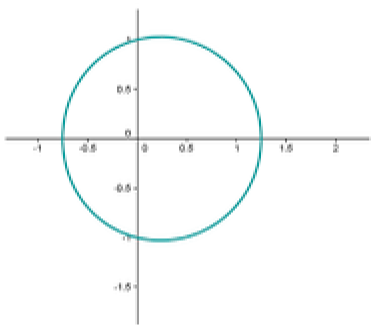
الشكل التالي يوضح الاختلاف في شكل المعادلة $r = a \pm b\cos\theta$ باختلاف قيم a, b



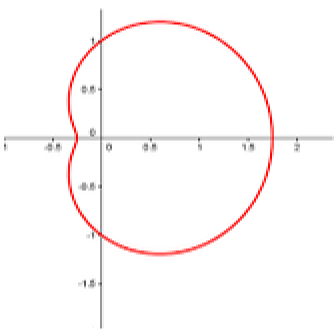
$r = 1 + \cos\theta$



$r = 1 + 2\cos\theta$



$r = 1 + 0.25\cos\theta$

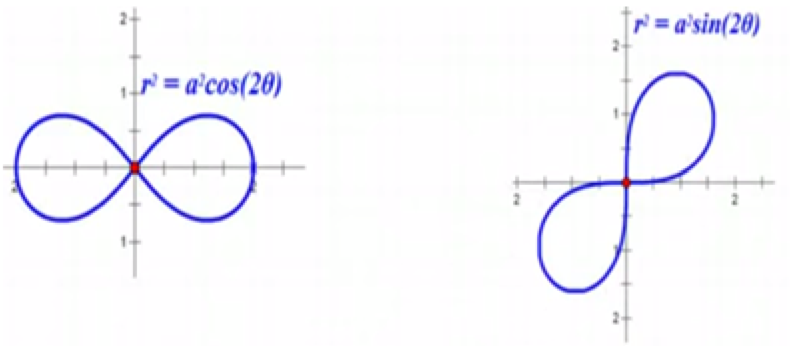


$r = 1 + 0.75\cos\theta$

٥.٣.١ ذوات العروتين Lemniscates:

معادلات المنحنيات ذي العروتين تعطى بالبيانات التالية

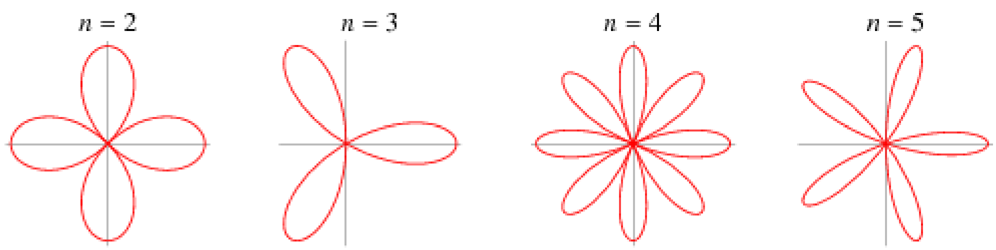
$$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta, \qquad r^2 = a^2 \sin 2\theta, \quad a > 0$$



٦.٣.١ المنحنيات الوردية Roses:

معادلات المنحنيات التالية تكون على شكل وردة

$$r = a\cos n\theta, \qquad r = a\sin n\theta, \quad a > 0, \ n \in \mathbb{N}$$

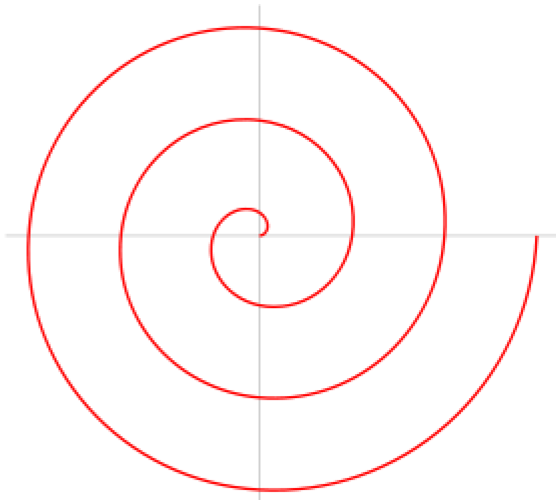


ملاحظة:
اذا كان n عدد فردي فإن عدد الوريقات يساوي n
وإذا كان n عدد زوجي فعدد الوريقات يساوي $2n$،
(كما راينا في الشكل السابق).

٧.٣.١ حلزون ارخميدس Spiral of Archimedes:

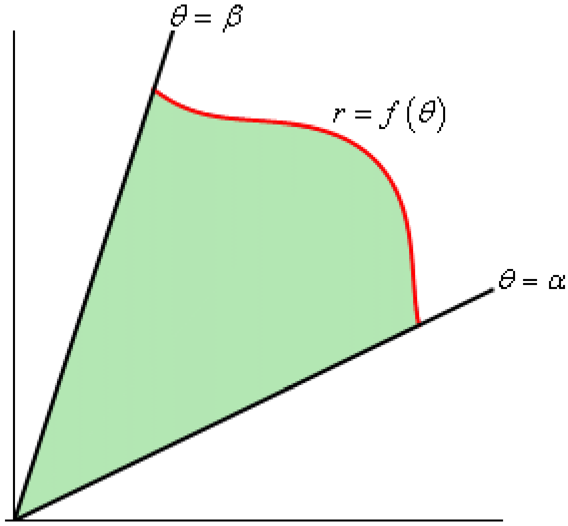
منحنى حلزون ارخميدس هو المنحنى الذي يدور حول نقطة الاصل عددا غير منتهى من المرات بحيث ان r يتزايد (يتناقص) عندما تتزايد θ. ومعادلته تعطى من خلال

$$r = a\theta, \quad \theta \leq 0, \qquad or \qquad r = a\theta, \quad \theta \geq 0, \quad a > 0.$$



٤.١ المساحات في الاحداثيات القطبية Areas in Polar Coordinates:

إذا كانت الدالة $r = f(\theta)$ متصلة و موجبة على الفترة $[\alpha, \beta]$، والتي لايزيد طولها عن 2π. واذا كانت R هي المنطقة القطبية المحدودة بالمنحنى $r = f(\theta)$ والمستقيمين $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$،



فإن مساحة المنطقة R تعطى من

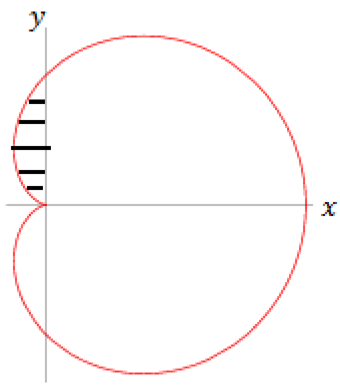
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \ \ d\theta$$

ويمكن الحصول على المساحة بين الدالتين المتصلتين $f(\theta)$ و $g(\theta)$ من

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2] \ \ d\theta$$

مثال:

احسب مساحة R في الربع الثاني داخل المنحنى القلبي $r = 1 + \cos\theta$

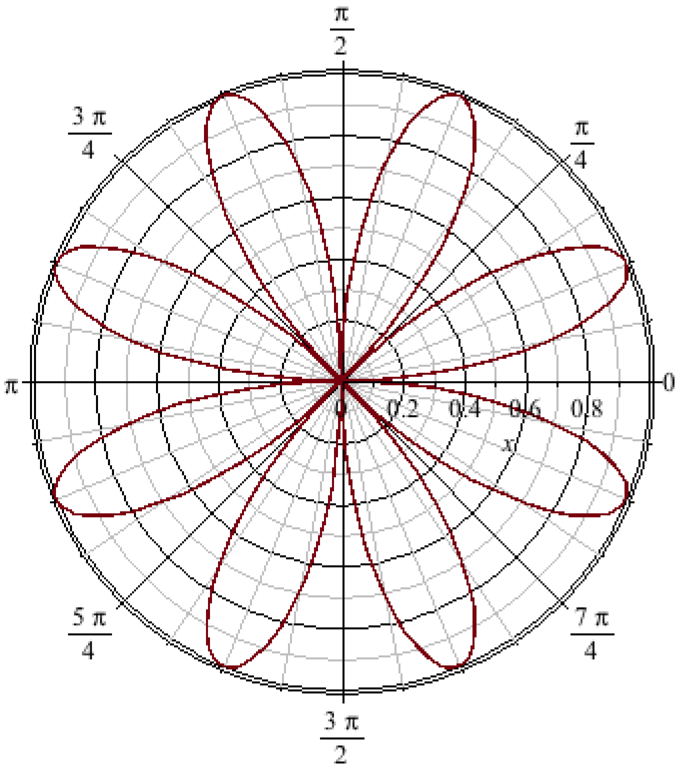


الحل: بما أن مساحة المنطقة المطلوبة في الربع الثاني فيكون ايجادها كمايلي

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} (1+\cos\theta)^2 \;\; d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta) \;\; d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\pi/2}^{\pi} 1 \;\; d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} 2\cos\theta \;\; d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \;\; d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[[\theta]_{\pi/2}^{\pi} - 2[\sin\theta]_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \;\; d\theta\right] \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \frac{3\pi}{8} - 1
\end{aligned}
$$

مثال:

احسب مساحة وريقة من منحنى الوردة $r = \sin 4\theta$.



الحل: نريد ايجاد حدود التكامل وذلك بوضع $r = 0$ **وبالتالي فإن** $\sin 4\theta = 0$ sin
اي انه نريد ايجاد قيم الزاوية التي تجعل $\sin = 0$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\sin 4\theta)^2 \;\; d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(1 - \sin 8\theta) \;\; d\theta \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \frac{\pi}{16}
\end{aligned}$$

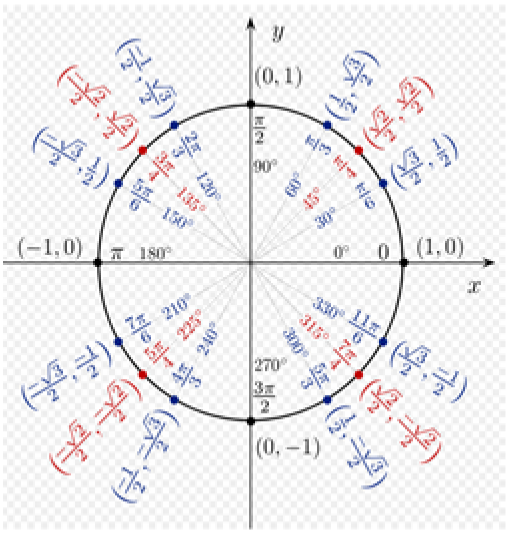
مثال:

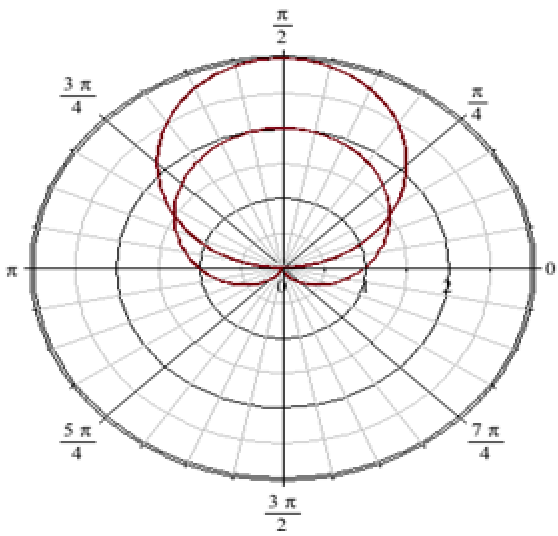
احسب مساحة المنطقة داخل الدائرة $r = 3\sin\theta$ و خارج المنحنى القلبي $r = 1 + \sin\theta$.

الحل: نريد ايجاد حدود التكامل وذلك بمساواة المعادلتيين وبالتالي فإننا يجب أن نحل المعادلة التالية

$$
\begin{aligned}
3\sin\theta &= 1 + \sin\theta \\
2\sin\theta &= 1 \\
\sin\theta &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

اي نريد ايجاد قيم θ التي تجعل $\sin = 1/2$





$$\Rightarrow \theta = \pi/6, \quad \theta = 5\pi/6$$

وبالتالي فإن مساحة المنطقة المطلوبة يمكن إيجادها من

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[(f(\theta))^2-(g(\theta))^2]\ \ d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\Big[(3\sin\theta)^2-(1+\sin\theta)^2\Big]\ \ d\theta \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \pi
\end{aligned}
$$