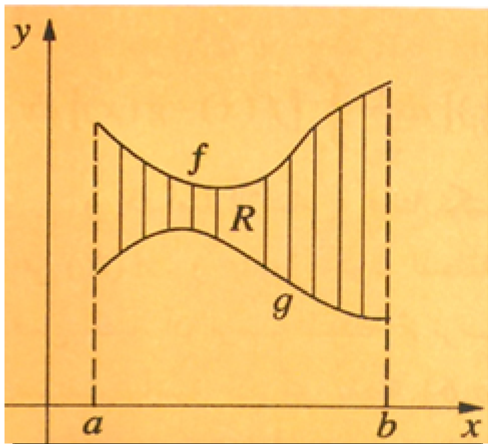
١ تطبيقات التكامل
Applications of The Integral :

١.١ المساحات Areas :

يمكننا إيجاد المساحة المحصورة بين داليتين باستخدام إما dx أو باستخدام dy وذلك يعتمد على اخذ الشريحة المعتمدة

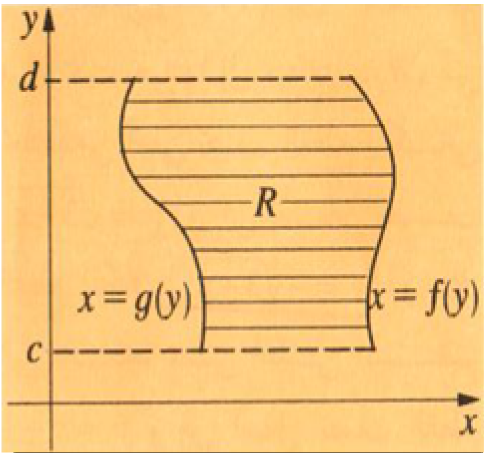
⋆ فإذا كانت الشريحة تتحرك على محور x تعتمد على dx
⋆ أما اذا كانت الشريحة تتحرك على محور y تعتمد على dy

ملاحظة:
أذا كانت الشريحة تتحرك على محور x فإن الدالة الأكبر هي الدالة الأعلى.
وإذا كانت الشريحة تتحرك على محور y فإن الدالة اليمنى هي الأكبر.



الشريحة تتحرك على محور

x



الشريحة تتحرك على محور

y

(١) اذا كان لدينا $f(x) \geq g(x)$ دالتين متصلتين على $[a, b]$ و كانت $g(x) \geq 0$ فإن المساحة R المحصورة بين الدالتين $f(x), g(x)$ على الفترة $[a, b]$ وكانت الشريحة تتحرك على محور x :

$$A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

(٢) اذا كان لدينا $f(y) \geq g(y)$ دالتين متصلتين على الفترة $[c, d]$ وإن المساحة R المحصورة بين الدالتين $f(y), g(y)$ على الفترة $[c, d]$ وكانت الشريحة تتحرك على محور y :

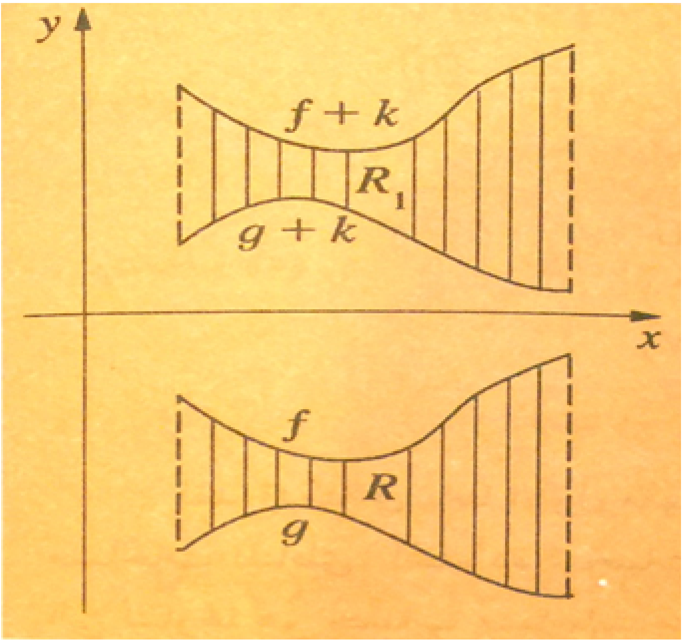
$$A(R) = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy.$$

ملاحظة:
يظل إيجاد المساحة صحيحا

$$A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

حتى اذا كان $g(x) \leq 0$ **إذ يمكن إزاحة المنطقة** R_1 **الي أعلي وذلك باضافة عدد موجب** k **الي كل من الدالتين** $f(x), g(x)$ **بحيث** $g(x) + k \geq 0$ **وتصبح :**

$$A(R_1) = A(R) = \int_a^b [(f(x) + k) - (g(x) + k)]dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

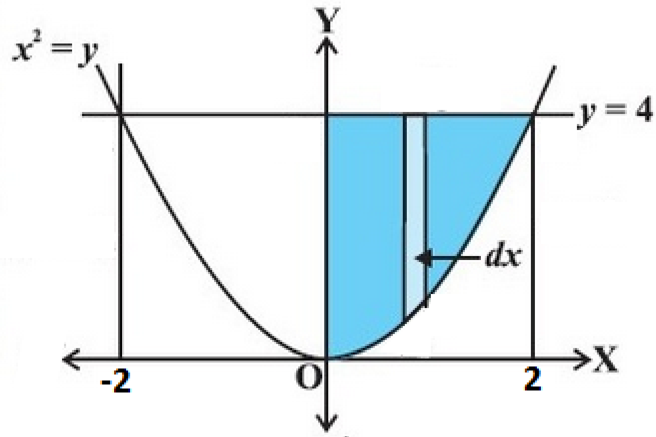


مثال: احسب المساحة للمنطقة المحدودة بين الدالتين $y = x^2$ و $y = 4$.

الحل:

أولا سوف نقوم بحلها وذلك بأخذ الشريحة على محور x

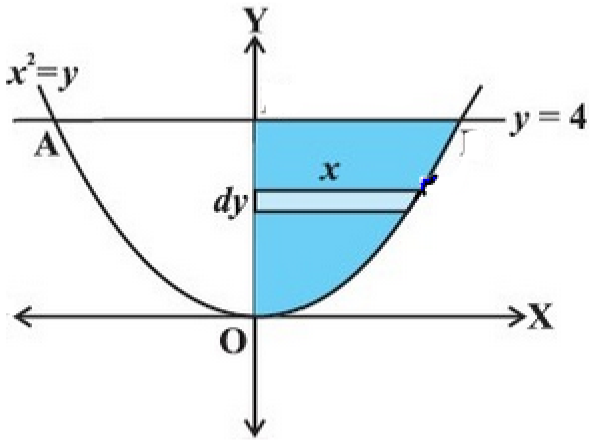
(أذا لم تعطى حدود التكامل فلابد من إيجاد حدود التكامل وذلك بمساواة الدالتين ببعض و نحل المعادلتين ومنها نحصل على نقاط التقاطع والتي يمكن تحديد حدود التكامل بعد ذلك سواءا على محور السينات او الصادات)



$$\begin{aligned}
x^2 &= 4 \\
x &= \pm\sqrt{4} \\
&\Rightarrow x = -2, \quad x = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A &= \int_{-2}^{2} 4 - x^2 \, dx \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

مثال: احسب المساحة للمنطقة المحدودة بين الدالتين $y = x^2$ و $y = 4$، ولتكن الشريحة تتحرك على محور y
الحل:



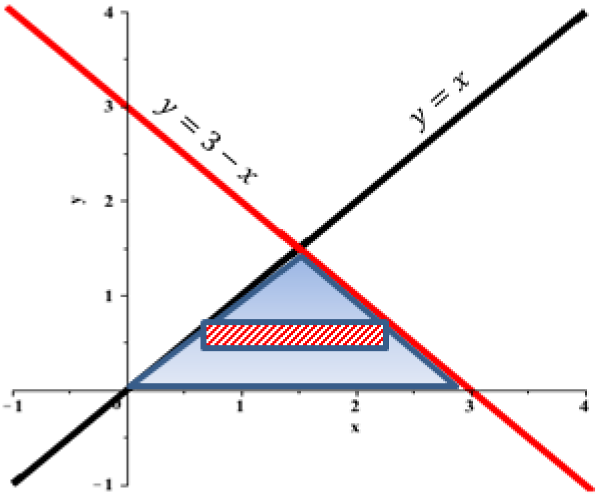
لايجاد x بدلالة y كما يلي

$$
\begin{aligned}
x^2 &= y \\
x &= \pm\sqrt{y}
\end{aligned}
$$

اذن الدالة اليمنى هي $\sqrt{y}$ واليسرى هي $-\sqrt{y}$ والان نوجد المساحة للمنطقة المحصورة بين هاتين الدالتين

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow A &= \int_0^4 \sqrt{y} - (-\sqrt{y})\, dy \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

مثال: احسب المساحة المحصورة بين $y = x$ و $y = 3 - x$ و $y = 0$، ولتكن الشريحة تتحرك على محور y.
الحل:



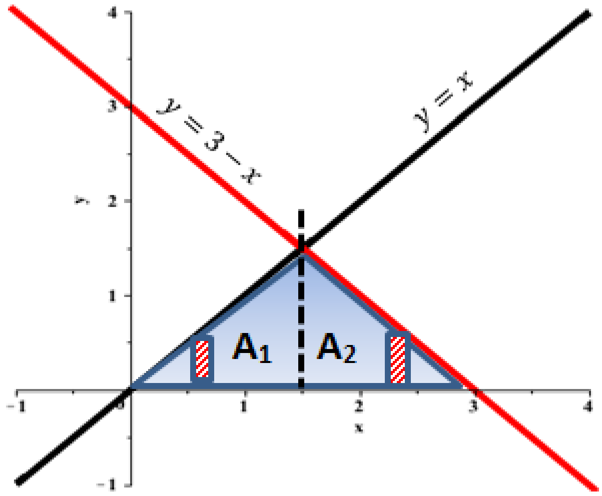
نوجد حدود التكامل وذلك بحل المعادلتين

$$
\begin{aligned}
y &= 3 - y \\
2y &= 3 \\
y &= \frac{3}{2} \\
&\Rightarrow \quad y = 0, \qquad x = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

اذن الدالة اليمنى هي $3-y$ واليسرى هي y والان نوجد المساحة للمنطقة المحصورة بين هاتين الدالتين

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A &= \int_0^{\frac{3}{2}} 3-y-y\,dy \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} 3-2y\,dy \\
&= \text{................................} \\
&= \text{................................} \\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

مثال: احسب المساحة لنفس المنطقة المحصورة في المثال السابق $y = x$ و $y = 3 - x$ و $y = 0$، ولتكن الشريحة تتحرك على محور x.
الحل:



عند اخذ الشريحة على محور x لابد ان نلاحظ أن المنطقة محصورة بين الدالة $y = 0$ من الاسفل و من الاعلى فإنها محددة بين دالتين مختلفتين (كما هو موضح بالشكل)، لذلك سوف نجزاء النمطقة الي منطقتين.
اولا نوجد نقاط التقاطع بين الدالتين

$$\begin{aligned} x &= 3 - x \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

والدالة $y = x$ تتقاطع $y = 0$ عند $x = 0$
والدالة $y = 3 - x$ تتقاطع مع $y = 0$ عند $x = 3$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow A &= A_1 + A_2 = \int_0^{\frac{3}{2}} x - 0\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} (3-x) - 0\,dx \\
&= \text{..............................} \\
&= \text{................................} \\
&= \text{................................} \\
&= \text{................................} \\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

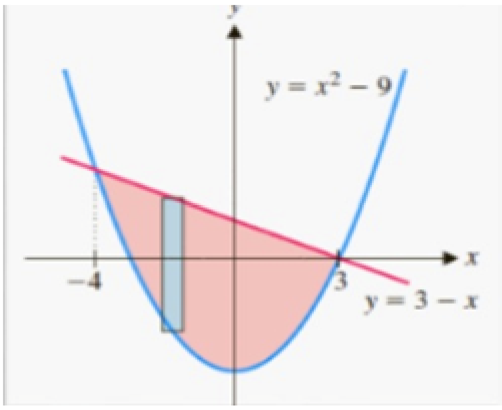
مثال : احسب المساحة للمنطقة المحدودة بين الدالتين $y = 3 - x$ و $y = x^2 - 9$، وبأخذ الشريحة تتحرك على محور x.
الحل:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 3 - x \\ x^2 + x - 12 &= 0 \end{aligned}$$

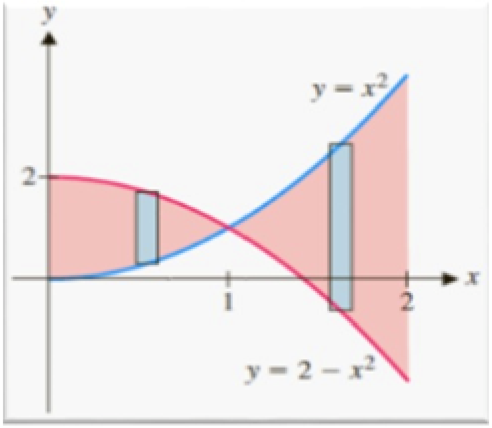
يمكننا الحل باستخدام القانون المميز لحل معادلات الدرجة الثانية

$$\begin{aligned} x^2 + x - 12 &= 0 \\ (x+4)(x-3) &= 0 \\ \Rightarrow x = -4, \quad x = 3 & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \int_{-4}^{3} \left[(3 - x) - (x^2 - 9)\right] \, dx$$



مثال : احسب المساحة المنطقة المحدودة بين الدالتين $y = x^2$ **و** $y = 2-x^2$ **للفترة** $0 \le x \le 2$.



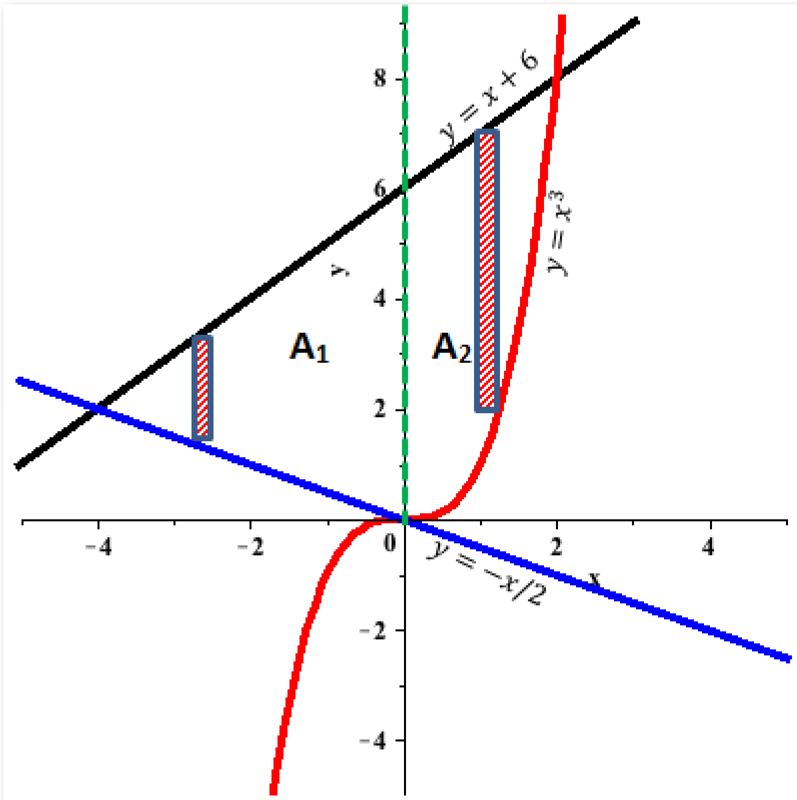
الحل:

$$A = \int_0^1 \left[(2-x^2)-(x^2)\right]\,dx + \int_1^2 \left[(x^2)-(2-x^2)\right]\,dx$$

مثال: اوجد المساحة المحصورة بين $y-x=6$ و $y-x^3=0$ و $2y+x=0$.
الحل: أولا نوجد نقاط التقاطع بين الدوال الثلاث كمايلي ....

ونحصل على النقاط $(2,8)$ ، $(0,0)$ و $(-4,2)$

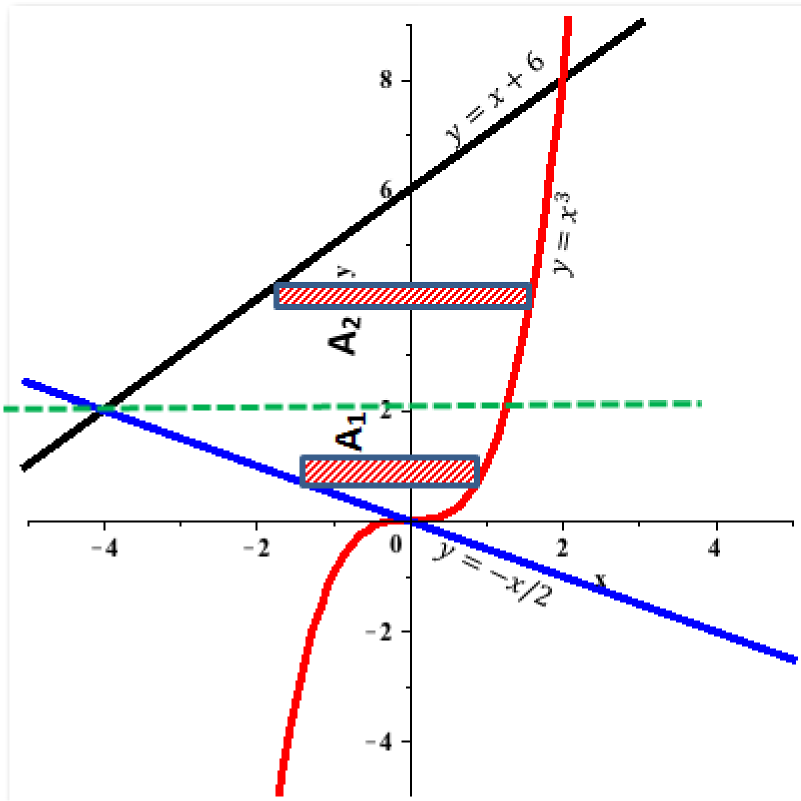
و بأخذ الشريحة تتحرك اولا على محور x



نحصل على المساحة المحصورة كما يلي

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-4}^{0} \left[(x+6) - (\frac{-x}{2})\right] \, dx + \int_{0}^{2} \left[(x+6) - (x^3)\right] \, dx = 22$$

وبأخذ الشريحة تتحرك على محور y.



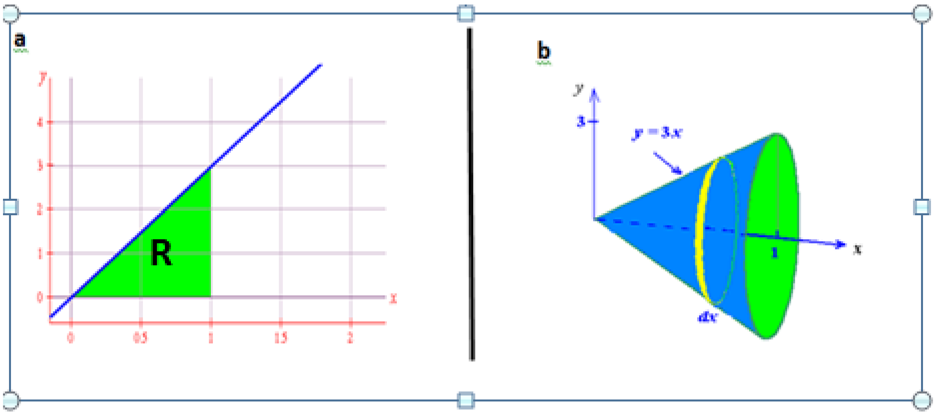
فنحصل على المساحة المحصورة كما يلي

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^2 \left[y^{\frac{1}{3}} - (-2y)\right]\, dy + \int_2^8 \left[y^{\frac{1}{3}} - (y-6)\right]\, dy = 22$$

٢.١ حجوم أجسام الدوران Volumes of Solids of Revolution :

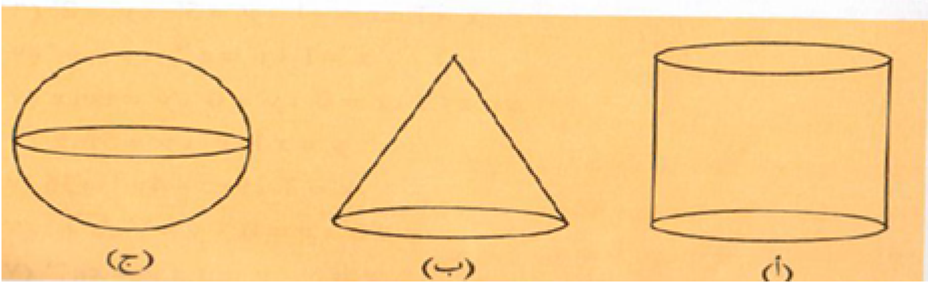
جسم الدوران يعرف بانه الجسم الناتج من دوران منطقة مستوية R حول مستقيم خارج المنطقة و يقع علي نفس المستوي ويسمي ذلك بمحور الدوران.

مثال:
في الشكل التالي a نلاحظ اننا ندرس المساحة للمنطقة R الواقعة بين الدالتين $y = 3x$ و $x = 1$. وعندما تدور المنطقة المظللة R بدرجة 360 حول محور x فأننا نحصل على شكل مخروطي كما هو موضح بالشكل b



مثال:
الشكل التالي يبين ثلاث أجسام ناشئة من دوران منطقة حول محور y أو x

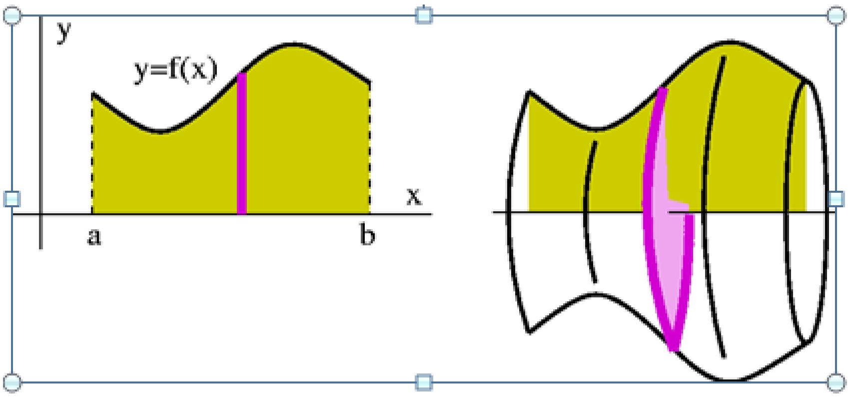
(أ) اسطوانة ناشئة عن دوران مستطيل حول محور y.
(ب) مخروط ناشئ عن دوران مثلث حول محور y.
(ج) كرة ناشئة عن دوران نصف قرص دائري حول محور x (أو محور y).



١.٢.١ الاقراص الاسطوانية Disk Method :

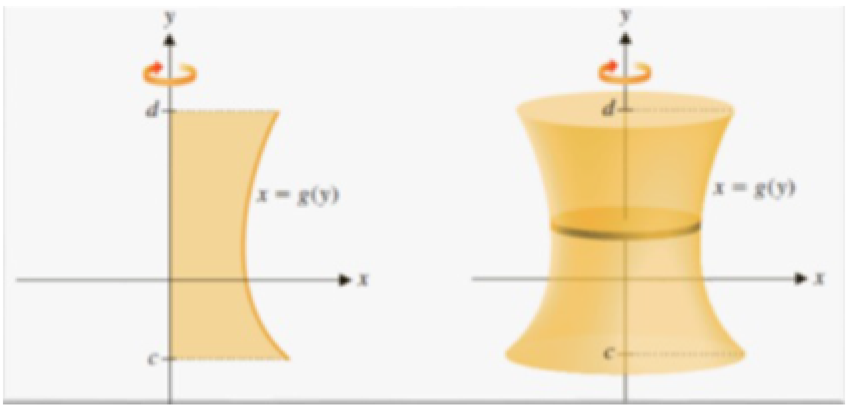
(١) اذا كان لدينا الدالة $f(x)$ قابله للتكامل علي الفترة $[a,b]$ فإن الحجم الناتج من دوران $y=f(x)$ حول محور x و حيث أن $a \leq x \leq b$ يعطي من:

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

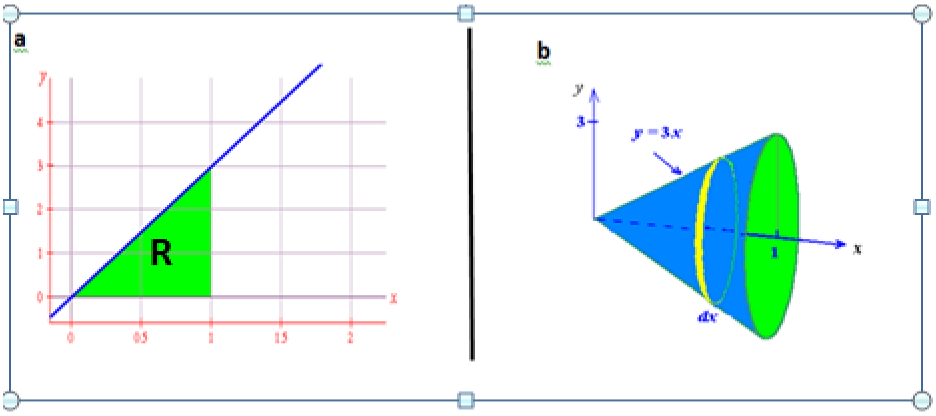


(٢)اذا كان لدينا الدالة $g(y)$ قابله للتكامل علي الفترة $[c,d]$ فإن الحجم الناتج من دوران $x=g(y)$ حول محور y و حيث أن $c \leq y \leq d$ يعطي من:

$$V=\pi\int_c^d [g(y)]^2 dy.$$



مثال : احسب حجم الشكل المخروطي الناتج من دوران المنطقة R الواقعة بين الدالتين $y = 3x$ و $x = 1$ حول محور x



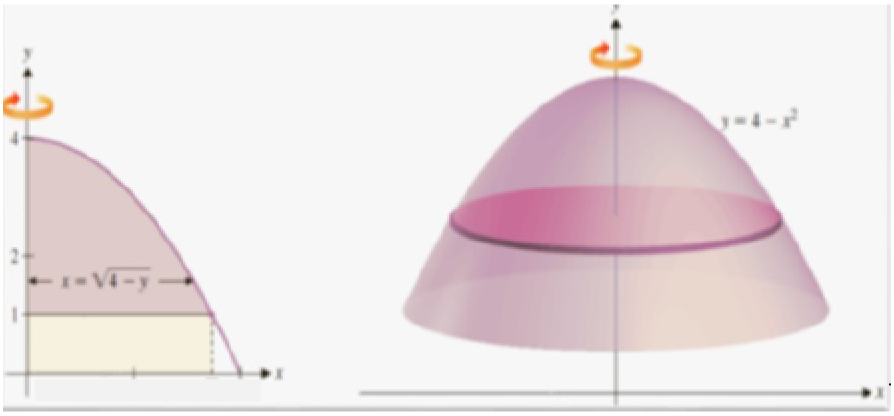
الحل:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 \; dx \\
&= \pi \int_0^1 (3x)^2 \; dx \\
&= \text{..............................} \\
&= \text{..............................} \\
&= \text{..............................} \\
&= 3\pi
\end{aligned}
$$

مثال : احسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات $y = 4 - x^2$ و $y = 1$ و $x = 0$ حول محور y.

الحل:

الشكل المقصود هو التالي



وبما أن محور الدوران هو y فإننا يجب أن نكتب x بدلالة y

$$\Rightarrow g(y) = x = \sqrt{4-y}$$

و حدود التكامل هي $y = 1$ ، $y = 4$

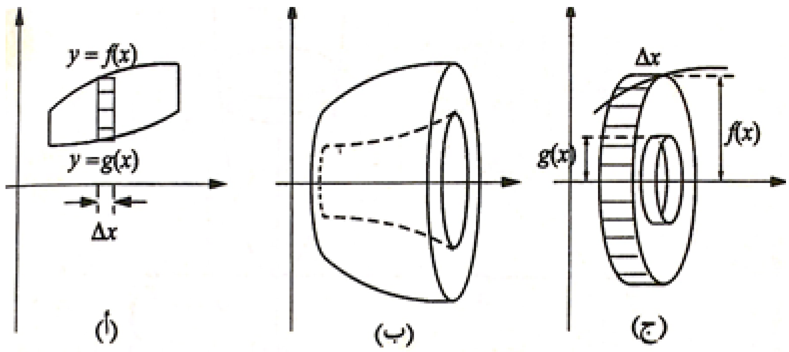
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [g(y)]^2 \ \ dy \\ &= \pi \int_1^4 \left(\sqrt{4-y}\right)^2 \ \ dy \\ \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ &= \frac{9}{2}\pi \end{aligned}$$

٢.٢.١ طريقة الوردات Washers Method :

هنا يتم تعميم طريقة الاقراص الاسطوانية للحالة التي يكون فيها المنطقة المدورة بين بياني دالتين f, g.

(١) اذا كان لدينا الدالتين $f(x) \geq g(x)$ قابلتان للتكامل علي الفترة $[a, b]$ فإن الحجم الناتج من دوران $y = f(x)$ و $y = g(x)$ حول محور x و حيث أن $a \leq x \leq b$ يعطي من:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)^2] - [g(x)]2dx.$$



(٢)اذا كان لدينا الدالتين $f(y) \geq g(y)$ قابلتان للتكامل علي الفترة $[c, d]$ فإن الحجم الناتج من دوران $x = f(y)$ و $x = g(y)$ حول محور y و حيث أن $c \leq y \leq d$ يعطي من:

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 - [g(y)]^2 dy.$$

ملاحظة:
بالإمكان استخدام طريقة الوردة حتي اذا لم يكن الدوران أحد المحورين الاحداثيين بل كان مستقيما يوازي احدهما.(راجع مثال15 ـ 7 صفحة: 215).

مثال : أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببياني الدوال $y = x^2$ و $y = 4x - 3$ حول محور x.

الحل:

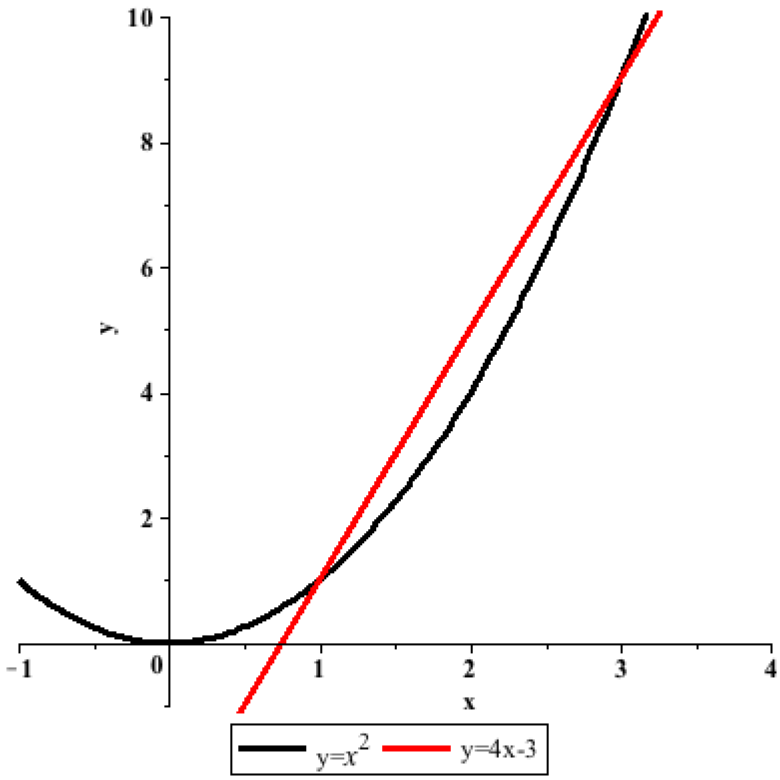
نوجد نقاط التقاطع كمايلي

$$\begin{aligned} x &= 4x - 3 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

يمكننا الحل باستخدام القانون المميز لحل معادلات الدرجة الثانية أو التحليل

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x - 4)(x - 3) &= 0 \\ \Rightarrow x = 1, \quad x &= 3 \end{aligned}$$

ولمعرفة الدالة الاكبر عن طريق الرسم (بأخذ قيم من داخل الفترة $[1, 3]$ والتعويض بها في الدالتين)



$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx \\
&= \pi \int_1^3 \big[(4x-3)^2 - (x^2)^2\big] \quad dx \\
\\
&= \text{..................................} \\
&= \text{..................................} \\
&= \text{..................................} \\
&= \text{..................................} \\
&= \text{..................................} \\
&= \frac{184\pi}{15}
\end{aligned}
$$

مثال : أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببياني الدوال $y = x^2$ و $y = 4x - 3$ حول محور y.
الحل:
هي نفس الدوال في المثال السابق ولكن المطلوب ايجاد الحجم حول محور y.
اذن في البداية لابد ان نعرف x بدلالة y للدوال $y = x^2$ و
$y = 4x - 3$
فنحصل على الدوال كمايلي $x = \sqrt{y}$ و $x = \frac{y+3}{4}$ ونحصل على نقاط التقاط من

$$\begin{aligned} \frac{y+3}{4} &= \sqrt{y} \\ \Rightarrow y+3 &= 4\sqrt{y} \end{aligned}$$

بتربيع الطرفين نحصل على

$$\begin{aligned} y^2 + 6y + 9 &= 16y \\ y^2 - 10y + 9 &= 0 \end{aligned}$$

يمكننا الحل باستخدام القانون المميز لحل معادلات الدرجة الثانية أو التحليل

$$\Rightarrow y = 1, \quad y = 9$$

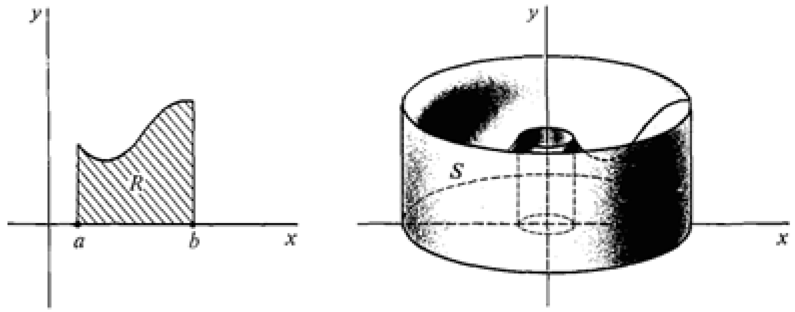
لمعرفة الدالة الاكبر عن طريق الرسم (بأخذ قيم من داخل الفترة $[1, 3]$ والتعويض بها في الدالتين)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d [f(y)]^2 - [g(y)]^2 dy \\ &= \pi \int_1^9 \left[(\sqrt{y})^2 - (\frac{y+3}{4})^2 \right] \ dy \\ &= \text{................................} \\ &= \text{................................} \\ &= \text{................................} \\ &= \text{................................} \\ &= \text{................................} \\ &= \frac{16\pi}{3} \end{aligned}$$

٣.٢.١ طريقة الشرائح الاسطوانية Method of Cylindrical Shells :

إذا كانت f دالة غير سالبة وقابلة للتكامل على $[a,b]$ فإن الناتج عن دوران المنطقة R تحت المنحنى f حول محور y تساوي

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx.$$



وإذا كانت g دالة وقابلة للتكامل على $[c,d]$ فإن الناتج عن دوران المنطقة R تحت المنحنى g حول محور x تساوي

$$V = 2\pi \int_c^d yg(y)\,dy.$$

اذا كان لدينا دالتين ومحور الدران حول y فنحصل على الحجم من

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))\,dx.$$

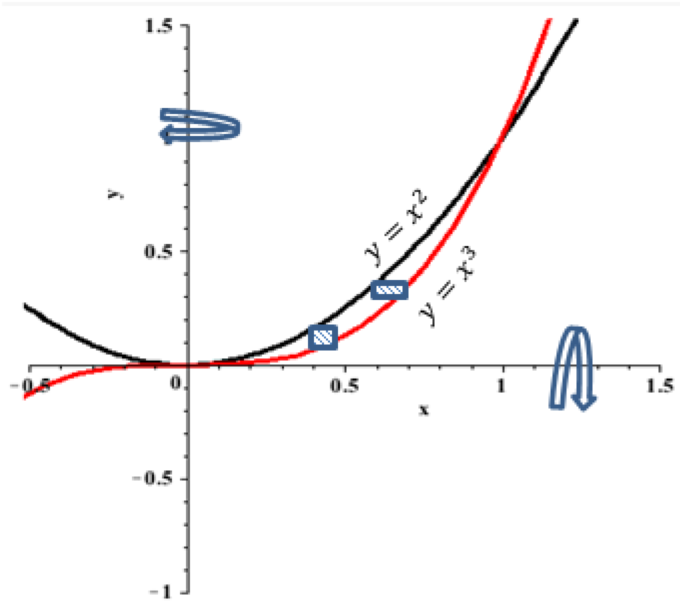
واما اذا كان الدران حول محور x

$$V = 2\pi \int_c^d y(f(y) - g(y))\,dy.$$

مثال: بإستخدام طريقة الشرائح الاسطوانية اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين $y = x^2$ و $y = x^3$ والدران حول محور y. الحل:
بما ان الدوران حول محور y فالحجم سوف يعطي من

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx.$$

حيث $f > g$



نوجد نقاط التقاطع

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 \\ x^3 - x^2 &= 0 \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 0, \quad x = 1$$

لمعرفة الدالة الاكبر عن طريق الرسم (او بأخذ قيم من داخل الفترة $[0, 1]$ والتعويض بها في الدالتين)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow V &= 2\pi \int_0^1 x(x^2 - x^3)\, dx \\
&= \text{..............................} \\
&= \text{..............................} \\
&= \text{..............................} \\
&= \frac{2\pi}{20}
\end{aligned}
$$

⋆اذا طلب حل المثال بالدوران حول x فتصبح الدوال لدينا بدلالة y كما يلي $x = y^{1/2}$، $x = y^{1/3}$ ويتم الحصول على الحجم من

$$V = 2\pi \int_c^d y(f(y) - g(y))\, dy.$$

حيث $f > g$

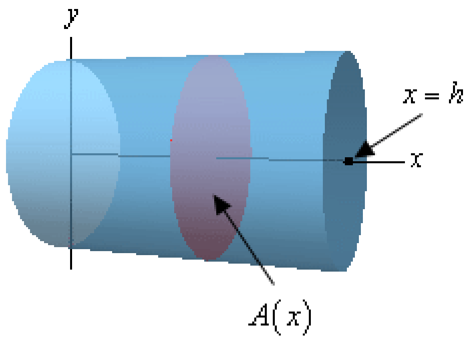
ملاحظة: ليس من الضرورة أن تكون الحجوم متساوية اذا كان الدوران حول x او y.

٤.٢.١ طريقة المقاطع العرضية Method of Cross Sections :

هذه الطريقة تستخدم لحساب حجوم الاجسام التي تكون مساحات مقاطعها العرضية المعامدة لمحور مناسب محكومة بدالة قابلة للتكامل. (المقطع العرضي هو تقاطع مستو مع الجسم).
بالتالي يمكننا الحصول على الحجم بهذه الطريقة لحالتين:

(١) إذا كانت مساحة المقطع العرضي للجسم بمستو معامد لمحور x عند x هي $A(x)$ حيث A دالة متصلة، وكان الجسم S محصور بالمستويين عند a و b، فإن حجم الجسم S هو

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$



مثال: أوجد الحجم لاسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها h (الموضحة في الشكل اعلاه).
الحل:
من الرسم نلاحظ أن محور الاسطوانة هو على محور x من 0 الى h ويكون المقطع العرضي للاسطوانة المعامد لمحور x هو دائرة نصف قطرها r.

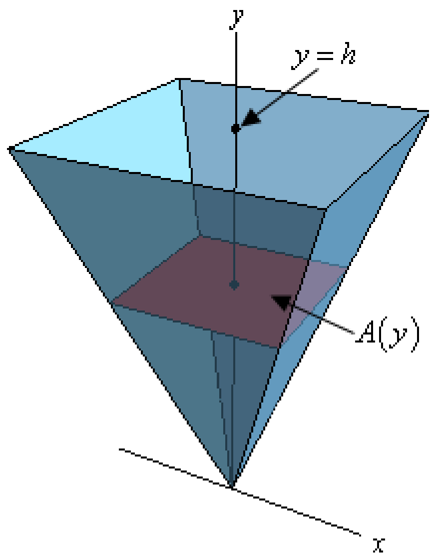
$$\Rightarrow A(x) \quad = \quad \pi r^2$$

وبالتالي يكون حجم الاسطوانة هو

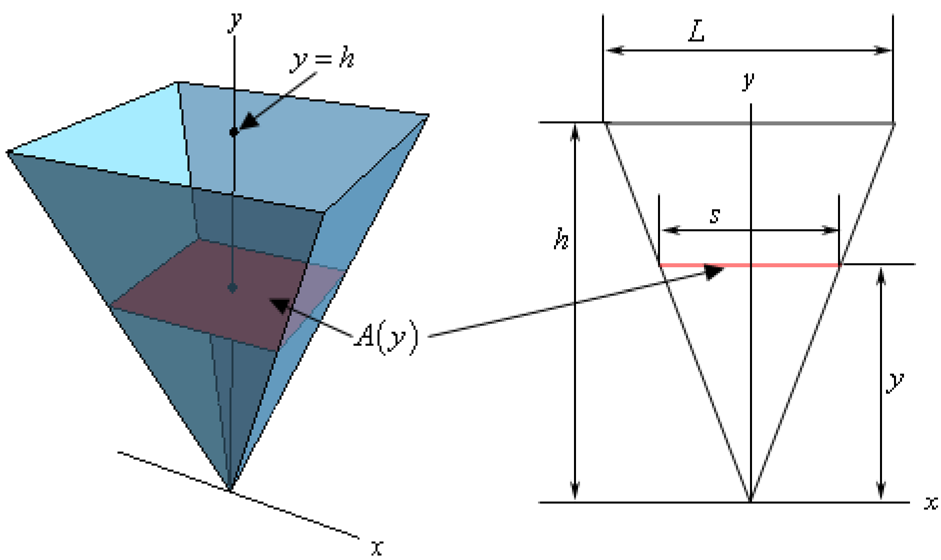
$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x)\, dx \\ &= \int_0^h \pi r^2\, dx \end{aligned}$$

(١) إذا كانت مساحة المقطع العرضي للجسم بمستو معامد لمحور y عند y هي $A(y)$ حيث A دالة متصلة، وكان الجسم S محصور بالمستويين عند c و d، فإن حجم الجسم S هو

$$V = \int_a^b A(y)\, dy$$



مثال: أوجد الحجم للهرم الذي قاعدته عبارة عن مربع طول ضلعه L وارتفاعها h ، باستخدام طريقة المقاطع العرضية.(الشكل الموضح اعلاه).
الحل:



هنا نلاحظ أن محور الهرم منطبق على محور y و راس الهرم هو عبارة عن نقطة $(0,0)$ وكذلك نلاحظ أن مقطع الهرم المعامد على محور y هو عبارة عن مربع طول ضلعه s.
لو اخذنا فقط سطح واحد من سطوح الهرم نلاحظ أنه عبارة عن مثلث وهذا المثلث متساوي الضلعين، وعندما ناخذ المقطع المعامد من الهرم على y، نحصل على مثلث على نفس السطح من الهرم وهو متساو الضلعين ومنها نحصل على

$$\frac{s}{L} = \frac{y}{h} \quad \Rightarrow s = \frac{Ly}{h}$$

$$\Rightarrow A(y) \;=\; s^2 = \frac{L^2 y^2}{h^2}$$

وبالتالي يكون حجم الهرم هو

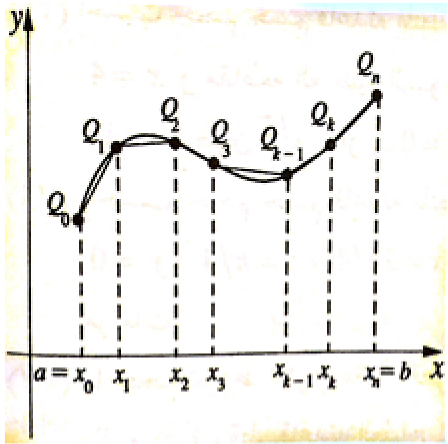
$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y)\,dy \\ &= \int_0^h \frac{L^2 y^2}{h^2}\,dy \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{1}{3}L^2 h \end{aligned}$$

٣.١ طول القوس وسطح الدوران Arclength and Surface of Revolution:

١.٣.١ طول القوس Arclength:

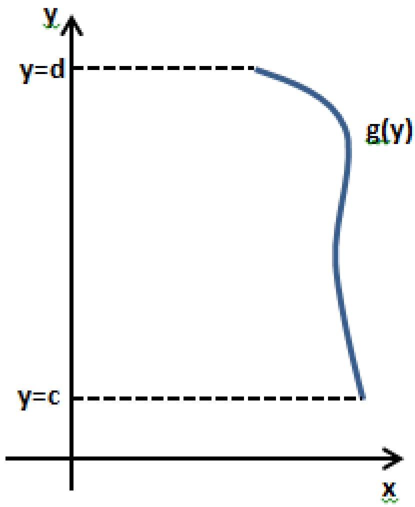
- إذا كانت $f(x)$ دالة مشتقتها $f'(x)$ ومتصلة على $[a,b]$ فإن طول القوس للمنحنى $f(x)$ من النقطة $x=a$ الى النقطة $x=b$ يساوي

$$L(f)=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$



- أما إذا كان المنحنى معطى بالصيغة $g(y)$ حيث g متصلة على الفترة $[c,d]$ ومشتقتها هي $g'(y)$، إن طول القوس للمنحنى $g(y)$ من النقطة $y=c$ الى النقطة $y=d$ يساوي

$$L(g)=\int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy.$$



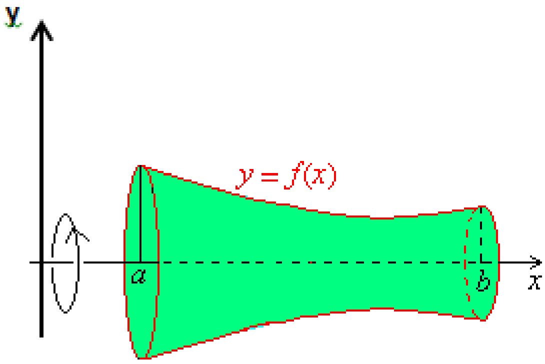
مثال : احسب طول المنحني $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 10$ **من** $x = 8$ **الي** $x = 27$.

الحل:

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

٢.٣.١ سطح الدوران Surface of Revolution :

اذا كان لدينا الدالة $y = f(x) \geq 0$ دالة متصلة قابلة للتكامل علي الفترة $[a, b]$. فانه لو قمنا بدوران $y = f(x)$ حول محور x علي الفترة $[a, b]$ نحصل علي سطح الدوران



مبرهنة:

اذا كان لدينا الدالة $y = f(x) \geq 0$ دالة متصلة وقابلة للتكامل علي الفترة $[a, b]$. فان مساحة سطح الدوران S والناتج من دوران $y = f(x)$ حول محور x يعطي من:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx.$$

مثال : احسب مساحة السطح الناشئ من دوران بيان الدالة $y = \sqrt{x}$ **علي الفترة** $[1, 4]$ **حول محور** x.

الحل:

ملاحظة:

و على نهج شبيه نحصل على القاعدة التاليـــة إذا كان الدوران حول محور y و كانت $a \ge 0$:

$$(١٦) \quad S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

أما إذاكان المنحنى معطى بالقاعـــدة $x=g(y)$ حيث g دالـــة ناعمـــة على $[c,d]$، فمساحة السطح الناتجة من دوران الجزء من المنحنى بـــين $y=c$ و $y=d$ حول محور y، بافتراض أن $g(y)\ge 0$، هي

$$(١٧) \quad S=2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

مساحة السطح الناتج من الدوران حول محور x، بافتراض أن $c\ge 0$، فهي

$$(١٨) \quad S=2\pi\int_c^d y\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

ملحوظة

إذا كانت $y=f(x)$ سالبة لبعض قيم x، فإن مساحة السطح S الناشئة عن دوران بيان الدالة f حول محور x هي:

$$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

و بالمثل إذا كانت الدالة $x=g(y)$ سالبة لبعض قيم y، فإن مساحة السطح الناشئة عن دوران بيان g حول محور y هي:

$$S=2\pi\int_a^b |g(y)|\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$