١ صيغ عدم التعيين والتكاملات المعتلة
: Indeterminate Forms and Improper Integrals

١.١ التكاملات المعتلة
: Improper Integrals

في المسائل السابقة للتكاملات المحدودة تعرفنا على التكاملات على فترات $[a, b]$ التى هي فترات مغلقة و محدودة.

هنا سوف نقوم بعرض بعض التكاملات المعتلة والتي قد تكون على احد الصور التالية

$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ هذا التكامل هو تكامل معتل

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ كذلك هذا التكامل هو تكامل معتل

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ وهذا التكامل هو تكامل معتل من طرفيه

١.١.١ حالة الفترة غير المحددة
: Unbounded Inerval Case

أذا كانت f متصلة على الفترة $[a,\infty)$ فاننا نعرف التكامل المعتل كما يلي

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

أذا كانت f متصلة على الفترة $(-\infty,b]$ فاننا نعرف التكامل المعتل كما يلي

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

يكون كلا من التكاملين السابقين تقاربي إذا كانت النهاية محددة اي قيمة التكامل المعتل محددة، وأذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت $\pm\infty$ فإن التكامل المعتل يكون تباعديا.

وبالنسبة للتكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ فيمكننا تعريفه كما يلي

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

مثال: احسب التكامل التالي

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$$

الحل:
نلاحظ أن التكامل معتل، وسوف نقوم باحساب التكامل كمايلي

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx =$$

مثال: احسب التكامل التالي

$$\int_0^{\infty} x\ e^{-x}\,dx$$

مثال:
احسب التكامل التالي:

$$\int_{-\infty}^{1} e^{2x}\,dx$$

تمرين: احسب التكامل

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

مثال: احسب التكامل التالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+3)^2}\ dx$$

الحل:
للتذكير: لحل التكاملات التي تكون على هذه الصورة نقوم اولا بمايلي

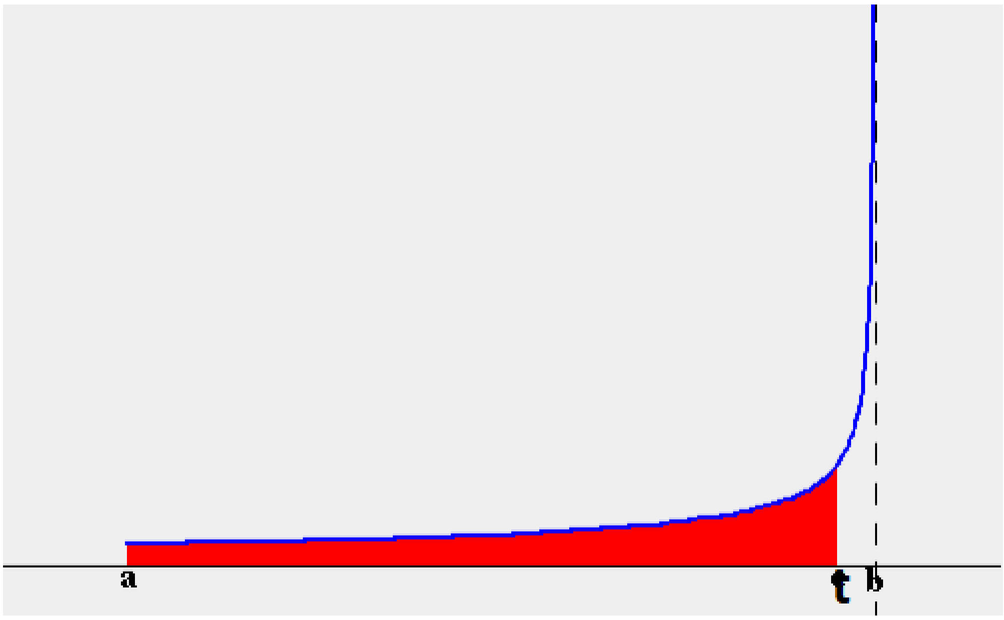
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

٢.١.١ حالة الدالة غير المحددة
: Unbounded Function Case

في هذه الحالة إذا كانت f متصلة على الفترة $[a, b)$ وكانت

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$$

، اي غير محددة بجوار b كما في الشكل



فيكون التكامل المعتل

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

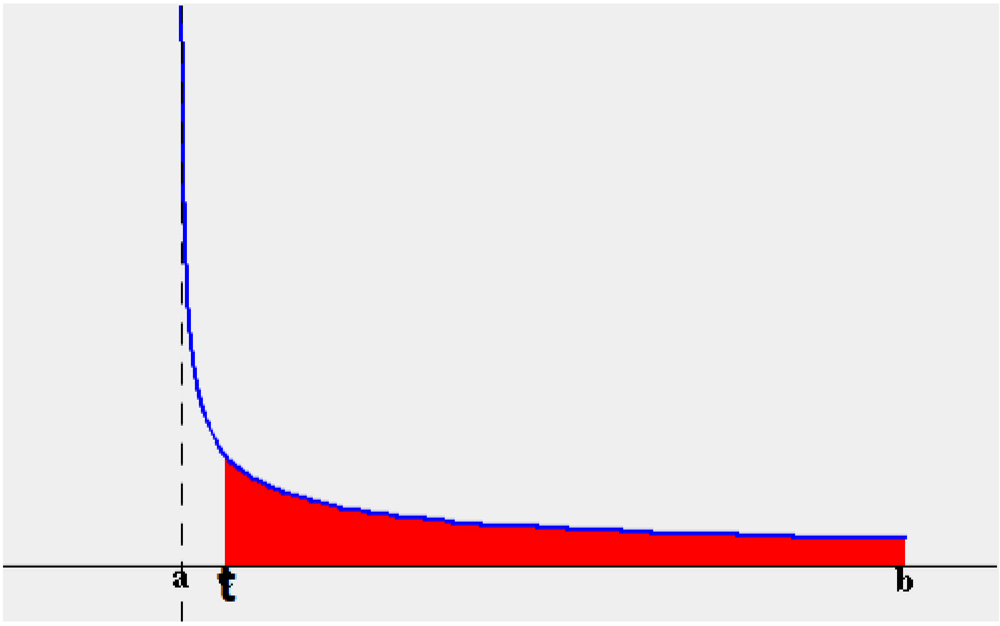
معرفا كما يلي

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\, dx$$

وإذا كانت f متصلة على الفترة $(a,b]$ وكانت

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

، اي غير محددة بجوار a كما في الشكل



فيكون التكامل المعتل

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

معرفا كما يلي

$$\int_a^b f(x)\;dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

يكون كلا من التكاملين السابقين تقاربي إذا كانت النهاية في طرفه الايمن موجودة وأذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت $\pm\infty$ فإن التكامل المعتل يكون تباعديا.

أما إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ ما عدا عند النقطة $c \in (a,b)$ بحيث أن

$$\lim_{x \to c^{\pm}} = \pm\infty$$

فالتكامل المعتل $\int_a^b f(x)\ dx$ يعرف بالشكل التالي

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

ويكون التكامل تقاربيا اذا كان كل من التكاملين في الطرف الايمن تقاربيا، ويكون تباعديا اذا كان أحدهما او كلاهما تباعديا.

مثال:
احسب التكامل

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

الحل:
نلاحظ أن التكامل معتل وذلك لان غير محددة بجوار 1 أي

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \infty$$

والدالة f متصلة على الفترة $[0,1)$ ولحساب هذا التكامل نقوم بمايلي

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\
&= -2 \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{-dx}{2\sqrt{1-x}} \\
&= -2 \lim_{t\to 1^-} \left[\sqrt{1-x}\right]_0^t \\
&= -2 \lim_{t\to 1^-} \left[\sqrt{1-t} - 1\right] = 2
\end{aligned}$$

ونستنتج أن التكامل تقاربي وقيمته تساوي 2.

مثال:
احسب التكامل

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

الحل:
نلاحظ أن التكامل معتل وذلك لان غير محددة بجوار 0 أي

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \infty$$

والدالة f متصلة على الفترة $(0,1]$ ولحساب هذا التكامل نقوم بمايلي

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\
&= 2 \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\
&= 2 \lim_{t\to 0^+} \left[\sqrt{x}\right]_t^1 \\
&= 2 \lim_{t\to 0^+} \left[\sqrt{1} - \sqrt{t}\right] = 2
\end{aligned}$$

ونستنتج أن التكامل تقاربي وقيمته تساوي 2.

مثال:
احسب التكامل

$$\int_0^2 \frac{dx}{4x-5}$$

الحل
الدالة متصلة عدا عند النقطة $x = \frac{5}{4}$ فهي تسعى نحو ∞ عندما $x \to \frac{5}{4}$.
إذن التكامل يمكن أن نعرفه كما يلي

$$\int_0^2 \frac{dx}{4x-5} = \int_0^{\frac{5}{4}} \frac{dx}{4x-5} + \int_{\frac{5}{4}}^2 \frac{dx}{4x-5}$$

والان نحل كل تكامل على حدة

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{dx}{4x-5} &= \lim_{t \to \frac{5}{4}^-} \int_0^t \frac{dx}{4x-5} \\
&= \lim_{t \to \frac{5}{4}^-} \frac{1}{4} \int_0^t \frac{4dx}{4x-5} \\
&= \lim_{t \to \frac{5}{4}^-} \left[\frac{1}{4} \ln |(4x-5)|\right]_0^t \\
&= .... \\
&= .... \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

هنا يجب أن نتذكر أن

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{5}{4}}^2 \frac{dx}{4x-5} &= \lim_{t \to \frac{5}{4}^+} \int_t^2 \frac{dx}{4x-5} \\
&= \lim_{t \to \frac{5}{4}^+} \frac{1}{4} \int_t^2 \frac{4dx}{4x-5} \\
&= \lim_{t \to \frac{5}{4}^+} \left[\frac{1}{4} \ln |(4x-5)|\right]_t^2 \\
&= .... \\
&= .... \\
&= \infty
\end{aligned}$$

وبما أن التكاملين تباعديين فإن التكامل $\int_0^2 \frac{dx}{4x-5}$ متباعد