١ صيغ عدم التعيين والتكاملات المعتلة
: Indeterminate Forms and Improper Integrals

١.١ صيغ عدم التعيين
: Indeterminate Forms

حالات عدم التعيين تكون على الصور

$$\frac{0}{0} \quad \text{or} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\infty^0 \qquad 0^0 \qquad 1^\infty \qquad \infty \cdot 0 \qquad \infty - \infty$$

وعلينا أن نتذكر أنه اذا كان لدينا عدد ثابت l فإن

$$\begin{aligned}
\frac{l}{0} &= \infty, \quad l \neq 0 \\
\frac{l}{\infty} &= 0, \quad \forall l \\
l \,.\, \infty &= \infty, \quad l \neq 0 \\
l \mp \infty &= \mp\infty \\
+\infty + \infty &= \infty \\
-\infty - \infty &= -\infty \\
l^\infty &= \infty, \quad l \neq 1 \\
\infty^l &= \infty, \quad l \neq 0
\end{aligned}$$

١.١.١ صيغة عدم التعيين من النوع $\frac{0}{0}$
: Indeterminate Forms of Type $\frac{0}{0}$

أذا كان ناتج النهاية كمايلي

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

في هذه الحالة حصلنا على حالة عدم تعيين ولايمكن اعتبار نهاية هي حاصل قسمة نهاية البسط على نهاية المقام. هنا نحتاج الى اتباع طريقة معينة لايجاد النهاية.
سوف نتعرف على قاعدة لوبيتال L'Hospital's Rule التي تعتبر وسيلة فعالة وعامة لتناول مثل هذه النهايات.

مبرهنة(قاعدة لوبيتال):
اذا كانت $f(x)$ **و** $g(x)$ **قابلتين للاشتقاق على الفترة** I **تحوي** c **و أن** $g'(x) \neq 0$ **وكانت**

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

عندها نوجد النهاية اذا كانت موجودة أوتساوي ∞ **أو** $-\infty$ **كمايلي**

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال: جد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال

$$(1)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

الحل:

$$(2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}}{\sin^2 x}$$

الحل:

$$(4)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{3x^2}$$

الحل:

تمرين:
أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - x - 6}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

٢.١.١ صيغة عدم التعيين من النوع $\frac{\infty}{\infty}$: Indeterminate Forms of Type $\frac{\infty}{\infty}$

إذا كانت

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

و استوفت الدوال f و g شروط قاعدة لوبيتال فإن:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال: جد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}$$

الحل:

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln}{\sqrt{x}}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$$

الحل:
للتذكير لدينا

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \ln x &= -\infty, \\
\lim_{x\to 0^+} \cot x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{0} = \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-x \csc^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = ...
\end{aligned}$$

٣.١.١ صيغة عدم التعيين من النوع $0 . \infty$: **Indeterminate Forms of Type** $0 . \infty$

نحصل على هذه الحالة اذا قمنا بحساب النهاية

$$\lim f(x)g(x)$$

بحيث أن

$$\lim f(x) = 0$$

و

$$\lim g(x) = \pm\infty$$

أو العكس.

لحل مثل هذه المسائل نقوم بتحويل النهاية الى احدى الصيغتين السابقتين $0/0$ **او** ∞/∞

مثال:
احسب النهاية التالية

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$$

الحل:
نلاحظ أن النهاية من النوع $0 . \infty$**، نحاول تحويلها الي الصيغة** ∞/∞ **وذلك بقسمة البسط والمقام على** x^2

٤.١.١ صيغة عدم التعيين من النوع $\infty - \infty$
: **Indeterminate Forms of Type** $\infty - \infty$

مثال:
احسب النهاية التالية

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

الحل:
نلاحظ أن النهاية من النوع $\infty - \infty$**، ونستطيع دوما تحويل صيغة عدم التعين هذه الي الصيغة** $0/0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{\ln x}\right) \quad = \quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$$

٥.١.١ صيغ عدم التعيين اخرى
: Other Indeterminate Forms

$$1^{\infty} \qquad 0^{0} \qquad \infty^{0}$$