١ طرائق التكامل
: Techniques of Integration

١.١ التكامل بالتجزئ
: Integration by parts

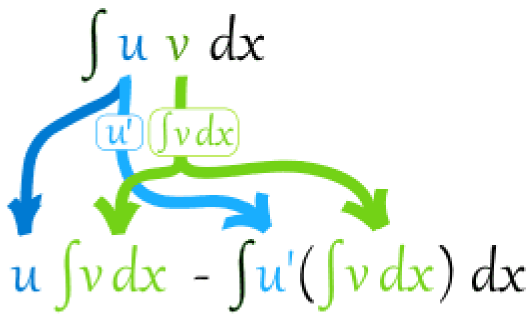
إذا كان لدينا التكامل يحتوي على حاصل ضرب دالتينن بدلالة x وكان من الصعب استخدام طريقة التعويض لحلها فعندها نلجأ الى طرق اخرى للتكامل ومنها طريقة التكامل بالتجزي والتي تعتمد على المبرهنة

إذا كان $u = f(x)$ ، $v = g(x)$ و كانت كل من f' ، g' متصلة فإن:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

بحيث أن تكامل $\int v\,du$ يكون من السهل ايجاده.

ملاحظة: إذا كان التكامل يحتوى على $\ln$ فغلبا يكون اجراء التكامل بطريقة التجزئ



مثال: جد التكامل:

$$\int xe^{x}\,dx$$

الحل: او لا نختار u بحيث يكون من السهل اشتقاقها
ونختار dv بحيث يكون من السهل تكاملها

نفرض $u = x$ و $dv = e^{x}\,dx$

مثال: جد التكامل:

$$\int \ln x \, dx$$

الحل: اولا نختار u بحيث يكون من السهل اشتقاقها
ونختار dv بحيث يكون من السهل تكاملها

نفرض $u = \ln x$ و $dv = dx$

$$\int x \ln x \, dx$$

الحل: اولا نختار u بحيث يكون من السهل اشتقاقها
ونختار dv بحيث يكون من السهل تكاملها

نفرض $u = ...$ **و** $dv = ...dx$

مثال: جد التكامل:

$$\int x \cos x \, dx$$

الحل:

نفرض $u = x$ **و** $dv = \cos x \, dx$

مثال: جد التكامل:

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

الحل:

نفرض $u = ...$ **و** $dv = ...\, dx$

مثال: جد التكامل:

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

الحل:

نفرض $u = ...$ **و** $dv = ... \, dx$

مثال: جد التكامل:

$$\int e^x \sin x \, dx$$

الحل: سوف نلاحظ في هذا المثال اننا سوف نستخدم طريقة التكامل بالتجزئ اكثر من مرة وذلك لإيجاد التكامل

نفرض $u = \sin x$ **و** $dv = e^x \, dx$

تمرين: اوجد التكامل

$$\int_1^e \ln x \, dx$$

مبرهنة: إذا كان $n \geq 2$ وهو عدد صحيح فإن:

$$\begin{aligned}
\int \cos^n x\,dx &= \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\ \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx \\
\int \sin^n x\,dx &= \frac{1}{n}\sin^{n-1}x\ \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx
\end{aligned}$$

مثال: جد التكامل:

$$\int \sin^3 x\,dx$$

مثال: جد التكامل:

$$\int \cos^5 x \, dx$$

٢.١ تكاملات قوى الدوال المثلثية
: Integral of Powers of Trigonometric Functions

في المبرهنة السابقة بينا كيفية حساب الدوال

$$\int \cos^n x\, dx$$
$$\int \sin^n x\, dx$$

سوف ندرس هنا طريقة اخر لحل هذين التكاملين وكذلك التكاملات التي تكون على الصور التالية

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$
$$\int \sec^m x \tan^n\ dx$$
$$\int \csc^m x \cot^n\ dx$$

هنا يعتمد اجراء التكامل على قيمة n, m وهي اعداد طبيعية، وذلك اعتمادا فيما أذا كانت زوجية أو فردية

١.٢.١ التكاملات على الصورة $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

(١)اذا كانت كل من m و n عددا زوجيا فإننا نستخدم متطابقة ضعف الزاوية وهي على الصورة

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1+\cos(2x)}{2}\\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

مثال: جد التكامل:

$$\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx$$

الحل: نلاحظ ان الاسس كلهما زوجي اذن نستخدم

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1+\cos(2x)}{2}\\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2(2x)\right) dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \cos^2(2x) \, dx
\end{aligned}$$

ونستطيع اكمال التكامل بالنسبة $\int \cos^2(2x)\, dx$ **حيث أن**

$$\cos^2(2x) = \frac{1+\cos 2(2x)}{2} = \frac{1+\cos(4x)}{2}$$

(٢) اذا كان احد العدديين m و n بالنسبة للتكامل

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

عددا فرديا والاخر زوجي فإننا نستخدم المتطابقة

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

بحيث انه نعوض بالشكل التالي:
اذا كان m فرديا، فنكتب التكامل على الصورة

$$\int \sin^{m-1} x \sin x \cos^n x \, dx$$

ثم نستخدم المتطابقة

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

ونقوم باخذ التعويض $u = \cos x$

اما اذا كان n فرديا، فنكتب التكامل على الصورة

$$\int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x \, dx$$

ثم نستخدم المتطابقة

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

ونقوم باخذ التعويض $u = \sin x$

مثال: جد التكامل:

$$\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx$$

الحل:

$$\begin{aligned}
&\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx \\
&\qquad = \int \cos x \cos^2 x \sin^4 x \, dx \\
&\qquad = \int \cos x \, (1 - \sin^2 x) \sin^4 x \, dx
\end{aligned}$$

مثال: جد التكامل:

$$\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx$$

مثال: جد التكامل:

$$\int \cos^5 x \sin^4 x \, dx$$

مثال: جد التكامل:

$$\int \cos^5 x \sin^3 x \, dx$$

تمرين: جد التكامل

$$\int \cos^3 x \sin^3 x \, dx$$

٢.٢.١ التكاملات على الصورة $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

في هذا النوع من التكاملات يعتمد على قيمة كل من m و n
(١) اذا كان $m = 0$ و n عدد فردي اكبر من 1 فيمكن استخدام الصيغة

$$\begin{aligned}\int \tan^m x \sec^n x \, dx &= \int \sec^n x \, dx \\ &= \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \, \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx\end{aligned}$$

١) اذا كان $n = 0$ و $m \neq 1$ عدد فردي اكبر من 1 فيمكن استخدام الصيغة

$$\begin{aligned}\int \tan^m x \sec^n x \, dx &= \int \tan^m x \, dx \\ &= \frac{1}{m-1} \tan^{m-1} x - \int \tan^{m-2} x \, dx\end{aligned}$$

(٣) اذا كان n عدد زوجي فنستخدم المتطابقة $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ثم نقوم بالتعويض $u = \tan x$
(٤) اذا كان m عدد فردي فنستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ثم نقوم بالتعويض $u = \sec x$

مثال: جد التكامل:

$$\int \sec^4 x \tan^2 x \, dx$$

الحل: نلاحظ أن $n = 4$ **عدد زوجيا أذن نستخدم المتطابقة** $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ **و التعويض** $u = \tan x$

$$\int \sec^2 x \sec^2 x \tan^2 x \, dx$$

$$= \int (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \tan^2 x \, dx$$

بفرض أن

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

مثال: جد التكامل:

$$\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx$$

الحل: نلاحظ أن $m = 3$ **عدد فرديا أذن نستخدم المتطابقة** $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
ثم نقوم بالتعويض $u = \sec x$

$$\Rightarrow \int \sec^2 x (\sec x \tan x) \tan^2 x \, dx$$

$$= \quad \int \sec^2 x (\sec x \tan x)(\sec^2 x - 1) \, dx$$

نفرض

$$u = \sec x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec x \tan x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$$

تمرين: احسب التكامل

$$\int \sec^4 x \, dx$$

٣.٢.١ التكاملات على الصورة $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$

هنا يمكننا اتباع طريقة مماثلة لحل التكاملات التي على الصورة $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ مع استخدام المتطابقة $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ اذا احتجنا لها

مثال: جد التكامل:

$$\int \cot^4 x \csc^4 x \, dx$$

نلاحظ أن $n = 4$ عدد زوجيا أذن نستخدم المتطابقة $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ و التعويض $u = \cot x$

$$\int \cot^4 x \csc^2 x \csc^2 x \, dx \quad = \quad \int \cot^4 x(1 + \cot^2 x) \csc^2 x \, dx$$

بفرض أن

$$u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int (\cot^4 x + \cot^6 x) \csc^2 x \, dx &= \int (u^4 + u^6) \csc^2 x \frac{du}{-\csc^2 x} \\
&= -\int (u^4 + u^6) du \\
&= -\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C \\
&= -\frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^7 x}{7} + C
\end{aligned}$$

٤.٢.١ التكاملات على الصورة
$\int \sin mx \cos nx \, dx$
$\int \sin mx \sin nx \, dx$
$\int \cos mx \cos nx \, dx$

لحساب تكاملات تحتوي على مثل هذه الصيغ نستخدم المتطابقات التالية:

$$\begin{aligned}
\sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}\{\sin[(m-n)x] + \sin[(m+n)]x\} \\
\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}\{\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)]x\} \\
\cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}\{\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)]x\}
\end{aligned}$$

مثال: احسب التكامل

$$\int \sin 7x \cos 5x \, dx$$

الحل:
نلاحظ أن $m = 7$ **و** $n = 5$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\{\sin[(m-n)x] + \sin[(m+n)]x\}$$

نحصل على ان

$$\sin 7x \cos 5x = \frac{1}{2}\left(\sin 2x + \sin 12x\right)$$

نلاحظ انه باستخدام المتطابقة اصبح التكامل مبسط ويمكن ايجاده بكل سهولة.
اي اننا الان نريد حساب التكامل

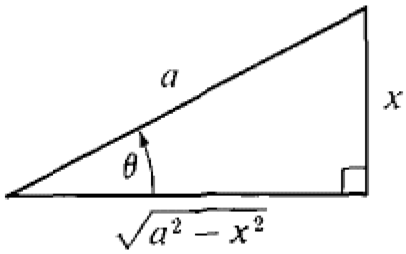
$$\begin{aligned}
\int \sin 7x \cos 5x \, dx &= \int \frac{1}{2}\left(\sin 2x + \sin 12x\right) \, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \sin 2x \, dx + \int \sin 12x \, dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 12x\right) + C \\
&= -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{24}\cos 12x + C
\end{aligned}$$

✓

٣.١ التعويضات المثلثية Trigonometric Substitions :

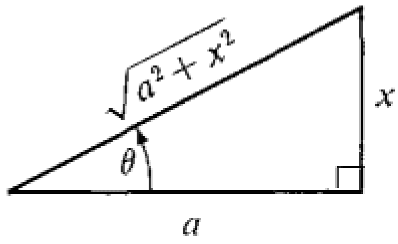
في هذا القسم يتم معالجة التكاملات التي تحتوي على احد الصيغ

$$\sqrt{a^2-x^2},\ \sqrt{a^2+x^2},\ \sqrt{x^2-a^2},\ \forall a>0.$$



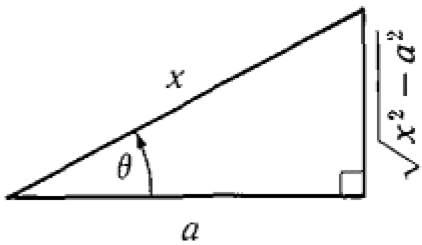
$x = a \sin\theta$

$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta$



$x = a \tan\theta$

$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec\theta$



$x = a \sec\theta$

$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan\theta$

Expression	Substitution
$a^2 - x^2$	$x = a\sin\theta$
$a^2 + x^2$	$x = a\tan\theta$
$x^2 - a^2$	$x = a\sec\theta$

مثال: احسب التكامل:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

الحل: نلاحظ ان التكامل يحتوي على الصيغة

$$\sqrt{a^2-x^2},\ a=2$$

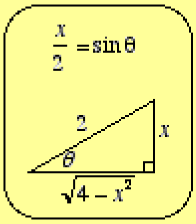
ولحل هذا المثال نقوم بالتعويض وذلك للتخلص من الجذر التربيعي

$$x = 2\sin\theta$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \qquad x = 2\sin\theta, \quad \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta} = 2\cos\theta$$

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{4\sin^2\theta}{2\cos\theta}\,2\cos\theta\, d\theta \\
&= 4\int \sin^2\theta\, d\theta \\
&= 4\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= 2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C \\
&= 2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + C \\
&= 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) + C \\
&= 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C
\end{aligned}$$



تمرين: احسب التكامل

$$\int (1 - x^2)^{3/2} \, dx$$

٤.١ تكاملات الصيغ التربيعية Integrals of Quadratic Forms :

اذا احتوى التكامل في بعض الاحيان على كثيرة حدود من الدرجة الثانية أي على الصورة

$$ax^2 + bx + c,\ b \neq 0.$$

وتكون غير قابلة للتحليل الى عوامل خطية فمن الافضل استخدام طريقة اكمال المربع لتسهيل التكامل ثم نقوم لاخذ تعويض مناسب، نحن نعلم أن

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

طريقة أكمال المربع في تعبير من النوع .... $x^2 + bx +$ نضيف و نطرح منه مربع نصف العدد b

مثال: أكمل المربع للتعبير

$$x^2 + 6x + 7$$

الحل:

$$x^2 + 6x + \boxed{} \quad + 7 \ \boxed{}$$

$$+\left(\frac{6}{2}\right)^2 \qquad\qquad -\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$\underbrace{x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2}_{\left(x+\frac{6}{2}\right)^2} + \underbrace{7 - \left(\frac{6}{2}\right)^2}_{7-9} = (x+3)^2 - 2$$

$$x^2 + 6x + 7 = (x+3)^2 - 2$$

مثال: احسب تكامل

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$$

الحل:
بإكمال المربع للتعبير $x^2 + 6x + 10$ نحصل على التكامل بالصورة

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10} = \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 1}$$

وباخذ التعويض

$$u = x + 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$$

اذن التكامل يصبح على الصورة

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10} &= \int \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \tan^{-1}(u) + c \\ &= \tan^{-1}(x+3) + c \end{aligned}$$

مثال: احسب تكامل

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - e^x + 1}}\, dx$$

الحل:

باخذ التعويض

$$u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

اذن التكامل يصبح على الصورة

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - e^x + 1}}\, dx &= \int \frac{e^x}{\sqrt{u^2 - u + 1}} \frac{du}{e^x} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - u + 1}} \end{aligned}$$

بإكمال المربع للتعبير $u^2 - u + 1$ نحصل على التكامل بالصورة

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - u + 1}} = \int \frac{du}{\sqrt{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$$

وباخذ التعويض

$$z = u - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dz}{du} = 1 \Rightarrow du = dz$$

اذن التكامل يصبح على الصورة

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} &= \int \frac{du}{\sqrt{z^2 + \frac{3}{4}}} \\ &= \sinh^{-1}\left(\frac{2z}{\sqrt{3}}\right) + c \\ &= \sinh^{-1}\left(\frac{2u - 1}{\sqrt{3}}\right) + c \\ &= \sinh^{-1}\left(\frac{2e^x - 1}{\sqrt{3}}\right) + c \end{aligned}$$

تمرين: احسب التكامل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$$

٥.١ الكسور الجزئية Partial Fractions :

هنا سوف ندرس التكاملات الكسرية أي التكاملات التي على الصورة

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

بحيث أن كلا من $g(x)$ و $h(x)$ كثيرة حدود.

مبرهنة:
أذا كانت $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ دالة كسرية ودرجة $g(x)$ أصغر من درجة $h(x)$ فإنه يمكن كتابة $f(x)$ بالشكل التالي

$$f(x) = F_1(x) + F_2(x) + ... + F_n(x)$$

حيث أن $F_1(x) + F_2(x) + ... + F_n(x)$ هي كسور، والمقدار $F_i(x)$ يكون إما على الصورة

$$F_i(x) = \frac{A}{(ax+b)^m}, \ (m \in \mathbb{N})$$

او على الصورة

$$F_i(x) = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m}, \ (m \in \mathbb{N}, \ b^2 - 4ac < 0)$$

حيث $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$ والمقدار $ax^2 + bx + c$، معادلة تربيعية ليس لها جذور حقيقية (أي أنه لايمكن تحليلها الي عوامل من الدرجة الاولى)

لاستخدام طريقة التكامل بالكسور نوجد الكسور الجزئية للدالة الكسرية $\frac{g(x)}{h(x)}$ (حيث ان درجة دالة البسط أقل من درجة دالة البسط).
أولا نقوم بتحليل المقام الى حاصل ضرب مجموعة دوال خطية على الشكل $ax + b$ او دالة تربيعية على الشكل $ax^2 + bx + c$ ثم نجمع العوامل المكررة بحيث يكون المقام عبارة عن حاصل ضرب عوامل مختلفة من الشكل $(ax+b)^m$ او $(ax^2 + bx + c)^m$ و $(m \in \mathbb{N})$ وهو عدد طبيعي.

- لك عامل من الشكل $(ax + b)^m$ فإن التركيب الجديد يكون على الصورة

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_m}{(ax+b)^m},$$

حيث $A_1, A_2, ..., A_m$ ثوابث وسوف يتم ايجاد قيمها
- بالنسبة للعامل $(ax^2 + bx + c)^m$ الذي ليس مربعا كاملا أو مميزة سالب (أي $b^2 - 4ac < 0$) فإن التركيب الجديد يكون على الصورة

$$\frac{A_1x + B1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + ... + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2+bx+c)^m},$$

حيث A_i, Bi ثوابث وسوف يتم ايجاد قيمها.

مثال: احسب تكامل

$$\int \frac{4x^2 - 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}\, dx$$

الحل:
نلاحظ ان قوة البسط أقل من قوة المقام، وكذلك البسط ليس مشتقة المقام
من هنا يمكننا استخدام طريقة التفريق الي كسور جزئية لايجاد هذا التكامل،
حيث اننا نقوم بتحليل المقام كمايلي

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 3x &= x(x^2 + 2x - 3) \\ &= x(x^2 + 2x - 3) \\ &= x(x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

ثم بعملية التفريق الي كسور نحصل على

$$\frac{4x^2 - 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1} \quad (1)$$

الان بتوحيد المقامات

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1} = \frac{A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3)}{x(x + 3)(x - 1)} \quad (2)$$

الان يجب أن نوجد قيمة الثوابت A, B, C ويتم ذلك كمايلي
من (١) و (٢) نحصل على

$$\begin{aligned} 4x^2 - 13x - 9 &= A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3) \\ 4x^2 - 13x - 9 &= A(x^2 + 2x - 3) + B(x^2 - x) + C(x^2 + 3x) \\ 4x^2 - 13x - 9 &= Ax^2 + 2Ax - 3A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + 3Cx \\ 4x^2 - 13x - 9 &= (A + B + C)x^2 + (2A - B + 3C)x - 3A \end{aligned}$$

ومن هنا نحصل على المعاملات تتساوا بحيث أن

$$\begin{aligned} A + B + C &= 4 \\ 2A - B + 3C &= -13 \\ -3A &= -9 \end{aligned}$$

ومنها نجد أن

$$\begin{aligned} A &= 3 \\ 3 + B + C &= 4 \quad (3) \\ 6 - B + 3C &= -13 \quad (4) \end{aligned}$$

وبحل (٣) و (٤) نجد أن

$$
\begin{aligned}
A &= 3 \\
B &= 11/2 \qquad (5) \\
C &= -9/2 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

ألان يمكننا أنه من السهل أيجاد التكامل

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4x^2-13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,dx &= \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x+3}\,dx + \int \frac{C}{x-1}\,dx \\
&= 3\int \frac{3}{x}\,dx + \frac{11}{2}\int \frac{dx}{x+3} + \frac{-9}{2}\int \frac{dx}{x-1} \\
&= 3\ln|x| + \frac{11}{2}\ln|x+3| + \frac{-9}{2}\ln|x-1| + c
\end{aligned}
$$

مثال: احسب تكامل

$$\int \frac{1}{(x^2+4)(x-1)}\,dx$$

الحل:
نلاحظ ان قوة البسط أقل من قوة المقام، وكذلك نلاحظ أن

$$b^2-4ac=0-4(1)(4)=-16<0$$

اذا باستخدام الكسور الجزئية يمكننا كتابة الدالة $\frac{1}{(x^2+4)(x-1)}$ كمايلي

$$\frac{1}{(x^2+4)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x-1}$$

بتوحيد المقامات

$$\begin{aligned}\frac{Ax+B}{(x^2+4)}+\frac{C}{(x-1)} &= \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+4)}{(x^2+4)(x-1)}\\ &= \frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2+4C}{(x^2+4)(x-1)}\end{aligned}$$

الان نوجد قيم الثوابت A, B, C كما يلي

$$\begin{aligned}Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2+4C &= 1\\ x^2(A+C)+x(-A+B)+4C-B &= 1\end{aligned}$$

نحصل على

$$\begin{aligned}4C-B &= 1\\ A+C &= 0\\ B-A &= 0\end{aligned}$$

لان معاملات x^2 و x في الطرف الايمن تساوي 0، بعد حلها نجد أن

$$\begin{aligned}A &= \frac{-1}{5}\\ B &= \frac{-1}{5}\\ C &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

اذن نستطيع الان ايجاد التكامل

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+4)(x-1)}\, dx &= \int \frac{Ax+B}{x^2+4}\, dx + \int \frac{C}{x-1}\, dx \\
&= \frac{-1}{5}\int \frac{x+1}{x^2+4}\, dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1}\, dx \\
&= \frac{-1}{5}\int \frac{x}{x^2+4}\, dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^2+4}\, dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1}\, dx
\end{aligned}
$$

مثال: احسب تكامل

$$\int \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}\, dx$$

الحل:
نلاحظ ان قوة البسط أقل من قوة المقام

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 + 8x - 4 &= (2x^3 - x^2) + (8x - 4) \\ &= x^2(2x - 1) + 4(2x - 1) \\ &= (2x - 1)(x^2 + 4) \end{aligned}$$

ومنها نلاحظ أنه للمقدار $x^2 + 4$

$$b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(4) = -16 < 0$$

وبستخدام الكسور الجزئية المناسبة يمكننا كتابة الدالة $\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}$ **كمايلي**

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} &= \frac{x^2 - x - 21}{(2x - 1)(x^2 + 4)} \\ &= \frac{A}{2x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} \end{aligned}$$

تمرين: احسب التكامل

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}$$

٦.١ التعويضات الخاصة او المتفرقة Miscellaneous Substitutions :

في هذا القسم سوف نقوم بمعالجة التكاملات التي لا يمكن حلها بطرائق التكامل السابقة وذلك باستخدام تعويضات خاصة كالتالي :
الحالة الاولي:
التكاملات التي تحتوي علي قوي كسرية:

$$x^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{R}$$

في هذه الحالة نفرض $u = x^{\frac{1}{n}}$ هذا يقتضي ان : $u^n = x$ و n هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامات.
مثال : أوجد تكامل الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{1}{x(1+\sqrt{x})}\, dx.$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

الحالة الثانية :
التكاملات من الصورة

$$\int \frac{dx}{\sin ax + \cos bx + c}, \quad \int \frac{dx}{\tan x + \sin x}, \quad \int \frac{\cos x}{\sin x \pm \cos x} dx,$$
$$\int \frac{dx}{a \pm b \cos x}, \quad \int \frac{dx}{a \pm \sin x}.$$

نستخدم التعويض التالي

$$u = \tan(\frac{x}{2}) \qquad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

مثال : أوجد تكامل الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{1}{1-\sin x} dx$$

الحل:
يمكن حلها باستخدام التعويضات السابقة كما يلي:

$$u = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}, \qquad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

والان يمكن حل التكامل بسهولة كما يلي

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-\sin x} dx &= \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1 - \frac{2u}{1+u^2}} \\
&= \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1+u^2-2u}{1+u^2}} \\
&= \int \frac{2du}{1+u^2-2u} \\
&= \int \frac{2du}{(u-1)^2} \\
&= \frac{-2}{u-1} + c \\
&= \frac{-2}{\tan\frac{x}{2} - 1} + c
\end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{1}{1+\cos x} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\, dx.$$