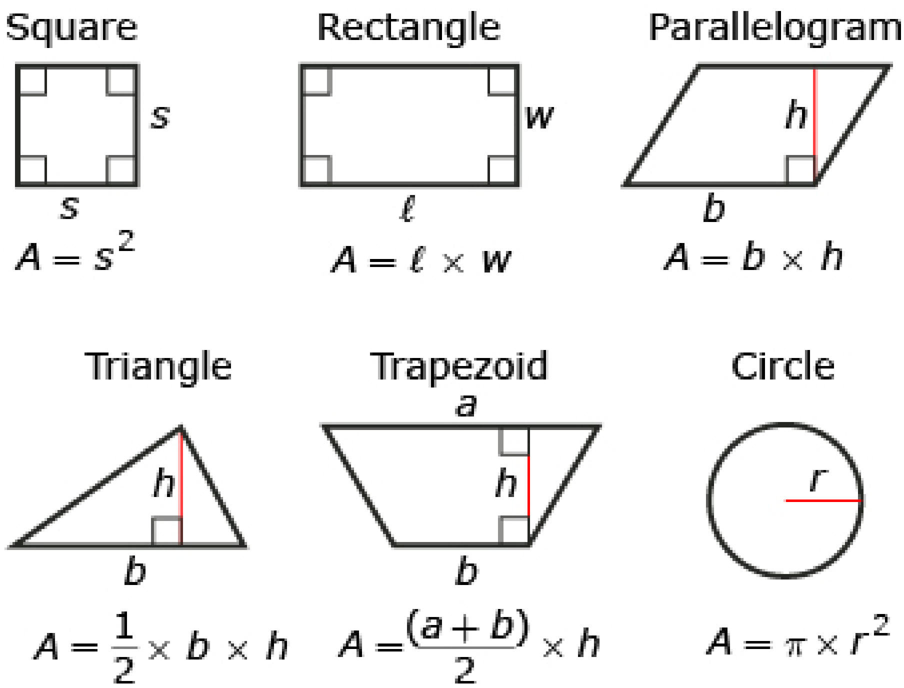
١ المساحة Area

المساحة هي دالة A مجالها يتكون من مجموعات جزئية من المستوى (بمعنى اخر هي قياس لمنطقة محصورة في نطاق معين على سطح)
الشكل التالي يعرض بعض الأمثلة للمساحات لبعض الاشكال.

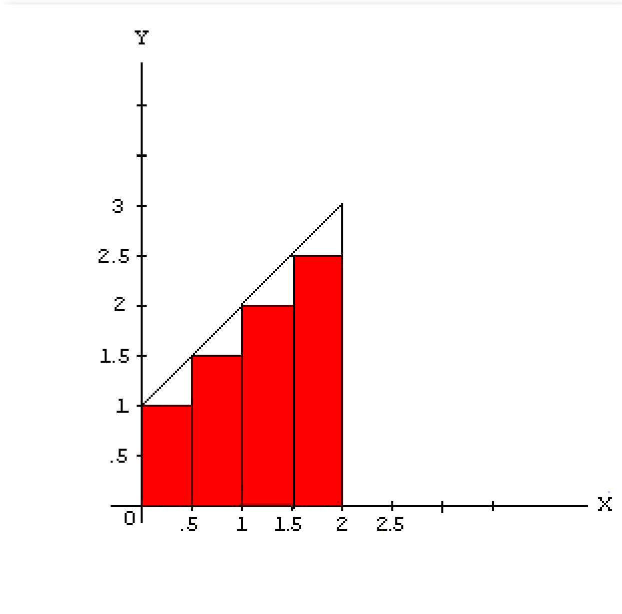


هنا نطرح السؤال:
كيف يمكننا معرفةالمساحة لمنطقة محصورة في نطاق ليس له قانون معروف او ليس مضلع؟؟ (المضلع : هو سطح مستو مغلق حدوده مجموعة خطوط مستقيمة).

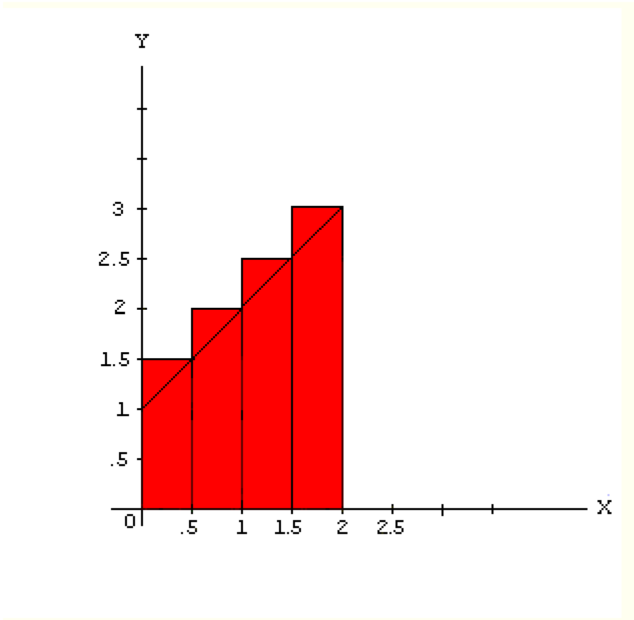
يمكن ايجاد المساحة لمنطقة تحت المنحنى بجمع مساحات المستطيلات بالنسبة لهذه المنطقة وذلك بعد تقسيم المنطقة المعنية بشكل مضلع يجعل الخطأ الناتج في المساحة يتلاشى و قد يساوي الصفر.

مثال: احسب المساحة المحصورة تحت الدالة $y = x + 1$ ومحور السينات على الفترة $[0,2]$

الحل: نقسم الفترة الي اربع اجزاء



$$A_1 = (.5)(1) + (.5)(1.5) + (.5)(2) + (.5)(2.5) = .5 + .75 + 1 + 1.25 = 3.5$$



$$A_2 = (.5)(1.5) + (.5)(2) + (.5)(2.5) + (.5)(3) = .75 + 1 + 1.25 + 1.5 = 4.5$$

بالتالي نخلص الي أن المساحة $3.5 < A < 4.5$ نلاحظ هنا انه توجد بعض المناطق التي لاتدخل ضمن المساحة الحقيقية للشكل على الفترة المعطاة $[0,2]$ ، اي انه توجد نسبة خطأ. وبالتالي نستنتج انه اذا قسمنا الفترة في المثال

السابق اي فترات جزئية اكثر يمكن ان نقلل نسبة الخطأ الناتج حتي يقترب او يكون مساويا للصفر. (انظر مثال (١-١) بالكتاب).
فلو فرضنا ان n هو عدد الاجزاء المتساوية للفترة فاننا نستنتج انه المساحة A هي نهاية عندما $n \to \infty$ لمجاميع من الشكل $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ حيث $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ هو طول الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$.

سوف نتعرف الان على بعض الخواص والحقائق لعملية الجمع وذلك ليسهل علينا فهم الاجراءات المتعلقة بإيجاد المساحة تحت منحنى ما

خواص الجمع:
ليكن لدينا مجموعة الارقام $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. فان مجموع هذي الارقام يرمز له بالرمز

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

حقائق:
لاي عددين صحيحين m, n وعدد ثابت c وكان $n > m$. فان:

- $$\sum_{k=1}^{n} c = nc,$$

- $$\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c,$$

- $$\sum_{k=1}^{n} cx_k = c \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

- $$\sum_{k=1}^{n} (x_k \pm y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \pm \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

نظرية (مهمة):

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

مثال: أحسب

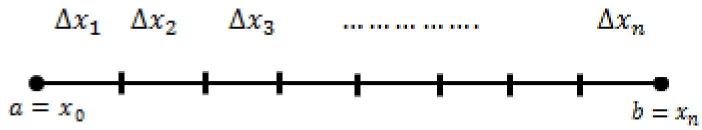
- $\sum_{k=1}^{7} 6$
- $\sum_{k=1}^{100} k$
- $\sum_{k=1}^{12} k^2$
- **اذا كان** $\alpha = 4$
  $\sum_{k=1}^{3}(k+\alpha)$

مجموع ريمان:

تعريف:

(أ) المجموعة $P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}$ **تسمى تجزيئا للفترة المغلقة** $[a,b]$ **اذا كان:**

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b$$



$$\Delta x_1=x_1-x_0$$
$$\Delta x_2=x_2-x_1...$$
$$\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$$

وتسمى الفترة $[x_{i-1},x_i]$ **بالفترة الجزئية من الرتبة** i**، بحيث أن طول الفترة الجزئية** $[x_{i-1},x_i]$ **هو** $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$

(ب) P **يسمى بمقياس التجزئ ويرمز له بالرمز** $||P||$ **حيث:**

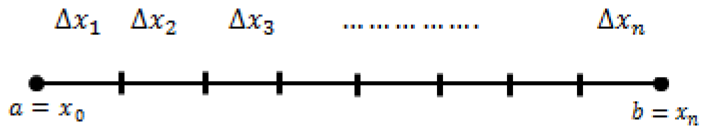
$$||P||=max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3,...,\Delta x_n\}$$

حيث $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ **لكل** $i=1,2,...,n$

أي أن مقياس التجزئ P **هو طول أطول فترة جزئية.**

(ج) يسمى التجزئ P **منتظما إذا كان:**

$$\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=...=\Delta x_n$$



نلاحظ انه في حالة التجزئ المنتظم لعدد n **من الاجزاء للفترة** $[a,b]$ **يكون**

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$$
$$x_0=a,\ x_n=b$$
$$x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}$$

ومن هنا يمكننا ان نحصل على مقياس التجزئ $||P||$ للفترة $[a,b]$ من

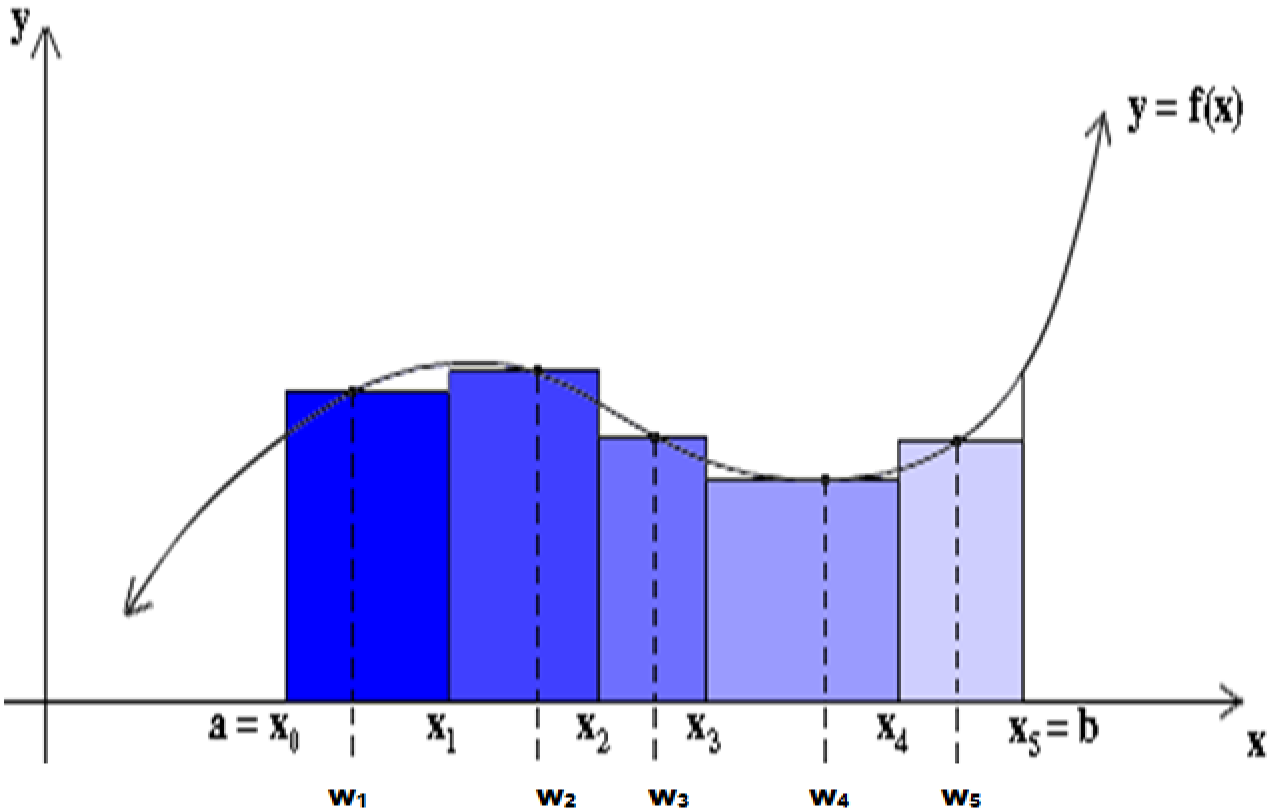
$$||P|| = \frac{b-a}{n}$$

ونستنتج انه $||P|| \to 0$ عندما $n \to \infty$
انظر مثال (١-٢) ، (١-٣) بالكتاب

تعريف:
ليكن $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ **تجزيئا للفترة** $[a, b]$ **ولتكن** w **علامة على التجزئ** P. **فالبتالي يرمز لمجموع ريمان للدالة** f **على التجزئ** P **بالعلامة** w **بالرمز** $S(f, P, w)$ **ويعرف كمايلي:**

$$S(f, P, w) = \sum_{i=1}^{n} f(w_i) \Delta x_i$$

ملاحظة: يمكن القول أن مجموع ريمان هو طريقة للحصول على المساحة التقريبية المحصورة بن منحنى ما ومحور السينات. وكما هو موضح بالشكل التالي ان مجموع ريمان هو عبارة عن مساحة مضلع يقرب المساحة تحت بيان f **اذا كان** $f \geq 0$



مثال: ليكن $P = \{1, 2, 3, 4\}$ هو التجزئ المنتظم الي اربعة اجزاء للفترة $[1, 4]$ ولتكن $w = (1, 2, 3)$ للدالة $f(x) = y = 2x + 1$. أوجد مجموع ريمان لهذه الدالة.
الحل:
نلاحظ ان التجزئ P منتظم للفترة $[1, 4]$ ، بحيث

$$a = x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4 = b$$

لدينا عدد الفترات المجزئة للفترة هنا $n = 3$ وبما ان التجزئ منتظم فأن طول الفترات Δx متساوية وهنا

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{4-1}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f, P, w) &= \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i \\ &= f(w_1)\Delta x_1 + f(w_2)\Delta x_2 + f(w_3)\Delta x_3 \\ &= (3)(1) + (5)(1) + (7)(1) \\ &= 15 \end{aligned}$$

تمرين: حل المثال السابق اذا كان لدينا

$$w_1 = 1.5, w_2 = 2.5, w_3 = 3.5$$