جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار النهائي في المقرر ٣٤٣ ريض
الفصل الدراسي الأول ١٤٢٩/١٤٣٠ هـ
الزمن : ثلاث ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

إذا كانت $g = (g_1, g_2, g_3) \in G = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^{*} \times S_{12}$ ، حيث :

$g_1 = 2$ ، $g_2 = 5$ وَ $g_3 = \sigma = (1,,2,3,4,5,6)(6,5,4,3)(7,9,11,12)(8,10)$

فأجب عما يلي :-

(أ) املأ الفراغات الآتية :-

$1)|g_1| = \cdots$
$6)g^{-1} = \cdots$
$11)$

(ب) أثبت صحة أوْ خطأ كل عبارة فيما يأتي :

١) يوجد تشاكل $\varphi : S_{12} \to S_{12}$ ، حيث $\varphi(\alpha) = \alpha^{-1}$.
٢) لا يوجد $\mu \in S_{12}$ ، حيث $|\mu| = 52$.
٣) توجد زمرة جزئية في G رتبتها 125 .
٤) إن $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^{*} \cong \mathbb{Z}_{80}$.

السؤال الثاني :

(أ) إذا عرفنا التماثل " $\cong$ " على مجموعة من الزمر M فأثبت أنها علاقة تكافؤ في M .

(ب) إذا عرفنا العلاقة " $\cong$ " على L ، حيث :

$L = \{G :$ زمرة رتبتها G $12\}$، فجد ممثلات أصناف التكافؤ في L .

(جـ) أثبت أن $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$ ، وذلك بتوظيف العبارة : " أي زمرتين دائريتين منتهيتين ولهما الرتبة نفسها فهما متماثلتان " .

السؤال الثالث :

(أ) لتكن $\sigma_i \in G = S_4$ هي ممثلات أصناف الترافق في G . أجب عما يأتي :

١) أكمل الفراغات :

$$\sigma_1 = (1)\,, \sigma_2 = (1,2)\,, \sigma_3 = (\ldots)\,, \sigma_4 = (\ldots)\,, \sigma_5 = (1,2,3,4)$$

٢) عيّن جميع القيم $|N_G(\sigma_i)|$ ومن ثم اكتب معادلة الفصل للزمرة G .

(ب) إذا كانت G زمرة بسيطة رتبتها 168 فأثبت أن G لا تملك زمرة جزئية H رتبتها 28 .

(جـ) وظف فقرة (ب) في اثبات أن " عكس مبرهنة لاغرانج غير صحيحة " .

السؤال الرابع :

(أ) متى نقول إن الزمرة G تؤثر على مجموعة S (${}^{G}|_{S}$) ؟

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت S زمر سيلو الجزئية من النوع P في G فأثبت أن :

١) ${}^{G}|_{S}$ بالترافق
٢) $|S| = s_p \,\big|\, |G|$

(جـ) أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها 36 .

جامعة الملك سعود	الاختبار الفصلي الثاني في المقرر ٣٤٣ ريض
كلية العلوم	الفصل الدراسي الأول ١٤٢٩/١٤٣٠ هـ
قسم الرياضيات	الزمن : ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) عرف كلاً من الرمزين كمجموعة : $Aut(G)$, $\mathcal{I}(G)$.

(ب) إذا كانت G زمرة إبدالية وفيها عنصر x ليس نظيراً لنفسه وعرفنا التطبيق $T : G \to G$ كما يلي :
$g\,T = g^{-1}$ **فأثبت أن :**
١) $T \in Aut(G)$.
٢) $|Aut(G)| > 1$.

السؤال الثاني :

لتكن $G \,|_{S}$ **وَ** $K \leq G$ **، حيث :**

$G = \mathbb{A}_4 = \{(1), (1,$

و K مكونة من العناصر الأربعة الأولى في G .

أجب عما يأتي :-

(أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :
١) يوجد $\sigma \in G$ **و** $\tau \in K$ بحيث $\sigma^{-1}\,\tau\,\sigma \notin K$.
٢) إذا كان $\varphi \in K$ **فإن** $N(\varphi) = K$ (ممركز φ في K أوْ منظم φ في K) .
٣) إذا كانت $\mu = (1,2,3)$ **فيوجد** $\propto \in G$ **بحيث :** $\propto^{-1}\mu \propto = (1,3,2)$.

(ب) أكمل عناصر G .

(ج) املأ الفراغات فيما يأتي :

1) 4 مدار $= 4G = \{\dots \mid \dots\} = \{\dots\} \Rightarrow |4G| = \cdots$
2) $G_4 = \{\dots \mid \dots\} = \{\dots\} \Rightarrow |G_4| = \cdots$
3) $\sigma = (1,2,3) \in G \Rightarrow S_\sigma = \{\dots \mid \dots\} = \{\dots\} \Rightarrow |S_\sigma| = \cdots$
4) $x = 4 \Rightarrow [G :\ G_4] = \cdots$

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار الفصلي الأول في المقرر ٣٤٣ ريض
الفصل الدراسي الأول ١٤٣٠/١٤٢٩ هـ
الزمن : ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) متى نقول إن $H \trianglelefteq G$ ؟

(ب) إذا كانت $A, B \trianglelefteq G$ فأثبت أن $AB \trianglelefteq G$ إذا علمت أن : $AB \leq G$

السؤال الثاني :

لتكن $G = GL(2, \mathbb{Z}_P)$ وليكن $\varphi : G \to \mathbb{Z}_P^*$ **تطبيقاً ، حيث $\varphi(A) = det\, A = |A|$**

أجب عما يلي :

(أ) أثبت أن φ تشاكل .

(ب) أكمل الفراغات الآتية :

1) $\mathbb{Z}_P^* = \cdots$
2) $(G, \cdot) = (\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \ldots\ldots\ldots..$
3) φ نواة $= K_\varphi = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\}$

(ج) بفرض أن $P = 3$ وَ $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in G$ **املأ الفراغات :**

١) $\mathbb{Z}_3 = \cdots$
٢) $|\langle M \rangle| = \cdots$

السؤال الثالث :

أثبت صحة أوْ خطأ كل مما يلي :

(أ) يوجد عنصران مختلفان في G كل منهما نظير نفسه ، حيث $|G| > 1$.

(ب) توجد زمرة G وَ $H, K \leq G$ بحيث :

$$|G| = 24 \text{ وَ } |H| = 6 \text{ وَ } |K| = 8 \text{ وَ } |H \cap K| = 3$$

إجابة السؤال الأول :

(أ) :

$1)|g_1| = 4 \quad 2)$

$6)g^{-1} = (6, 9,$

$8)\langle$

قات $12)\sigma$

(ب) :

١) **خطأ لأنه :**

$\forall \propto, \beta \in S_{12} : \varphi(\propto \beta) = (\propto \beta)^{-1} = \beta^{-1} \propto^{-1} \neq \varphi(\propto)\varphi(\beta)$.

٢) **صائب ، لأن :**

$|\mu| = 52 = 4 \cdot 13 \nmid |S_{12}| = (12)!$.

٣) **صائب ، لأن :**

$125 = 5^3 \big| |G|$ **وهي زمرة سيلو من النوع** 5 .

٤) **عبارة خاطئة ، لأن :**

$\mathbb{Z}_{80}$ زمر دائرية في حين أن $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^*$ ليست دائرية .

إجابة السؤال الثاني :

(أ) :

بفرض $M = \{G :$ زمرة $G\}$ **وتعريف "** $\cong$ **" على** M **نجد أن :**

١) $\cong$ **انعكاسية لأن :** $G \cong G \Leftrightarrow \exists\, G \xrightarrow{I} G : \forall\, G \in M$

٢) $\cong$ **تناظرية لأن :** $G_1, G_2 \in M \ni G_1 \cong G_2 \Rightarrow \exists G_1 \xrightarrow{\text{تماثل}\ \varphi} G_2 \Rightarrow \exists G_2 \xrightarrow{\text{تماثل}\ \varphi^{-1}} G_1 \Rightarrow G_2 \cong G_1$

٣) $\cong$ **متعدية لأن :**

$G_1, G_2, G_3 \in M \ni G_1$

ومن (١) و (٢) و (٣) تكون " $\cong$ **" علاقة تكافؤ في** M

(ب) :

$L = \{G : |G| = 12\}$ **و** $\cong$ **معرفة على** L **فهي إذن علاقة تكافؤ في** L

وتكون ممثلات أصناف التكافؤ هي :

١) $\mathbb{Z}_{12}$ ٢) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ ٣) D_6 ٤) $\mathbb{A}_4$

٥) $T = \langle x, y : x^3 = y^4 = e \ \wedge \ y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$

(ج) : بما أن $\langle (1 + n\mathbb{Z}) \rangle \cong \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ ، **حيث** $|(1 + n\mathbb{Z})| = n$ فإنها تماثل $\mathbb{Z}_n$.

إجابة السؤال الثالث :

(أ) :

١) $\sigma_3 = (1,2)(3,4)\,,\sigma_4 = (1,2,3)$

٢) $|N_G(\sigma_1)| = |G|\,, |N_G(\sigma_2)| = 4\,\,, |N_G(\sigma_3)| = 8\,, |N_G(\sigma_4)| = 3\,, |N_G(\sigma_5)| = 4$

مما سبق نجد أن معادلة الفصل لـ G هي :

$\sum_{i=1}^{5}$

(ب) : بفرض أن $H < G$ بحيث $|H| = 28$ فإن :

$H < G \Rightarrow \exists\, S =$

ولما كانت $|G| \nmid 6!$ فإنه باستخدام اختبار الدليل نجد أن G تملك زمرة جزئية فعلية ناظمية غير تافهة محتواة في H .
وهذا تناقض مع المعطيات لا مخرج منه إلا بالتسليم بأن G لا تملك زمرة جزئية H رتبتها 28 .

(ج) إن عكس مبرهنة لاغرانج غير صحيح ، لأنه من الفقرة (ب) $28 \,|\, |G|$ في حين لا توجد زمرة جزئية في G رتبتها 28.

إجابة السؤال الرابع :

(أ) : تطبيق $G\big|_S \Leftrightarrow \exists\, * : S \times G \to S$ بحيث :

1) $xe = x, \forall x \in S \wedge e \in G$

2) $x(gh) = (xg)h, \forall\, x \in S \quad \wedge \quad g, h \in G$

(ب) :

١) $G\big|_S$ بالترافق ، حيث : $(H, g) *= H * g = g^{-1}Hg$ لأن :

1) $He = e^{-1}He = H, \forall\, H \in S \quad \wedge \quad e \in G$

2) $H(g_1g_2) = (g_1g_2)^{-1}H(g_1g_2) = g_2^{-1}(g_1^{-1}Hg_1)g_2 = g_2^{-1}(Hg_1)g_2$
$= (Hg_1)g_2\,, \forall\, H \in S \,\wedge\, g_1\,, g_2 \in G$

٢) إذا كانت $G\big|_S$ بالترافق فمن مبرهنة سيلو الثانية تكون جميع زمر سيلو الجزئية من النوع P مترافقة في G وهذا يعني وجود مدار واحد فقط تحت تأثير G على S ، أي أنه :

$H \in S \Rightarrow H$ طول مدار $= \ |S| = s_P = [G :\ G_H] = [G :\ N_G(H)]$ (مبرهنة)

$\Rightarrow |S| = s_P \,|\, |G|$ —— مبرهنة لاغرانج

(ج) : $|G| = 36 = 2^2 \cdot 3^2$

من مبرهنة سيلو الأولى توجد زمرة سيلو جزئية H في G من النوع 3 رتبتها 9

$H < G \ni |H| = 9$

ولما كانت $24 \nmid |G| = 36$. فمن مبرهنة "اختبار الدليل" توجد زمرة جزئية فعلية ناظمية غير تافهة في G ومحتواة في H وعليه تكون G غير بسيطة .

إجابة أسئلة الاختبار الفصلي الثاني في المقرر ٣٤٣ ريض – الفصل الأول ٢٩ / ١٤٣٠ هـ

إجابة السؤال الأول :

(أ) : $\mathcal{J}(G) = \{T_g \in Aut(G) : g \in G\}$, $Aut\ (G) = \left\{T : G \xrightarrow[]{T\ \text{تماثل}} G\right\}$

(ب) :

١) إن $T \in Aut(G)$ ، لأن :

y

إذن T غامر

إذن T متباين

لأن G إبدالية — $\forall\ x , y \in G : x\ y\ T = (xy)^{-1} = y^{-1}\ x^{-1} = x^{-1}\ y^{-1} = x\ T\ y\ T$

إذن T تشاكل .

مما سبق نجد أن $T \in Aut(G)$.

٢) **بما أنه يوجد** $x \in G$ **بحيث** $x^{-1} \neq \text{x}$ **فإن :**

إجابة السؤال الثاني :

لتكن G تؤثر على S و G و $K \leq G$ ، حيث $G = \mathbb{A}_4$ و$S = \{1,2,3,4\}$ و عناصر K هي (1) و (1,2)(3,4) ومرافقاتها .

(أ) :

١) **عبارة خاطئة ، لأن $K \lhd G$ ، ولذا فإن $\sigma^{-1}\tau\ \sigma \in K$ لكل $\sigma \in G$ و $\tau \in K$.**

٢) **عبارة صائبة ، لأن K زمرة إبدالية ، لذا فإن $N_K(\varphi) = K$ لكل $\varphi \in K$.**

٣) **عبارة خاطئة ’ لأن $(1,3,2) = \propto^{-1}(1,2,3) \propto$ لا يتحقق إلا إذا كان التفريق الدوري للعنصر $\propto$ هو $\{1,1,2\}$ وهذا يعني أن $\propto \notin G$.**

(ب) : (2,3,4) , (2,4,3) , (1,4,3) .

(ج) :

1) 4 مدار $= 4G = \{4\sigma | \sigma \in G\} = \{1,2,3,4\} \Rightarrow |4G| = 4$
2) $G_4 = \{\sigma \in G | 4\sigma = 4\} = \{(1),(1,2,3),(1,3,2)\} \Rightarrow |G_4| = 3$
3) $\sigma = (1,2,3) \in G \Rightarrow S_\sigma = \{x \in S | x\ \sigma = x\} = \{4\} \Rightarrow |S_\sigma| = 1$
4) $x = 4 \Rightarrow [G :\ G_4] = \frac{12}{3} = 4$

إجابة السؤال الأول :

(أ) : نقول إن $H \trianglelefteq G$ إذا كانت $H \leq G$ تحقق الشرط :

(ب) : لنبرهن أن :

كما يلي :

$$\forall\, g \in G \ \wedge\ ab \in AB:\ g^{-1}abg = g^{-1}aebg \qquad (\text{خاصة } e)$$
$$= g^{-1}agg^{-1}bg \qquad (\text{لأن } e = gg^{-1})$$
$$= (g^{-1}ag)(g^{-1}bg) \qquad (\text{خاصة التجميع})$$

ولما كانت كل من A و B ناظمية في G فإن $g^{-1}ag \in A$ و $g^{-1}bg \in B$

ومنه نستنتج أن $(g^{-1}ag)(g^{-1}bg) \in AB$.

لذا فإن $AB \trianglelefteq G$.

إجابة السؤال الثاني :

ليكن $\varphi : (G = GL(2, \mathbb{Z}_P)) \to \mathbb{Z}_P^*$ تطبيقاً ، حيث $\varphi(A) = det\, A$.

(أ) : φ تشاكل ، لأنه

(ب) :

4) $\mathbb{Z}_P^* = \{1, 2, 3, \dots, P-1\}$

5) $(G, \cdot) = \left(\left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_P \wedge det\, A \neq 0\right\}, \ \cdot\right)$

6) نواة $\varphi = K_\varphi = \left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G :\ \varphi(A) = det\, A = 1\right\}$

(ج) :

٣) $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

٤) $|\langle M \rangle| = 2$

إجابة السؤال الثالث :

(أ) : عبارة خاطئة ، فمثلاً عندما $G = \mathbb{Z}_5$ فلا يوجد فيها أي عنصرين مختلفين بحيث يكون كل منهما نظير نفسه .

(ب) : عبارة خاطئة ، لأن $H \cap K \leq K$ لذا فيجب أن يكون $|H \cap K| \,\big|\, |K|$ ولكن $|K| = 8$ ، $|H \cap K| = 3$.
