

Hyperbolic functions

الدوال الزائدية

Math 111

Lecture 10

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

تعريف :

تعرف دالة الجيب الزائدي والتي يرمز لها بالرمز \sinh كما يلي

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

تعرف دالة جيب التمام الزائدي والتي يرمز لها بالرمز \cosh كما يلي

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ملحوظات:

- مدى الدالة \sinh هو \mathbb{R} و مدى الدالة \cosh هو $[1, \infty)$.
- الدالة \sinh دالة فردية بينما \cosh دالة زوجية.

$$y = \cosh x,$$

$$y = \sinh x$$

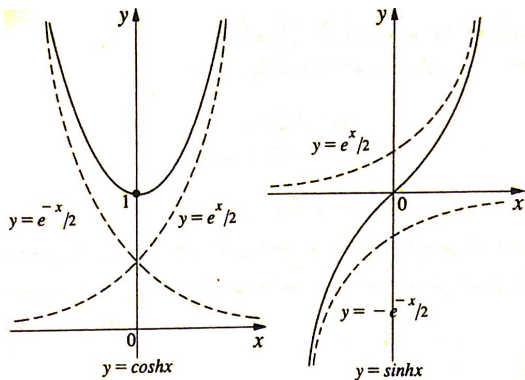


Figure:

مبرهنة:

$$(1) \cosh x + \sinh x = e^x, \quad (2) \cosh x - \sinh x = e^{-x}.$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

البرهان:

$$(\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x e^{-x} = e^0 = 1.$$

خصائص الدوال الزائدية :
مبرهنة :

- $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$
- $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$
- $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y,$
- $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y,$
- $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x,$
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2 \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1.$

مبرهنة:

- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$
- $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \neq 0,$
- $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$
- $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \neq 0.$

بيان الدالة

$$y = \coth x,$$

$$y = \tanh x$$

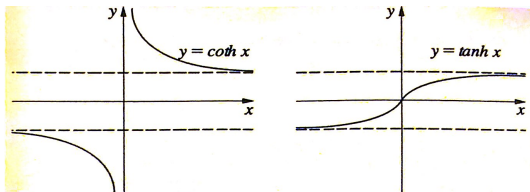


Figure:

بيان الدالة

$$y = \operatorname{csch} x,$$

$$y = \operatorname{sech} x$$

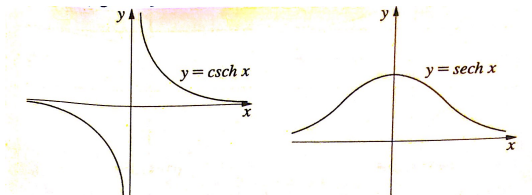


Figure:

مبرهنة :

- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x,$
- $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x,$
- $\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y},$
- $\tanh(x - y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y},$
- $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$

Thanks for listening.