جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم - قسم الرياضيات	**مجموعة تمارين (5) 487 ريض** **الفصل الصيفي 1437-1438 هـ**

السؤال الأول:

أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ على الطوق $1<|z|<2$ ثم استنتج قيمة التكامل

$\displaystyle\oint_{|z|=3/2} f(z)\,dz$.

السؤال الثاني:

أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{z}{z^2+z-2}$ على الطوق :

(أ) $0<|z-1|<3$.

(ب) $1<|z|<2$.

السؤال الثالث :

صنف النقاط الشاذة في ($\mathbb{C}$) للدوال التالية ثم احسب رواسبها:

(أ) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z\left(z^2-4\right)}$

(ب) $g(z)=\dfrac{z^n}{z^m-1}$ حيث $n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}^*$

(ج) $h(z)=\dfrac{\cos z}{z^2\left(z^2+1\right)}$

(د) $k(z)=\dfrac{1}{\sin z}$.

السؤال الرابع :

استخدم نظرية الرواسب (معللا كل خطوات الحل) لاثبات أن :

(أ) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ لكل $-1<a<1$.

(ب) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(ج) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx = \frac{\pi}{e^3}$.

(د) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ab}$ حيث $a>0$ و $b>0$.

(هـ) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$.

(و) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ حيث $0<\alpha<1$.
