جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم - قسم الرياضيات	مجموعة تمارين (4) 487 ريض الفصل الصيفي 1437-1438 هـ

السؤال الأول: ليكن γ مسار بسيط مغلق موجه في الاتجاه الموجب و $a,b \in \mathbb{C}$ عددين مركبين مختلفين داخل γ . لتكن f دالة كلية (تحليلية على $\mathbb{C}$).

أ) احسب قيمة التكامل : $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$.

ب) استنتج قيمة التكامل: $\oint_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)}$.

ج) نفترض الآن أن الدالة f محدودة على $\mathbb{C}$, باستخدام ب) بيَن أن f هي دالة ثابتة.

السؤال الثاني :

لتكن $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ دالة تحليلية على القرص $D(0,r)=\{z\in\mathbb{C}/|z|<r\}$ حيث $r>1$. باستعمال التكامل $I=\oint_{|z|=r}\left(\frac{1}{z^2}+1+\frac{2}{z}\right)f(z)\,dz$ احسب التكامل التالي بدلالة $f(0)$ و $f'(0)$

$.J=\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$

السؤال الثالث :

(1) لتكن f دالة تحليلية على القرص الوحدة المغلق $|z|\le 1$ بحيث $|f(z)|=1$ على دائرة الوحدة $|z|=1$ و f لا تقبل أصفارا داخل القرص الوحدة المغلق $|z|\le 1$. بيَن أن f هي دالة ثابتة على القرص الوحدة المغلق $|z|\le 1$.

(2) لتكن $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ دالة كلية و لنفترض أنه يوجد عددين حقيقيين موجبين A,B بحيث لكل $z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|\le A(1+|z|)^B$. بيَن أن f هي كثيرة حدود من درجة $\le [B]$.

السؤال الرابع :

(1) لتكن f دالة تحليلية على نطاق (مفتوح و مترابط) محدود $\Omega \subset \mathbb{C}$, متصلة على المغلق $\overline{\Omega}$, غير ثابتة , بحيث $|f|=cst$ على الحافة $b\Omega$. فاثبت أن f لها صفر داخل Ω .

(2) لتكن f دالة تحليلية على نطاق (مفتوح و مترابط) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ يحتوي على القرص المغلق $\overline{D(z_0,r)}$ بحيث $f(z) \in \mathbb{R}$ لكل z على الدائرة $|z-z_0|=r$. اثبت أن f هي دالة ثابتة على Ω.

__إرشاد__ : ادرس الدالة e^{if}.

السؤال الخامس: إذا كانت $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دالة تحليلية على القرص الوحدة المفتوح $D=\{z \in \mathbb{C}, |z|<1\}$ و لكل $z \in D$, $|f(z)| \le \dfrac{1}{1-|z|}$.

أ) أثبت أن : لكل $0<R<1$ ولكل $n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(0)| \le \dfrac{n!}{R^n(1-R)}$.

ب) بيَن أن الحد العلوي يكون أصغر ما يمكن عندما تكون $R=\dfrac{n}{n+1}$.

ج) استنتج أن : لكل $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le (1+\frac{1}{n})^n(n+1) < e(n+1)$.

السؤال السادس :

(1) أوجد القيمة العظمى للمقياس $|z^2+3z-1|$ على القرص الوحدة المغلق $|z| \le 1$.

(2) أوجد القيمة الصغرى للمقياس $\left|\dfrac{e^z}{z}\right|$ على الطوق المغلق $\dfrac{1}{2} \le |z| \le 1$.
