مجموعة تمارين (3) 487 ريض الفصل الصيفي 1437-1438 هـ	كلية العلوم - قسم الرياضيات	جامعة الملك سعود King Saud University

السؤال الأوّل (6 درجات) : ليكن Γ المسار الممثل وسيطيا كما يلي :

$$z(t)=\begin{cases} t \quad ; \ 0\le t\le 1 \\ e^{\frac{3\pi}{2}i(t-1)} \ ; \ 1\le t\le 2 \\ i(t-3) \ ; \ 2\le t\le 3 \end{cases}$$

1) ارسم هذا المسار موضحا التوجيه.

2) أوجد طول هذا المسار (يمكن حسابه دون اللجوء إلى التكامل).

3) احسب التكامل التالي على Γ : $I=\int_\Gamma y \ dz$ حيث $z=x+iy$. هل هذه النتيجة تتناقض مع نظرية كوشي.

السؤال الثاني (5 درجات): استنتج صيغة واليس ($Wallis\text{'s } formula$) :

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta \ d\theta=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}2\pi.$$ وذلك بمكاملة $f(z)=\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}$ على $|z|=1$.

السؤال الثالث (4 درجات): لنفترض أن $P(z)$ كثيرة حدود ليس لها جذور على مسار مغلق موجب موجه. أثبت أن عدد جذور P (بحساب التكرر) التي تقع داخل Γ يعطى بواسطة التكامل : $\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{P'(z)}{P(z)}dz$.

إرشاد : بَين أولا أن : $\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k}$ حيث $z_1,\dots,z_n$ هي كل جذور P دونت طبقا للتكرار.

السؤال الرابع (6 درجات):

احسب التكاملات $\int \bar{z}\ dz$, $\int \Im m(z)\ dz$, $\int \Re e(z)\ dz$ على المسارات التالية :

1) قطعة الخط المستقيم من 0 إلى $1-i$.

2) الدائرة $|z-a|=R$.

السؤال الخامس (8 درجات)

1) أثبت أن: لكل $0<r<R$ ، $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}d\theta=\Re e\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{R+z}{R-z}\frac{dz}{z}\right)$.

2) بيَن أن : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\ d\theta=1$.

3) استنتج قيمة التكامل: $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$ لكل $a\neq\pm1$.

السؤال السادس (8 درجات)

1) ارسم المسارالمغلق $\Gamma_{r,R}$ الموجه في الاتجاه الموجب حيث $0<r<R$ المعطى بالتمثيل الوسيطي:

$$z(t)=\begin{cases} t, & t\in[r,R] \\ \mathrm{R}e^{it}, & t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ +it, & t\in[r,R] \\ re^{it}, & t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

2) بين أن: لكل $0<t<\pi/4$ لدينا: $\sin 2t\geq\frac{4t}{\pi}$.

3) بمكاملة $\frac{e^{iz^2}}{z}$ على المسار $\Gamma_{r,R}$ ، استنتج أن: $\int_0^{\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}\ dx=\frac{\pi}{4}$.
