مجموعة تمارين عدد (1) 487 ريض

الفصل الصيفي 1437 – 1438 هـ

تمرين 1 :

أوجد حلول المعدلات التالية:

1. $z^3 = 1 + i$،
2. $z^6 = 64$
3. $z^3 = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

تمرين 2 :

أوجد مقياس و زاوية الأعداد المركبة التالية:

$$1 - e^{i\theta}, \quad 1 + e^{i\theta} \quad e^{i\theta} - e^{i\varphi}, \quad \theta, \varphi \in \mathbb{R}.$$

تمرين 3 :

أوجد قيمة

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

تمرين 4 :

ليكن $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. أحسب u^2 و u^4.
2. أوجد مقياس و زاوية للعدد u^4.
3. استنتج مقياس و زاوية للعدد u.

تمرين 5 :

1. أوجد جذر تربيعي للعدد $-3-4i$.

2. لتكن المعادلة التالية

$$z^3 - 2z^2 + iz + 3 + i = 0. \qquad (1)$$

أوجد حل حقيقي للمعادلة (1) و أوجد حلول هذه المعادلة.

تمرين 6 :

1. أوجد الصيغة الأسية للعدد $1 + i\sqrt{3}$ و العدد $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$.
2. برر لماذا $\alpha_n = (1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$ هو عدد حقيقي لكل $n \in \mathbb{N}$.
3. أثبت أن α_n هو عدد طبيعي.
4. أوجد حلول المعادلة التالية

$$z^n = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

5. أوجد حلول المعادلة التالية

$$(z - i)^n(1 - i\sqrt{3}) = (i + z)^n(1 + i\sqrt{3}). \qquad (3)$$

حل التمرين 1:

1. $(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+2\mathrm{i}k\pi)}$، $k \in \mathbb{Z}$. الجذور هي

$$2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}, \quad 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}, 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{17\mathrm{i}\pi}{12}}.$$

2. $64^{\frac{1}{6}} = 2e^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{3}}$، $k \in \mathbb{Z}$. الجذور هي

$$2, \quad -2, \quad 2e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}, \quad 2e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}, \quad 2e^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}, \quad 2e^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{3}}.$$

3. $$\frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}{2e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{12}} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{(24k-1)\mathrm{i}\pi}{12}}.$$

الحلول هي $2^{-\frac{1}{6}}e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{36}}$, $2^{-\frac{1}{6}}e^{\frac{23\mathrm{i}\pi}{36}}$ و $2^{-\frac{1}{6}}e^{\frac{47\mathrm{i}\pi}{36}}$.

حل التمرين 2:

1. $1 - e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) = -2\mathrm{i}\sin(\frac{\theta}{2})e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} = 2\sin(\frac{\theta}{2})e^{\mathrm{i}\frac{\theta-\pi}{2}}$. مقياس العدد $1 - e^{\mathrm{i}\theta}$ هو $2|\sin(\frac{\theta}{2})|$.
زاوية للعدد $1 - e^{\mathrm{i}\theta}$ هي $\dfrac{\theta-\pi}{2}$ إذا كان $\sin(\frac{\theta}{2}) \geq 0$ و $\dfrac{\theta+\pi}{2}$ إذا كان $\sin(\frac{\theta}{2}) \leq 0$.

2. $1 + e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} + e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$. مقياس للعدد $1 + e^{\mathrm{i}\theta}$ هو $2|\cos(\frac{\theta}{2})|$.
زاوية للعدد $1 + e^{\mathrm{i}\theta}$ هي $\dfrac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos(\frac{\theta}{2}) \geq 0$ و $\dfrac{\theta+2\pi}{2}$ إذا كان $\cos(\frac{\theta}{2}) \leq 0$.

$$e^{\mathrm{i}\theta} - e^{\mathrm{i}\varphi} = e^{\mathrm{i}\frac{\theta+\varphi}{2}}(e^{\mathrm{i}\frac{\theta-\varphi}{2}} - e^{-\mathrm{i}\frac{\theta-\varphi}{2}}) = 2\mathrm{i}\sin(\frac{\theta-\varphi}{2})e^{\mathrm{i}\frac{\theta+\varphi}{2}}.$$

مقياس للعدد $e^{\mathrm{i}\theta} - e^{\mathrm{i}\varphi}$ هو $2|\sin(\frac{\theta-\varphi}{2})|$ و $\dfrac{\theta-\varphi+\pi}{2}$ هي زاوية للعدد $e^{\mathrm{i}\theta} - e^{\mathrm{i}\varphi}$ إذا كان $\sin(\frac{\theta-\varphi}{2}) \geq 0$ و $\dfrac{\theta-\varphi-\pi}{2}$ هي زاوية للعدد $e^{\mathrm{i}\theta} - e^{\mathrm{i}\varphi}$ إذا كان $\sin(\frac{\theta-\varphi}{2}) \leq 0$.

حل التمرين 3:

العدد المركب $\alpha = e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{7}}$ هو حل لمعادلة $z^7 + 1 = 0$. من ناحية أخرى

$$z^7 + 1 = (z+1)(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\alpha^3)(z-\overline{\alpha}^3)(z-\alpha^5)(z-\overline{\alpha}^5).$$

بما أن معامل z^6 في كثيرة الحدود $z^7 + 1$ هو 0، فإن $0 = \alpha + \overline{\alpha} + \alpha^3 + \overline{\alpha}^3 + \alpha^5 + \overline{\alpha}^5$. إذاً

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{8}(\alpha+\overline{\alpha})(\alpha^2+\overline{\alpha}^2)(\alpha^4+\overline{\alpha}^4) \\
&= \frac{1}{8}(\alpha^7+\overline{\alpha}^7+\alpha+\overline{\alpha}+\alpha^3+\overline{\alpha}^3+\alpha^5+\overline{\alpha}^5) = -\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

حل التمرين 4:

1. $u^2 = -2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$ و $u^1 = 16\mathrm{i}$.
2. $|u^1| = 16$، إذاً $|u| = 2$ و $\frac{\pi}{2}$ هي زاوية للعدد u^1.
3. $|u| = 2$، و $\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ هي زاوية للعدد u بما أن $\mathrm{Re}\, u > 0$ و $\mathrm{Im}\, u < 0$.

حل التمرين 5:

1. ليكن $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ بحيث $z^2 = -3 - 4\mathrm{i}$. إذاً $x^2 - y^2 = -3$ و $2xy = -4$. إذاً $y = \dfrac{-2}{x}$ و $x^2 - \dfrac{4}{x^2} = -3$. إذاً $x = \pm 1$.
جذور المعادلة $-3 - 4\mathrm{i}$ هي $1 - 2\mathrm{i}$ و $-1 + 2\mathrm{i}$.
2. $x = -1$ هو حل للمعادلة (E). إذا كان z هو حل للمعادلة (E) و $z \neq -1$، فإن $z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} = 0$.
[illegible] $\Delta = -3$ [illegible]. و نستنتج أن حلول المعادلة (E) هي -1، $1 + \mathrm{i}$ و $2 - \mathrm{i}$.

حل التمرين 6:

1. $1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ و $\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = e^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
2. بما أن $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ هو العدد المرافق للعدد المركب $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$، فإن α_n هو عدد حقيقي لكل $n \in \mathbb{N}$.
3. $$\alpha_n = \left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n \left[\left(\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^n + 1\right] = 2^n e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}} \left[e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{3}} + 1\right] = 2^n \left[e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}} + e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}\right] = 2^{n+1}\cos(\frac{n\pi}{3}).$$
بما أن قيم العدد $\cos(\frac{n\pi}{3})$ هي $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$، فإن α_n هي دائما عدد طبيعي.
4. $z^n = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}} \iff z^n = e^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{i}k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \iff z = e^{\frac{2\mathrm{i}(3k+1)\pi}{3n}}$، $k \in \mathbb{Z}$. نرمز $\beta_{n,k} = e^{\frac{2\mathrm{i}(3k+1)\pi}{3n}}$
لكل $k \in \mathbb{Z}$.
5. $(z - \mathrm{i})^n(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = (\mathrm{i} + z)^n(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) \iff \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} = \beta_{n,k} \iff z_k = \mathrm{i}\dfrac{1 + \beta_{n,k}}{1 - \beta_{n,k}},\ k = 0, \ldots, n$.