حل الواجب الأول :

السؤال الأول :

(١) متوسط العينة :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{4.2+5.9+\dots+4.7}{10} = \frac{60.5}{10} = 6.05$$

(٢) تباين العينة :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

$$\sum x_i = 60.5$$

$$\sum x_i^2 = (4.2)^2+(5.9)^2+\dots+(4.7)^2 = 375.21$$

$$S^2 = \frac{375.21 - \frac{(60.5)^2}{10}}{9} = \frac{375.21 - 366.025}{9}$$

$$= \frac{9.185}{9} = 1.0206$$

(٣) الانحراف المعياري :

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1.0206} = 1.0102$$

(٤) الخطأ المعياري لمتوسط العينة :

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{S^2_{\bar{x}}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1.0102}{\sqrt{10}}$$

$$= 0.31945$$

هذا ال

السؤال الثاني :

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{4.3+7.4+\dots+4.9}{8} = \frac{38.3}{8} = 4.7875$$

$$S_x^2 = \frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n}{n-1} \quad , \quad \sum x_i = 38.3$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4.3^2 + 7.4^2 + \dots + 4.9^2 = 192.19$$

$$S_x^2 = \frac{192.19 - (38.3)^2/8}{7} = \frac{192.19 - 183.36125}{7}$$

$$= \frac{8.82875}{7} = 1.2613$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{8.2+6.5+\dots+7.8}{6} = \frac{38.6}{6} = 6.4333$$

$$S_y^2 = \frac{\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2/n}{n-1} \quad ; \quad \sum y_i = 38.6$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 8.2^2 + 6.5^2 + \dots + 7.8^2 = 257.42$$

$$S_y^2 = \frac{257.42 - (38.6)^2/6}{5} = \frac{257.42 - 248.3267}{5}$$

$$= \frac{9.0933}{5} = 1.8187$$

(1) اختبار تساوي التباينات :

الفرضيات :

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

إحصاءة الاختبار :

$$F^* = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{1.2613}{1.8187} = 0.6935$$

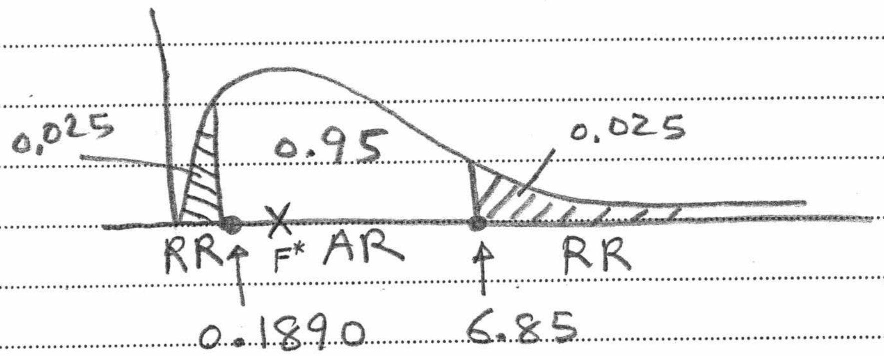
القيم الحرجة الجدولية :

$$F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.025}(7,5) = 6.85$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.975}(7,5) = \frac{1}{F_{0.025}(5,7)}$$

$$= \frac{1}{5.29} = 0.1890$$

منطقة رفض H_0 (RR) ومنطقة قبول H_0 (AR):



القرار:

نظراً لأن قيمة إحصاءة الاختبار $F^*=0.6935$ تقع منطقة القبول $(F^* \in AR)$ ، فإننا نقبل (لا نرفض) $(H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2)$ ، ونستنتج أن التباينات متساوية ، أي لا يوجد فرق معنوي بين التباينين عند مستوى الدلالة $(\alpha=0.05)$.

(٢) اختبار تساوي المتوسطات:

الفرضيات:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

إحصاءة الاختبار:

$$t^* = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(7)(1.2613)+(5)(1.8187)}{8+6-2}$$

$$= \frac{17.9226}{12} = 1.49355$$

هذا ال

$$S_p = \sqrt{S_p^2} = \sqrt{1.49355} = 1.2221$$

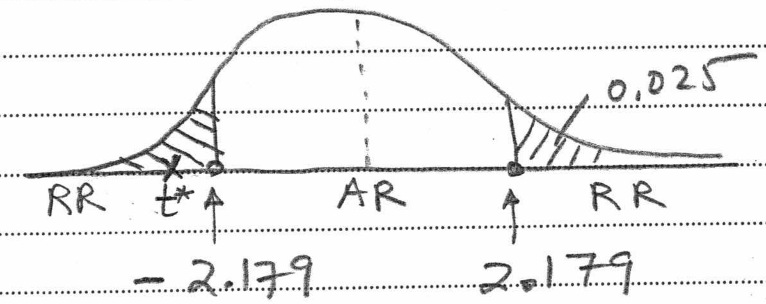
$$t^* = \frac{4.7875 - 6.4333}{1.2221\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{6}}} = \frac{-1.6458}{0.66009}$$

$$= -2.4936$$

القيم الحرجة الجدولية :

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) = t_{0.025}(12) = 2.179$$

منطقة رفض Ho (RR) ومنطقة قبول Ho (AR) :



القرار :

نظراً لأن قيمة إحصاءة الاختبار $(t^*=-2.4936)$ تقع في منطقة الرفض $(t^* \in RR)$ فإننا نرفض $(H_0: \mu_1=\mu_2)$ ، ونستنتج أنه يوجد فروق معنوية بين المتوسطين عند مستوى الدلالة $(\alpha=0.05)$.

(٣) فترة ثقة 95% للفرق بين المتوسطين $(\mu_1-\mu_2)$:

$$(\bar{X}-\bar{Y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-1)\; S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$(4.7875-6.4333) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(12)\;(1.2221)\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{6}}$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(12) = t_{0.025}(12) = 2.179$$

$$\left\{\begin{array}{l} (1-\alpha)100\% = 95\% \\ \Leftrightarrow 1-\alpha = 0.95 \\ \Leftrightarrow \alpha = 0.05 \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \end{array}\right\}$$

$$(4.7875-6.4333) \pm (2.179)(1.2221)\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{6}}$$

$$-1.6458 \pm 1.4382$$

لذلك فإن الفترة هي:

$$-3.0840 < \mu_1 - \mu_2 < -0.2076$$

نلاحظ أن الصفر لا ينتمي إلى هذه الفترة، فلذلك نستنتج أن:

$$\mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mu_1 \neq \mu_2$$

(٤) نظراً لأننا وجدنا أن المتوسطين غير متساويين ($\mu_1 \neq \mu_2$)، ونظراً لأن متوسط انخفاض الوزن لدى الإناث ($\bar{Y}=6.4333$) أكبر من متوسط انخفاض الوزن لدى الذكور ($\bar{X}=4.7875$)، فإننا نستنتج أن برنامج الحمية أكثر كفاءة لدى الإناث.

هذا ال

السؤال الثالث :

أولاً نوجد عينة الفروق $\quad D_i = X_i - Y_i$

X	74.5	75.2	78.1	75.3	75.5	77.2	77.8
Y	72.0	74.1	71.5	68.3	66.0	68.3	69.4
D	2.5	1.1	6.6	7.0	9.5	8.9	8.4

$\bar{X} = 76.23$

$\bar{Y} = 69.94$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} = \frac{2.5 + 1.1 + \dots + 8.4}{7} = \frac{44}{7} = 6.286$$

$$S_D^2 = \frac{\sum D_i^2 - (\sum D_i)^2/n}{n-1} \quad ; \sum_{i=1}^{n} D_i = 44$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i^2 = 2.5^2 + 1.1^2 + \dots + 8.4^2 = 340.04$$

$$S_D^2 = \frac{340.04 - (44)^2/7}{6} = \frac{340.04 - 276.571}{6}$$

$$= \frac{63.469}{6} = 10.578$$

$$S_D = \sqrt{S_D^2} = \sqrt{10.578} = 3.252$$

(1) اختبار الفرضيات : $\quad \mu_D = \mu_1 - \mu_2$

الفرضيات :

$$H_0: \mu_D = 0 \qquad \qquad H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_D \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

إحصاءة الاختبار :

$$t^* = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}} = \frac{6.286}{(3.252/\sqrt{7})} = \frac{6.286}{1.2291}$$

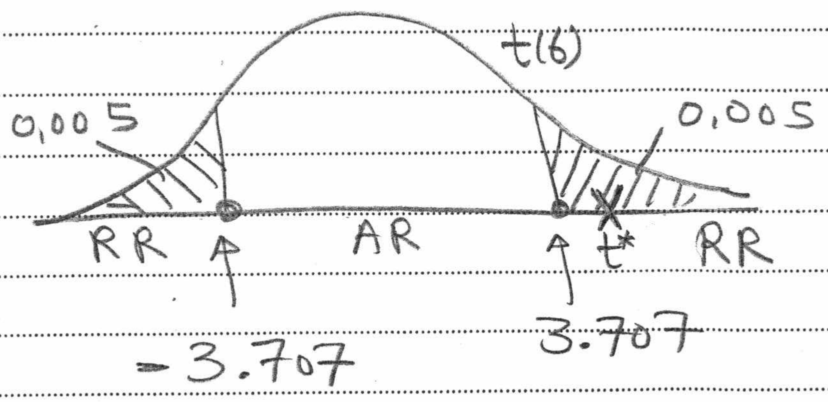
$$= 5.1141$$

القيم الحرجة الجدولية :

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.005}(6)$ $\left(\begin{matrix}\alpha = 0.01\\ \frac{\alpha}{2} = 0.005\end{matrix}\right)$

$= 3.707$

منطقة رفض Ho (RR) ومنطقة قبول Ho (AR) :



القرار :

نظراً لأن قيمة إحصاءة الاختبار $(t^* = 5.1141)$

تقع في منطقة الرفض، فإننا نرفض $(H_0 : \mu_D = 0)$

$\Leftrightarrow (H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0) \Leftrightarrow (H_0 : \mu_1 = \mu_2)$.

ونستنتج أنه هناك فرق معنوي بين المتوسطين

عند مستوى الدلالة $(\alpha = 0.01)$.

(2) فترة ثقة 99% للفرق بين المتوسطين $(\mu_D = \mu_1 - \mu_2)$:

$\bar{D} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S_D}{\sqrt{n}}$

$6.286 \pm t_{0.005}(6)\left(\frac{3.252}{\sqrt{7}}\right)$

$6.286 \pm (3.707)\left(\frac{3.252}{\sqrt{7}}\right)$

6.286 ± 4.5564

$\left\{\begin{matrix} 99\% = (1-\alpha)100\% \\ \Leftrightarrow 0.99 = 1-\alpha \\ \Leftrightarrow \alpha = 0.01 \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \end{matrix}\right\}$

الفترة هي :

$1.7296 < \mu_D = \mu_1 - \mu_2 < 10.8424$

(٣) نظراً لأننا وجدنا أن المتوسطين مختلفين،
ونظراً لأن متوسط الوزن بعد البرنامج ($\bar{Y} = 69.94$)
أقل من متوسط الوزن قبل البرنامج ($\bar{X} = 76.23$)
لذا، فإن برنامج الحمية مفيد في إنقاص الوزن.