

Inverse Hyperbolic Functions

الدوال الزائدية العكسية

Math 111

Lecture 12

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

تعريف : معكوس الجيب الزائدي :
الدالة

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

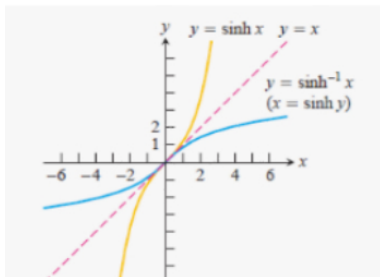
أحادية و شاملة و لذا يوجد دالة عكسية لها ويرمز لها بالرمز
 $\sinh^{-1} x$

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\sinh y = x \Leftrightarrow y = \sinh^{-1} x$$

بيان الدالة

$$y = \sinh^{-1} x$$



تعريف : معكوس جيب التمام الزائدي :
الدالة \cosh ليست أحادية على مجالها \mathbb{R} ولذا فليس لها معكوس ، ولكن

$$\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$$

أحادية و شاملة و لذا يوجد لها دالة عكسية ويرمز لها بالرمز

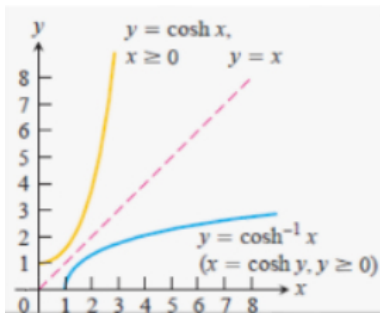
$$\cosh^{-1} x$$

$$\cosh^{-1} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty).$$

$$\cosh y = x \Leftrightarrow y = \cosh^{-1} x$$

بيان الدالة

$$y = \cosh^{-1} x$$



تعريف : معكوس الظل الزائدي :
الدالة

$$\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$$

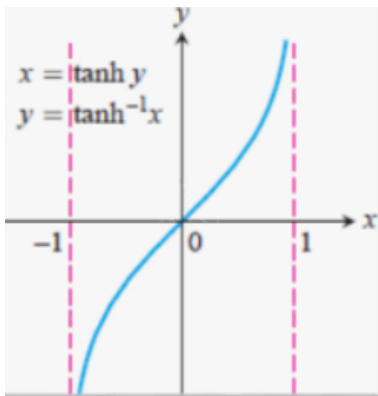
تقابلية و لذا يوجد دالة عكسية لها ويرمز لها بالرمز
 $\tanh^{-1} x$

$$\tanh^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\tanh y = x \Leftrightarrow y = \tanh^{-1} x$$

بيان الدالة

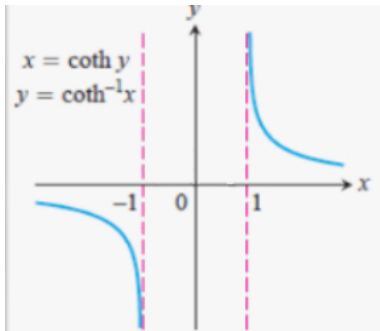
$$y = \tanh^{-1} x$$



معكوسات الدوال الزائدية الأخرى:

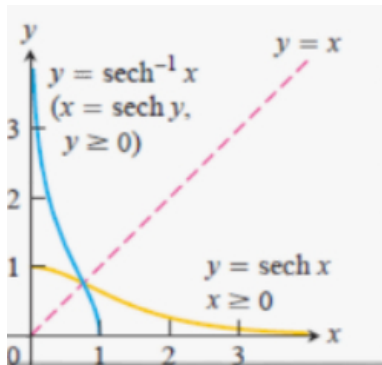
$$\coth^{-1} : \mathbb{R} - [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\coth y = x \Leftrightarrow y = \coth^{-1} x$$



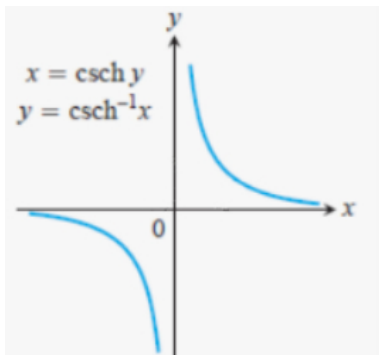
$$\operatorname{sech}^{-1} : (0, 1] \rightarrow [0, \infty).$$

$$\operatorname{sech} y = x \Leftrightarrow y = \operatorname{sech}^{-1} x$$



$$\operatorname{csch}^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\operatorname{csch} y = x \Leftrightarrow y = \operatorname{csch}^{-1} x$$



$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \forall x \in [1, \infty) \quad (2)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \forall x \in (-1, 1) \quad (3)$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \quad (4)$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \forall x \in (0, 1] \quad (5)$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (6)$$

اشتقاق الدوال الزائدية العكسية:

مبرهنة:

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (١)$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (x \in (1, \infty)) \quad (٢)$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad (x \in (-1, 1)) \quad (٣)$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad (x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \quad (٤)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad (x \in (0, 1)) \quad (٥)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}, \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (٦)$$

Examples

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \sinh^{-1}(x^3 + 4) ,$$

$$(2) y = \ln(\cosh^{-1} x).$$

$$(3) y = \sinh^{-1}(\tan x).$$

تكامل الدوال الزائدية:

مبرهنة:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (١)$$
$$\cdot x > a \text{ حيث } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (٢)$$
$$\cdot |x| < a \text{ حيث } \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (٣)$$
$$\cdot |x| > a \text{ حيث } \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (٤)$$
$$\cdot |x| < a \text{ حيث } \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C \quad (٥)$$
$$\cdot |x| \neq 0 \text{ حيث } \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{-1}{a} \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C \quad (٦)$$

Examples

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{25 + 9x^2}} dx ,$$

$$(2) \int \frac{e^x}{16 - e^{2x}} dx.$$

Exercices

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \sinh^{-1}(e^x) ,$$

$$(2) y = \sqrt{\cosh^{-1} x}.$$

$$(3) y = x \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$(4) y = \cosh^{-1}(\ln(4x)).$$

$$(5) y = \frac{1}{\sinh^{-1} x^2}.$$

Exercices

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية :

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{81 - 16x^2}} dx ,$$

$$(2) \int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx.$$

$$(3) \int \frac{2}{5 - 3x^2} dx ,$$

$$(4) \int \frac{1}{x\sqrt{9 - x^4}} dx.$$

Thanks for listening.