Group theory نظرية الزمر

توصيف المقرر:

تعريف الزمرة وأمثلة - الزمر الجزئية، الزمر الدائرية - مبرهنة لاجرانج - الزمر الجزئية الناظمية - الزمر الخارجة - التشاكلات - تماثل الزمر
Quotient group Normal subgroup
التشاكلات الذاتية - مبرهنة كيلي - الزمر البسيطة - زمر التناظر
معادلة الفصل - تأثير زمرة على مجموعة - الزمر الأولية - مبرهنة كوشي
و مبرهنة سيلو - الضرب المباشر.

كتاب المقرر: نظرية الزمر. تأليف: د/ معروف سمحان
د/ فوزي الذكير
الناشر: دار الخريجي للنشر والتوزيع.

الباب الأول: $\boxed{\text{مفاهيم أساسية في الزمر}}$

تعريف: يكون النظام الرياضي $(G,*)$ حيث G مجموعة غير خالية و $*$ عملية ثنائية على G زمرة (Group) إذا تحقق ما يلي:

① خاصية التجميع: $\forall a,b,c \in G,\ a*(b*c)=(a*b)*c$

② خاصية العنصر المحايد: يوجد $e\in G$ يحقق لكل $a\in G$، $a*e=e*a=a$

③ خاصية النظير: لكل $a\in G$ يوجد عنصر $b\in G$ بحيث
$a*b=b*a=e$

مبرهنة: إذا كان $(G,*)$ زمرة فإن:
① العنصر e هو وحيد.
② العنصر b هو وحيد.

الإثبات:

① بالتناقض نفترض أنه يوجد عنصرين e و e_1 مختلفين: $a*e_1=e_1*a=a$
$\therefore e_1=e*e_1=e_1*e=e$

② لنفترض أن $c\in G$ عنصر آخر يحقق $a*c=c*a=e$ لكل $a\in G$
$a*b=b*a=e$
عندئذ
$$b=b*e=b*(a*c)$$
$$=(b*a)*c$$
$$=e*c=c$$

②

تعريف: إذا كان G زمرة تحقق $a * b = b * a$ لكل $a, b \in G$ فإننا نقول إن G زمرة ابدالية أو آبلية (Abelian group)

مبرهنة: إذا كانت G زمرة فانه لكل $a, b \in G$ لدينا:

① $(a^{-1})^{-1} = a$

② $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

③ G ابدالية إذا وفقط إذا كان $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

④ يوجد حل وحيد لكل من المعادلتين $ax = b$ و $ya = b$ في الزمرة G

الاثبات:

① $(a^{-1})^{-1} = a \iff e = a \cdot a^{-1}$

② $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1}$

$= aa^{-1} = e$

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

③ $\Leftarrow$ نفترض أن G ابدالية. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

"$\Rightarrow$" نفترض أن $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

$b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$

$ab = [(ab)^{-1}]^{-1} = [(ba)^{-1}]^{-1} = ba$ إذن G ابدالية.

④ حل $ax = b$ $\Leftarrow$ $x = a^{-1}b$

حل $ya = b$ $\Leftarrow$ $y = ba^{-1}$

الآن نثبت الوحدانية.

نفترض أن c هو حل لـ(1) لدينا $ac = b$;

إذن $c = ec = a^{-1}ac = a^{-1}b$

مبرهنة ٣: (قانوني الاختصار)

إذا كان G زمرة وكان $a, b, c \in G$ فان

(1) $ac = bc \Rightarrow a = b$

(2) $ca = cb \Rightarrow a = b$

الاثبات: $ac = bc \Rightarrow (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} \Rightarrow a = b$

⚠ لتكن G زمرة , $a \in G$ و $n \in \mathbb{Z}$. نعرف a^n استقرائيا كالتالي:

$$a^0 = e$$
$$a^n = a \cdot a^{n-1} \quad n > 0$$
$$a^n = (a^{-1})^n \quad n < 0$$

مبرهنة: إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ وكان $n, m \in \mathbb{Z}^+$ فان :

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

② $(a^n)^{-1} = a^{-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$

④ إذا كانت G ابدالية فان $(ab)^n = a^n b^n$

⚠ $(a^{-1}ba)^n = a^{-1} b^n a$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$

تعريف: إذا كانت G زمرة حيث G مجموعة منتهية فاننا نقول ان G زمرة منتهية (finite group) . وإذا كانت G مجموعة غير منتهية فاننا نقول ان G زمرة غير منتهية (Infinite group) . سنرمز لعدد عناصر G بـ $|G|$ ونسميه رتبة الزمرة G .
order of G

أمثلة :

① $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ زمر ابدالية
حيث الصفر هو عنصر المحايد و $-a$ هو النظير a .
كذلك $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ زمر ابدالية حيث 1 هو عنصر محايد و $\frac{1}{a}$ هو نظير a .

⚠ $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ ليست زمرة .

② $M_{m,n}(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات من الدرجة $m \times n$ التي عناصرها أعداد حقيقية فان $(M_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ زمرة ابدالية .

③ $GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, |A| \neq 0 \}$ زمرة غير ابدالية
تسمى بالزمرة الخطية العامة من الدرجة n
General linear group of degree n.

④

④ $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ زمرة ابدالية حيث العنصر المحايد هو $[0]$

ونظير $[a]$ هو $[-a]$.

$n \mid (x-y) \Leftrightarrow x \equiv y \mod n$

$\mathbb{Z}_n = \{[0], \dots, [n-1]\}$

$[a] +_n [b] = [a+b]$.

⑤ $(\mathbb{Z}_6 - \{[0]\}, \times_6)$ ليست زمرة

⚠ $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n)$ هو نظام تجميعي و ابدالي حيث $[a] \cdot_n [b] = [ab]_n$.

$[2]$ و $[3]$ ليس لهما نظير

$\times_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

جدول كيلي (Cayley table)

⑥ مجموعة التبديلات S_n (permutations)

$$\sigma \in S_n \Leftrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\tau \in S_n \Leftrightarrow \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \dots & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

فاننا نعرف
$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau\sigma(1) & \tau\sigma(2) & \dots & \tau\sigma(n) \end{pmatrix}$$

مثلا:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$$

فان
$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\neq$$
$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$(S_n, \circ)$ هي زمرة غير ابدالية.

⚠ $|S_n| = n!$

• تعريف: لتكن G زمرة ولتكن $a \in G$. إذا وجد عددا صحيحا موجبا n بحيث يكون $a^n = e$ فان اصغر عدد صحيح موجب يحقق ذلك يسمى رتبة العنصر a:
$$O(a) = \min\{m \geq 0 \,/\, a^m = e\}$$
و اذا استحال وجود هذا العدد فاننا نقول ان a ذو رتبة غير منتهية.

⚠ دراسة رتبة عناصر الزمرة يقودنا الى معرفة البنية الجبرية للزمرة

5)

مبرهنة: لتكن G زمرة ولتكن $a\in G$ حيث $O(a)=n$

عندئذٍ

(أ) إذا كان $a^m=e$ حيث $m\in\mathbb{Z}^+$ فإن $n\mid m$

(ب) إذا كان $t\in\mathbb{Z}^+$ حيث $\gcd(t,n)=d$

فإن $o(a^t)=\frac{n}{d}=\frac{lcm(n,t)}{t}$

الإثبات:

(أ) $m=qn+r$ حيث $0\leq r<n$

$$r=m-qn$$

$$a^{r}=a^{m-qn}=a^m\cdot(a^n)^{-q}=e$$

بما أن n هو أصغر عدد صحيح موجب $n=\min$ بحيث $a^n=e$؛

إذن $\boxed{r=0}$ عندئذٍ $m=qn$ يعني $n\mid m$

(ب) نفترض أن $\gcd(t,n)=d$ إذن $d\mid t$, $d\mid n$ ⟸ $t=du$, $n=dv$, $\gcd(u,v)=1$

نضع $o(a^t)=k$

فلنثبت أن $k=\frac{n}{d}$.

$(a^t)^k=a^{kt}=e$ باستخدام (أ) $n\mid kt$

يعني $kt=nr$

$kdu=nr$

$k\cancel{d}u=\cancel{d}vr$

(1) $\boxed{\left(\frac{n}{d}\right)\Big| k} \Leftarrow v\mid k \Leftarrow v\mid ku \Leftarrow ku=vr,\ \gcd(u,v)=1$

من الناحية الأخرى

$(a^t)^{\frac{n}{d}}=a^{\frac{nt}{d}}=a^{\frac{ndu}{\cancel{d}}}=(a^n)^u=e$ لما يؤدي $\boxed{k=O(a^t)\Big|\frac{n}{d}}$

(2)

(1) و (2) يؤدي $\boxed{k=\frac{n}{d}}$

<u>نتيجة</u> ① إذا كان G زمرة و $a \in G$ حيث $o(a) = n$

فان $o(a^t) = n \iff \gcd(t,n) = 1$

② إذا كان G زمرة بحيث $o(a) = n$ فان $o(a^t) = \frac{lcm(n,t)}{t}$.

③ لتكن G زمرة <u>ابدالية</u> ولتكن $a, b, a_1, \dots, a_k \in G$

حيث $O(a_i) = r_i$ لكل $1 \le i \le k$

$O(a) = r$

$O(b) = s$

فان (أ) $O(ab) = lcm(r,s)$

(ب) $O(a_1 \cdots a_k) = lcm(r_1, r_2, \dots, r_k)$

الزمر الجزئية والزمر الدورية (Subgroups & cyclic groups)

<u>تعريف</u>: لتكن $(H, \circ)$ زمرة ولتكن $\phi \ne H \subseteq G$:
إذا كانت H مغلقة تحت عملية G الثنائية بحيث تكون $(H, \circ)$ زمرة فاننا نقول أن H زمرة <u>جزئية</u> من G.

ونرمز لذلك $\boxed{H \le G}$

$e_G = e_H$

$(a^{-1})_H = (a^{-1})_G$

<u>مبرهنة</u>: إذا كانت G زمرة وكانت $\phi \ne H \subseteq G$ فان

$H \le G \iff ab^{-1} \in H \; ; \; a,b \in H$ لكل

<u>الاثبات</u>:

"$\Leftarrow$" واضح إذا كان H زمرة من الواضح أن $ab^{-1} \in H$ لكل $a,b \in H$.

"$\Rightarrow$" بما أن $H \ne \phi$ فانه يوجد $a \in H$ عندئذ $e = aa^{-1} \in H$
اذن H تحتوي على العنصر المحايد.

لكل $b \in H$ لدينا $b^{-1} = eb^{-1} \in H$

$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$

خاصية التجميع متحققة على G فانها متحققة على H.

⚠ إذا كانت G زمرة و كانت H مجموعة جزئية منتهية غير خالية من G
فان $H \le G \iff$ لكل $a, b \in H$ لدينا $ab \in H$.

(المشكل في النظير) خذ $h \in H$ فان $\{h, h^2, \dots, h^n\}$ أكيد $h^r = h^s$ $r < s$

(7)

أمثلة

① $(2\mathbb{Z},+) \le (\mathbb{Z},+) \le (\mathbb{Q},+) \le (\mathbb{R},+) \le (\mathbb{C},+)$

② $(\mathbb{Q}^{\times},\cdot) \le (\mathbb{R}^{\times},\cdot) \le (\mathbb{C}^{\times},\cdot)$

③ زمرة $(\mathbb{Z}_6,+)$

$H=\{[0],[2]\}$ ليست زمرة جزئية

$\left.\begin{array}{l} K=\{[0],[3]\} \\ L=\{[0],[2],[4]\}\end{array}\right\}$ هي زمر جزئية.

④ $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix} / ad\neq 0\right\} \le GL(2,\mathbb{R})$

تعريف: لتكن G زمرة و $a\in G$. يعرف ممركز a ب (Centralizer of a)

$$C(a)=\{x\in G \;/\; xa=ax\}$$

كما نعرف مركز G بأنه (center of G)

$$Z(G)=\{x\in G \;/\; xa=ax, \forall a\in G\}$$

△1 لكل $a\in G$ $C(a)\le G$ (الاثبات)

$Z(G)\le G.$

$C(a)\neq\phi$

$x,y\in C(a)$ خذ

علىالترتيب

$xy^{-1}\in C(a)$

مثال:

① إذا كانت $H\le G$ وكانت $a\in G$ فان

$$aHa^{-1}=\{aha^{-1} \;/\; h\in H\}\le G$$

② إذا كانت $\{H_\gamma, \gamma\in\Gamma\}$ عائلة غير خالية من الزمر الجزئية من G فان $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} H_\gamma \le G$

تعريف: لتكن G زمرة و S مجموعة جزئية من G . نعرف الزمرة الجزئية المولدة بالمجموعة S كما يلي

$$\langle S\rangle=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\{H_\gamma \;;\; S\subseteq H_\gamma\le G\}$$

هي تقاطع جميع زمر G الجزئية التي تحتوي S.

(8)

⚠ إن $S = \{a, b, c\}$ فإن

$$\langle S \rangle = \{ a\,b\,c \;/\; e_i = \pm 1 \;\; \forall i \}$$

$\boxed{\text{\underline{تعريف}: نعرف زمرة للرباعيات (quaternion group) على أنها الزمرة } Q_8 \text{ المولدة بالعنصرين } a \text{ و } b \text{ حيث } o(a)=4,\ a^2=b^2 \text{ و } ba = a^3b = a^{-1}b}$

مبرهنة: Q_8 زمرة غير ابدالية رتبتها 8 .

الاثبات: عناصر Q_8 تكتب على الشكل $a^n b^m$ حيث $m,n \in \mathbb{Z}$

بما أن $o(a)=4 \Leftarrow a^4 = e$ وأن $a^2 = b^2$ فإن $0 \leq n < 4$
$0 \leq m < 2$

إذن $|Q_8| \leq 8$

لكن $\{e, a, a^2, a^3\} \subset Q_8$ مختلفة لذا فإن $\{b, ab, a^2b, a^3b\}$ هم أيضا عناصر مختلفة

إذن $Q_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$

$ab \neq ba$

جدول كيلي

	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
e	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	e	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	e	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	e	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	e	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	e	a^3	a^2	a
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	e	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	e	a^3	a^2

aba^3
$a\,ba\,a^2$
a^3b
ba^2
$a^{\cdot}$

تعريف: تعرف الزمرة الزوجية من الدرجة $n \geq 3$ ويرمز لها بالرمز D_n
(Dihedral group of degree n)
على أنها الزمرة المولدة بالعنصرين a, b حيث $o(a)=n$, $o(b)=2$
وتحقق $ba = a^{-1}b$

ملاحظة: D_n زمرة غير ابدالية رتبتها $2n$ حيث $n \geq 3$.

الاثبات:

$$D_n = \langle a^l b^k \rangle$$

$a^n = e$

$b^2 = e$

$0 \leq k < 2$

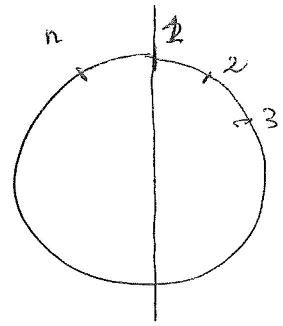
$0 \leq l \leq n-1$

إذن $|D_n| < 2n$

فإذا $\{e, a, \dots, a^{n-1}\}$ مختلفة فإن $\{b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$ أيضا مختلفة

عندئذ $|D_n| = 2n$

$ab \neq ba$



انعكاس

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & n & & 2 \end{pmatrix}$$

دوران $\frac{2\pi}{n}$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

تعريف: لتكن G زمرة ولتكن كل من H و K مجموعة جزئية غير خالية من G
يعرف حاصل ضرب H مع K (product of H and K) بأنه المجموعة

$$HK = \{hk \,/\, h \in H, k \in K\}$$

وبالمثل يعرف ضرب المجموعات الجزئية غير الخالية $H_1, \dots, H_n$ بأنها المجموعة

$$H_1 \cdots H_n = \{h_1 \cdots h_n \,/\, h_i \in H_i\}$$

إذا كان $H \leq G$, $K \leq G$ فإن $HK \not\leq G$

مثال مضاد:

$D_4 \geq H = \{e, a^2 b\}$

$D_4 \geq K = \{e, ab\}$

لكن $HK = \{e, ab, a^2 b, a\}$ ليست زمرة جزئية من D_4

$$a(a^2 b) = a^3 b \notin HK$$

مبرهنة: إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من G فإن العبارات التالية متكافئة:

أ) $HK \leq G$

ب) $HK = KH$

ج) $HK = \langle H \cup K \rangle$

* **تعريف**

لتكن G زمرة وليكن $a \in G$. تسمى الزمرة الجزئية من G المولدة بالعنصر a <u>الزمرة الجزئية الدورية</u> ويرمز لها $\langle a \rangle$

Cyclic subgroup

$$\langle a \rangle = \{ a^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

وتكون الزمرة G زمرة دورية إذا وجد $a \in G$ بحيث $G = \langle a \rangle$

مثال: • $(\mathbb{Z}, +)$ هي زمرة دورية $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$

• $(\mathbb{Z}_n, +)$ دورية $\mathbb{Z}_n = \langle [1] \rangle$

• $(\mathbb{Q}, +)$ ليست دورية

نفترض العكس $\mathbb{Q} = \langle \frac{a}{b} \rangle$

$\frac{a}{2b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a}{2b} = n \frac{a}{b}$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

لكن $n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

مبرهنة 1: إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية فإن G <u>ابدالية</u> .

<u>الاثبات</u>: نأخذ $x, y \in G$. اذا

$$x = a^m$$
$$y = a^n$$

$$xy = a^m . a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n a^m = yx$$

مبرهنة 2: كل زمرة جزئية من زمرة <u>دورية</u> يجب أن تكون <u>دورية</u>

<u>الاثبات</u>: نأخذ G زمرة دورية ولذا يوجد $a \in G$ بحيث $G = \langle a \rangle$.

ليكن $H \leq G$.

إذا كانت $H = \{e\}$ فإن $H = \langle e \rangle$ مقطعا دورية.

إذا كانت $H \neq \{e\}$ إذن يوجد $x \in H$ بحيث $x = a^{n_0}$

$n_0 = \min \{ n \mid a^n \in H \} \subset \mathbb{N}$

موجود ترتيب الحسني

فالنثبت أن $H = \langle a^{n_0} \rangle$.

نأخذ عنصر $y \in H$ فإن $y = a^k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$k = n_0 q + r$ حيث $0 \leq r < n_0$

$a^r = a^k (a^{n_0})^{-q} \in H$ إذن $r = 0$ و بالتالي $H = \langle a^{n_0} \rangle$.

△ $(\mathbb{R},+)$ ليست زمرة دورية لأننا اثبتنا سابقا أن $(\mathbb{Q},+)$ ليس دوريا

مبرهنة: إذا كانت $G=\langle a\rangle$ زمرة دورية منتهية رتبتها n فإن

$$G=\{e,a,\dots,a^{n-1}\}$$

الإثبات: $G=\langle a\rangle=\{a^i;\ i\in\mathbb{Z}\}$

بما أن $|G|<\infty$ فإنه يوجد $i<j$ بحيث $a^i=a^j$ يعني $a^{j-i}=e$

نضع $m=\min\{k>0 / a^k=e\}$ لأن $a^i\neq a^j,\ i,j<m$

لدينا $H=\{e,a,a^2,\dots,a^{m-1}\}$ مختلفة.

لنفترض أن $a^k\in G$ فإن $k=qm+r,\ 0\le r<m$

$$a^k=(a^m)^q a^r=a^r\in H$$

لأن $G\subseteq H$ و $H\subseteq G$

إذن $H=G$ وبما أن $o(a)=n$ فإن $m=n$.

△. $o(a)=|\langle a\rangle|$

إذا كانت $G=\langle a\rangle$ زمرة دورية منتهية رتبتها $n>1$ وكانت $H\le G$ فإن $|H|$ يقسم n.

proof

$|H|=o\langle a^k\rangle=\frac{n}{\gcd(n,k)}=\frac{n}{k}$

$n=qk+r$

$a^r=a^{n-qk}=(a^k)^{-q}.e\in H$

$r=0$ $\quad k|n$

$o(a)=n$

$o(a^t)=\frac{\mathrm{lcm}(n,t)}{t}$

مبرهنة: $\boxed{\text{إذا كانت } G=\langle a\rangle \text{ زمرة دورية منتهية رتبتها } n \text{ فإنه لكل قاسم موجب } d \text{ للعدد } n \text{ توجد زمرة جزئية وحيدة من } G \text{ رتبتها } d}$

الإثبات: نأخذ قاسم موجب d لـ n عندئذ $n=kd$

$$o(a^k)=\frac{o(a)}{\gcd(k,n)}=\frac{kd}{k}=d$$

$H=\langle a^k\rangle$ زمرة جزئية من G رتبتها d.

* الوحدانية: نفترض أن $K\le G$ حيث $|K|=d$ عندئذ $K=\langle a^t\rangle$

حيث t أصغر عدد موجب يحقق $a^t\in K$.

$$d=|K|=|\langle a^t\rangle|=\frac{o(a)=n}{\gcd(n,t)} \Rightarrow \gcd(n,t)=\frac{n}{d}=k$$ يعني

$K=H \Leftarrow K\subseteq H,\ a^t=(a^k)^m\in H;\ t=km \Leftarrow k|t$

• إذا كانت $G=\langle a\rangle$ زمرة دورية منتهية رتبتها n

فإن a^k يولد G $\Leftrightarrow$ $\gcd(k,n)=1$.

الإثبات: "$\Leftarrow$" a^k يولد G, $|G|=n$

$$O(a^k)=n=\frac{n}{\gcd(k,n)}$$

إذاً وعليه $\gcd(k,n)=1$

"$\Rightarrow$" نفترض أن $\gcd(k,n)=1$; فإن

إذن $O(a^k)=\frac{n}{\gcd(k,n)}=n$

يعني $|\langle a^k\rangle|=n=|G|$ $G=\langle a^k\rangle$

$\langle a^k\rangle\subseteq G$.

• G دورية رتبتها n إذن $a^r=a^s \Leftrightarrow r\equiv s \bmod n$

مثال (1) عين جميع الزمر الجزئية من $(\mathbb{Z}_{18},+_{18})$ $\qquad \frac{18}{2}=9$

$\mathbb{Z}_{18}=\langle[1]\rangle$ دورية, $|\mathbb{Z}_{18}|=18$

$\mathbb{Z}_{18}=\langle k[1]\rangle \Leftrightarrow \gcd(18,k)=1$ يعني $k\in\{1,5,7,11,13,17\}$

$\mathbb{Z}_{18}=\langle[1]\rangle=\langle5\rangle=\langle7\rangle=\langle11\rangle=\langle13\rangle=\langle17\rangle$

$\langle[2]\rangle=\{[0],[2],[4],[6],[8],[10],[12],[14],[16]\}$ زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_{18}$ رتبتها (9)

ولذا مولداتها $\gcd(k,9)=1$ إذن $k\in\{2,4,8,10,14,16\}$

$\langle[6]\rangle=\{[0],[6],[12]\}=\langle[12]\rangle$ زمرة جزئية من الرتبة (3)

$\gcd(k,3)=1$

$\langle[3]\rangle=\{[0],[3],[6],[9],[12],[15]\}$ زمرة جزئية من رتبة (6)

$=\langle[15]\rangle$

$\gcd(k,6)=1$

$\langle[9]\rangle=\{[0],[9]\}$ زمرة من رتبة (2)

§ المجموعات المشاركة و مبرهنة لاجرانج

Cosets & Lagrange's Theorem

لقد بينا عند دراستنا للزمر الدورية المنتهية، أنه إذا كانت G زمرة دورية منتهية وكانت $H \leq G$ فإن رتبة H تقسم رتبة G. هذه حالة خاصة من مبرهنة عامة (لاجرانج).

تعريف: لتكن G زمرة ولتكن $H \leq G$ وليكن $a \in G$

① نعرف المجموعة المشاركة اليسرى (left coset) للزمرة الجزئية H التي تحتوي a بأنها

$$aH = \{ah \; ; \; h \in H\}$$

② نعرف المجموعة المشاركة اليمنى (right coset) للزمرة الجزئية H التي تحتوي a بأنها

$$Ha = \{ha \; / \; h \in H\}$$

في كلتا الحالتين، يسمى العنصر a ممثل المجموعة المشاركة.

⚠ . $eH = H = He$ لكل $H \leq G$

. $a \in aH$ و $a \in Ha$

. إذا كانت G ابدالية فإن $aH = Ha$ لكل $a \in G$.

مثال ① $G = \mathbb{Z}$, $H = 3\mathbb{Z}$ فإن المجموعات المشاركة اليسرى H هي

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 3\mathbb{Z} = 1+H \\ 2 + 3\mathbb{Z} = 2+H \\ 3\mathbb{Z} = H \end{array} \right.$$

$\tau_{13} \circ \tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

② إذا كانت $G = S_3$ وكانت $H = \langle (1,2) \rangle \leq G$.

مناقلة (Transposi.)

$\tau_{12} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\tau_{13} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \tau_{13} \circ \tau_{12}$

$\mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\mu^3 = e$

$\mu_2^2 = \mu_1$

(أ) أوجد المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة الجزئية H .

(ب) أوجد المجموعات المشاركة اليمنى للزمرة الجزئية H .

الحل $S_3 = \{ e, \underset{\tau_{12}}{(1,2)} ; \underset{\tau_{13}}{(1,3)} ; (2,3) ; \underset{\mu_1}{(1,2,3)}, \underset{\mu_2}{(1,3,2)} \}$

(أ) $eH = H = \{ e ; (1,2) \}$

$(1,2)H = H$

$(1,3)H = \{ \cancel{e}, (1,3) ; (1,2,3) \}$

$(2,3)H = \{ (2,3) ; (1,3,2) \}$

$H \circ H = \langle (1,2) \rangle$ (٣)

$$H \circ (1,2) = \{e, (1,2)\}$$

1 2 3
3 2 1
3 1 2

$$H \circ (1,3) = \{(1,3) ; (1,3,2)\}$$

1 2 3
1 3 2
2 3 1

$$H \circ (2,3) = \{(2,3) ; (1,2,3)\}$$

لاحظ أن المجموعات المشاركة اليسرى مختلفة في هذه الحالة عن المجموعات المشاركة اليمنى.

مبرهنة: إذا كانت $H \le G$ فإن لدينا

① $aH = bH \iff a^{-1}b \in H$ أو $b^{-1}a \in H$

② $aH = bH$ أو $aH \cap bH = \phi$ لكل $a, b \in G$

③ $Ha = Hb \iff ab^{-1} \in H$ أو $ba^{-1} \in H$

④ $Ha = Hb$ أو $Ha \cap Hb = \phi$.

تجزئة $G = \bigcup_{a \in G} aH = \bigcup_{a \in G} Ha$ ⚠

$aRb \iff Ha = Hb$
$\iff ab^{-1} \in H$
علاقة تكافؤ R

$\boxed{\text{مبرهنة: إذا كان } H \le G \text{ فإن لكل } a \in G \text{ ; } |H| = |aH| = |Ha|}$

الإثبات: خذ
$$f : \begin{matrix} H \to aH \\ h \to ah \end{matrix}$$

f تطبيق احادي وشامل وتقابلي
عندئذ $|H| = |aH|$

تعريف: إذا كانت $H \le G$ فإننا نسمي عدد المجموعات المشاركة اليسرى (أو اليمنى) لـ H في G (index of H in G) ونرمز له $[G : H]$

مثال ① $[S_3 : \langle (1,2) \rangle] = 3$ $\qquad [\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n$

$[S_3 : \langle (1,2,3) \rangle] = 2$

مثال ②: $H = \{[0], [3]\} \le \mathbb{Z}_6$; $L = \{H, \{[1], [4]\}, \{[2], [5]\}\}$

$[\mathbb{Z}_6 : H] = 3$

مبرهنة لاجرانج

إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة منتهية G فإن $|G| = [G:H]\,|H|$ ومن ثمة $|H| \,/\, |G|$

البرهان: لنفترض أن $\{a_1H, \dots, a_kH\}$ هي جميع المجموعات المشاركة اليسرى المختلفة للزمرة الجزئية H عندئذ

$$G = \bigsqcup_{l=1}^{k} a_l H$$

بما أن $a_iH \cap a_jH = \phi$ لكل $i \neq j$ فإن

$$|G| = \sum_{l=1}^{k} |a_l H| = \sum_{l=1}^{k} |H|$$

$$|G| = k\,|H|$$

حيث

$$k = [G:H]$$

نتائج:

1. إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n وكان $a \in G$ فإن $a^n = e$
2. إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها عددا أوليا p فإن G دوارة

مبرهنة: إذا كان $K \le H \le G$ وكان كل من $[G:H]$ و $[H:K]$ منتهيا فإن $[G:K]$ منتهية وأن $[G:K] = [G:H]\,[H:K]$

مثال ١: لتكن G زمرة منتهية من الرتبة pq حيث p و q أوليان مختلفان ولتكن H و K زمرتين جزئيتين وحيدتين حيث $|H|=p$ و $|K|=q$. أثبت أن G دورية.

الحل: $|H \cup K| = p+q-1 < |G| = pq$ ولذا فإنه يوجد $a \in G$ بحيث $a \notin H \cup K$ باستخدام مبرهنة لاجرانج

$o(a)=p$ أو $o(a)=q$ أو $o(a)=pq$.

إذا كان $o(a)=p$ فإن $H=\langle a \rangle$ وهذا يناقض مع وحدانية H. يعني $o(a) \neq p$

كذلك $o(a)=q$ فإن $\langle a \rangle = K$ " " يعني $o(a) \neq q$

فنستنتج أن $o(a)=pq$ يعني $G=\langle a \rangle$.

مثال ٢: لتكن G زمرة ذات رتبة p^n حيث p أولي. أثبت أن G تحتوي على عنصر رتبته p.

الحل: نأخذ $a \in G \setminus \{e\}$، نضع $H=\langle a \rangle$ زمرة جزئية لاجرانج

$|G|=p^n \mid |H|=|\langle a \rangle|$ فإن $|H|=p^m$ حيث $0<m\leq n$

H دورية وأن $p \mid p^m$ فإنه يوجد زمرة جزئية $T \leq H$ بحيث $|T|=p$ لذا T دورية يعني $T=\langle b \rangle$ وبالتالي $o(b)=p$.

مثال ٣: إذا كان G زمرة ابدالية منتهية تحتوي عنصرين مختلفين رتبة كل منهما 2 فأثبت أن $|G|=4k$ حيث $k \geq 1$ عدد صحيح.

الحل: نفترض أن $a\neq b\in G$ بحيث $o(a)=o(b)=2$.

$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=ba=ab$

بما أن G ابدالية $H=\{e,a\}$
$K=\{e,b\}$

$$HK=\{e,a,b,ab\}\leq G$$

$$|HK|=4 \mid |G|$$

فإن $|G|=4k$ بحيث $k\geq 1$.

⚠ إذا كانت G غير ابدالية فإن النتيجة غير صحيحة.

مثلاً $G=S_3$ ، $|S_3|=6$.

$\tau_3(1,2)$
$\tau_2(1,3)$
$|\tau_3|=|\tau_2|=2$ لكن $4\nmid 6$

مثال: لتكن $H\leq G$ ولتكن $\sim_H$ العلاقة المعرفة على G كما يلي

$$a\sim_H b \iff ab^{-1}\in H$$

(أ) اثبت أن $\sim$ علاقة تكافؤ على G.

(ب) اثبت أن فصول التكافؤ $\sim_H$ هي المجموعة المشاركة اليمنى للزمرة الجزئية H في G.

مثال: إذا كانت $|G|=48$ وكل من H و K زمرة جزئية من G رتبتها 16 فأثبت أن $|H\cap K|=8$.

٤ الزمر الجزئية الناظمية : (Normal subgroups)

لقد بينا أن أي زمرة جزئية H من زمرة G تزودنا بتجزئتين للزمرة G. (مجموعة المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة الجزئية H ومجموعة المجموعات المشاركة اليمنى).

سندرس في هذا البند الزمر الجزئية H من G التي تجعل التجزئتين متساويتين أي تحقق $aH = Ha$ لكل $a \in G$.

تعريف : لتكن $H \leq G$. نقول إن H زمرة جزئية ناظمية (normal subgroup) من G إذا كان $aH = Ha$ لكل $a \in G$.

⚠ * إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G فإننا نكتب $H \lhd G$

* من الواضح $G \lhd G$ و $\{e\} \lhd G$ لكل زمرة G.

* إذا كانت G زمرة ابدالية فإن $H \lhd G$ لكل $H \leq G$.

* $aH = Ha$ يعني إذا كان $ah \in aH$ فإنه يوجد $h_1 \in H$ بحيث $ah = h_1 a$

مبرهنة ١ إذا كانت $H \leq G$ فإن العبارات التالية متكافئة:

(أ) $H \lhd G$

(ب) لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ يوجد $h_1 \in H$ بحيث $xh = h_1 x$.

(ج) $x^{-1} h x \in H$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$.

(د) $x^{-1} H x = H$ لكل $x \in G$

مثال :

① إذا كانت $H = \langle (1, 2) \rangle \leq S_3$ فإن

$$(1,3) \circ H = \{(1,3) ; (1,2,3)\}$$

$$H \circ (1,3) = \{(1,3) ; (1\ 3\ 2)\}$$

إذاً $(1,3) \circ H \neq H \circ (1,3)$ يعني $H \ntriangleleft S_3$

② إذا كانت $K = \langle (1\ 2\ 3) \rangle \leq S_3$ نرى أن $\sigma \circ K = K \circ \sigma$ لكل $\sigma \in S_3$

فإن $K \lhd S_3$.

$SL(n,\mathbb{R}) \lhd GL(n,\mathbb{R})$ (3)

$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}),\ |A| = 1\}$. نأخذ $A \in SL(n,\mathbb{R})$ و $B \in GL(n,\mathbb{R})$

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})(\det A)(\det B)$$
$$= \frac{1}{\det B}\cdot 1 \cdot \det B = 1$$

إذن $B^{-1}AB \in SL(n,\mathbb{R})$ يعني $SL(n,\mathbb{R}) \lhd GL(n,\mathbb{R})$

• مبرهنة: إذا كانت $H \leq G$ وكان $[G:H]=2$ فإن $H \lhd G$.

الإثبات: $\{H, xH\}$ و $\{H ; Hx\}$ هما تجزئتي لـ G .

$G = H \cup (xH) = H \cup (Hx)$ ولذا فإن $xH = G - H = Hx$
لكل $x \in G$

يعني $H \lhd G$.

• تطبيق: بما أن $[S_n, A_n] = 2$ فإن $A_n \lhd S_n$ لكل $n \geq 2$.

$[S_n, A_n]$: مجموعة التبديلات ؛ A_n: زمرة التناوبات Alternating group
مفهوم التبديلات الزوجية والفردية

$\boxed{\text{cycle of length } m = (m-1) \text{ transpositions}}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 9 & 1 & 8 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \in S_9$$

هي تبديل زوجي
ذات 6 مناقلات
$\sigma \in A_9$

$$\sigma = (1,3,5) \circ (2,6,8,7) \circ (4,9)$$
$$\sigma = \underbrace{(1,3,5)} \circ (2,6,8,7) \circ (4,9)$$
$$\sigma = \underbrace{(1,5)\circ(1,3)} \circ \underbrace{(2,7)\circ(2,8)\circ(2,6)} \circ (4,9)$$

$\boxed{O(\sigma) = \text{lcm}(3,4,2) = 12 \quad \sigma^{12} = I}$

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 7 & 8 & 1 & 6 & 9 \end{pmatrix} \notin A_9$$

هي تبديل فردي
ذات 5 مناقلات
$\mu \notin A_9$

$$\mu = \underbrace{(1,5,7)} \circ (2,4,3) \circ (6,8)$$
$$\mu = \underbrace{(1,7)\circ(1,5)} \circ \underbrace{(2,3)\circ(2,4)} \circ (6,8)$$

$\boxed{O(\mu) = \text{lcm}(3,3,2) = 6 \quad \mu^6 = I}$

(أي تبديل فردي هو تحصيل دورات طول كل منها 3
إذا كان $n \geq 3$).

مثال: $Z(G) \lhd G$ لكل زمرة G لأن: $Z(G) \leq G$. الآن
نأخذ $x \in G$ و $h \in Z(G)$ فإن لدينا $xh = hx$ يعني
$xhx^{-1} \in Z(G)$ وبالتالي $Z(G) \lhd G$

تعريف: إذا كانت $H \leq G$ فان منظم H في G (Normalizer of H in G)
هو المجموعة $N(H)=\{x\in G / x^{-1}Hx=H\}$

المبرهنة التالية تزودنا بخواص المنظم:

مبرهنة ٣: إذا كانت $H \leq G$ فان:

أ) $N(H) \leq G$

ب) $H \triangleleft N(H)$

ج) $H \triangleleft G \iff N(H)=G$

د) إذا كانت $H \triangleleft K \leq G$ فان $K \subseteq N(H)$
أي أن $N(H)$ هي أكبر زمرة جزئية من G بحيث تكون H ناظمية فيها.

الاثبات:

أ) $N(H)\neq \phi$ لأن $e\in N(H)$.
نأخذ $x,y\in N(H)$ لدينا $\begin{matrix} xH=Hx \\ yH=Hy \end{matrix}$.
$xy^{-1}H = xHy^{-1} = Hxy^{-1}$ يعني $xy^{-1}\in N(H)$. ومن تعريف فان $N(H)\leq G$

ب) $x\in N(H)$ فان $xH=Hx$ يعني $H \triangleleft N(H)$

ج) "$\Leftarrow$" نفترض أن $H \triangleleft G$. عندئذ $xH=Hx$ لكل $x\in G$
ولذا فان $x\in N(H)$ وبالتالي $G\subseteq N(H)$ ولذا يؤدي $G=N(H)$

"$\Rightarrow$" نفترض أن $N(H)=G$. بما أن $H \triangleleft \underset{G}{\underset{\shortparallel}{N(H)}}$ فإن $H \triangleleft G$

د) لنفترض أن $H \triangleleft K \leq G$ وليكن $k\in K$. بما أن $H \triangleleft K$
فان $kHk^{-1}=H$ وبالتالي $k\in N(H)$ يعني $K\subseteq N(H)$

تزودنا المبرهنة التالية باختبار لمعرفة فيما إذا كانت الزمرة الجزئية H من الزمرة المنتهية G ناظمية.

مبرهنة ٣:

لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \leq G$ حيث $|H| = m$.
إذا كانت H هي الزمرة الجزئية الوحيدة من G ذات الرتبة m
فان $H \lhd G$.

الاثبات:

نأخذ $x \in G$. نأخذ

$$\varphi : G \longrightarrow G, \quad g \longmapsto x^{-1} g x$$

φ تماثل ؛ $\varphi(H) = x^{-1} H x \leq G$

$$|H| = |\varphi(H)| = |x^{-1} H x| = m$$

وباستخدام وحدانية H نجد

$\varphi(H) = H$ يعني $x^{-1} H x = H$

وبالتالي $H \lhd G$.

تطبيق: ①

$H = \{e, a^2\} \leq Q_8$ هي الزمرة الجزئية الوحيدة من Q_8 ذات الرتبة 2 باستخدام النظرية $H \lhd Q_8$.

②

$$H = \{e, (1,2)\circ(3,4); (1,3)\circ(2,4); (1,4)\circ(2,3)\} \leq A_4$$

هي الزمرة الجزئية الوحيدة من A_4 ذات الرتبة 4

باستخدام المبرهنة $H \lhd A_4$.

مثال: إذا كان $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكل فان

$$\text{Ker}\, \varphi = \{x \in G_1 \mid \varphi(x) = e_2\} \lhd G_1$$

(نواة التشاكل)

لأن $\text{Ker}\, \varphi \leq G_1$

الآن نأخذ $x \in G_1$ و $h \in \text{Ker}\, \varphi$ إذن

$$\varphi(x^{-1} h x) = \varphi(x^{-1})\, \varphi(h)\, \varphi(x) = \varphi(x^{-1})\, e_2\, \varphi(x) = \varphi(x^{-1}x) = \varphi(e_1) = e_2$$

عندئذ $x^{-1} h x \in \text{Ker}\, \varphi$ وبالتالي $\text{Ker}\, \varphi \lhd G_1$

⚠ • إذا كان $K \trianglelefteq G$ فإنه يوجد تشاكل

$\varphi : G \to H$ بحيث $\ker \varphi = K$

• علاقة الناظمية ليست متعدية يعني من الممكن

أن نجد زمر H, K, G بحيث $H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ ولكن $H \ntrianglelefteq G$

خذ

$G = D_4$

$K = \{e, a^2, ab, a^3b\} \leq G$

$H = \{e, a^3b\} \leq G$

لدينا $H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$

لأن $[G:K] = [K:H] = 2$

لكن $H \ntrianglelefteq G$

$aH = \{a, b\} \neq Ha = \{a, a^2b\}$

مبرهنة: إذا كانت $\{H_i , i \in I\}$ عائلة غير خالية من الزمر الجزئية الناظمية من الزمرة G فإن

$$\bigcap_{i \in I} H_i \trianglelefteq G$$

الإثبات: لنفترض $x \in G$ و $h \in \bigcap_{i \in I} H_i$ عندئذ $h \in H_i$ لكل i

وبما أن $H_i \trianglelefteq G$ فإن $x^{-1} h x \in H_i$ لكل i

يعني $x^{-1} h x \in \bigcap_i H_i$ وبالتالي $\bigcap_i H_i \trianglelefteq G$

مبرهنة (حاصل ضرب زمرة جزئية)

(أ) إذا كان $H, K \leq G$ بحيث $K \trianglelefteq G$ فإن $HK \leq G$

(ب) إذا كان $K \trianglelefteq G$ و $H \trianglelefteq G$ فإن $HK \trianglelefteq G$.

⚠ **نتيجة:** إذا كان $H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$ فإن $HK = KH = \langle H \cup K \rangle$.

التشاكلات (Homomorphisms of Groups & Cayley's Thm) ونظرية كيلي

تعريف:

لتكن G_1 و G_2 زمرتين ولتكن $\varphi: G_1 \to G_2$ تطبيقاً. نقول إن φ تشاكل (homomorphism) إذا كان $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ لكل $a, b \in G_1$

مثال:

- $I : G \to G$, $x \to x$ تشاكل المحايد

- $e : G_1 \to G_2$, $x \to e_2$ تشاكل تافه.

- $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$, $x \to e^x$ تشاكل لأن

$$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \varphi(x)\varphi(y)$$

- $\varphi : (\mathbb{R}^\times, \cdot) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$, $x \to |x|$ تشاكل

$$\varphi(xy) = |xy| = |x| \cdot |y| = \varphi(x)\varphi(y)$$

- $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $m \to [m]$ تشاكل.

$$\varphi(m+k) = [m+k] = [m] + [k] = \varphi(m) + \varphi(k)$$

- $\varphi : S_n \to \mathbb{Z}_2$

$$\sigma \to \begin{cases} [1], & \sigma \text{ فردي} \\ [0] & \sigma \text{ زوجي} \end{cases}$$

$\varphi(\sigma \circ \gamma) = \varphi(\sigma) + \varphi(\gamma)$ تشاكل

- $\varphi : H \to aHa^{-1}$, $x \to axa^{-1}$ ليكن $a \in G$, $H \leq G$

تشاكل: $\varphi(xy) = axya^{-1} = \underbrace{axa^{-1}}_{\varphi(x)}\underbrace{aya^{-1}}_{\varphi(y)}$

- $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^\times, \cdot)$, $A \to \det A$

$$\varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$$

تعريف: ليكن $\varphi: G_1 \to G_2$ تشاكلاً ولتكن $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G_2$

تسمى المجموعة $\varphi(H_1)=\{\varphi(h) / h \in H_1\}$ صورة H_1

تسمى المجموعة $\varphi^{-1}(H_2)=\{g \in G_1 / \varphi(g) \in H_2\}$ الصورة العكسية لـ H_2

وتسمى $\ker \varphi = \{g \in G / \varphi(g) = e_2\}$ بنواة التشاكل φ.

مبرهنة: إذا كان $\varphi: G_1 \to G_2$ تشاكلاً فإن:

- $\varphi(e_1) = e_2$
- $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ لكل $a \in G_1$
- إذا كانت $H \leq G_1$ فإن $\varphi(H) \leq G_2$
- إذا كانت $K \leq G_2$ فإن $\varphi^{-1}(K) \leq G_1$
- $\ker \varphi \leq G_1$
- $\ker \varphi = \{e_1\} \iff \varphi$ أحادية.
- إذا كانت G_1 ابدالية فإن $\varphi(G_1)$ ابدالية.
- إذا كانت $a \in G_1$ وكانت $o(a) = n$ فإن $o(\varphi(a))$ يقسم n.

تعريف: ليكن $\varphi: G_1 \to G_2$ تشاكلاً.

1. نقول إن φ تشاكل غامر أو شامل (epimorphism) إذا كان φ تطبيقاً غامراً وفي هذه الحالة نقول إن G_2 صورة تشاكلية لـ G_1.
2. إذا كان φ تشاكل أحادياً (monomorphism) إذا كان φ تطبيقاً أحادياً.
3. نقول إن φ تماثل (isomorphism) إذا كان φ تقابلاً.
4. نقول إن الزمرتين G_1 و G_2 متماثلتان (isomorphic) إذا وجد تماثل $\varphi: G_1 \to G_2$ ونرمز لذلك $G_1 \simeq G_2$.

مثال: • $\varphi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^+_*, \cdot)$

$x \to |x|$

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ x \in \mathbb{R}^* / |x| = 1 \}$
$= \{ \pm 1 \}$

هو تشاكل ليس أحاديا.
لكن شامل.

• $\varphi : S_n \to \mathbb{Z}_2$

$\operatorname{Ker} \varphi = A_n$. إذن φ ليس أحاديا.

• $\varphi : H \to aHa^{-1}$

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ x \in H / axa^{-1} = e \}$
$= \{ e \}$

أحاديا وشامل إذا
$H \simeq aHa^{-1}$

• $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$\ker \varphi = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) / \det A = 1 \}$
$= SL(n, \mathbb{R})$

ليس أحاديا.

مبرهنة: لتكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية

(أ) إذا كانت G منتهية رتبتها n فإن $G \simeq \mathbb{Z}_n$

(ب) إذا كانت G غير منتهية فإن $G \simeq \mathbb{Z}$

الاثبات: (أ)

$\varphi : G \to \mathbb{Z}_n$ لكل $a^l \in G$

$a^l \to [l]$

$\varphi(a^l a^k) = \varphi(a^{l+k}) = [l+k] = [l] +_n [k]$
$= \varphi(a^l) +_n \varphi(a^k)$

إذن φ تشاكل

• نثبت أن φ أحاديا.

$\varphi(a^l) = \varphi(a^k) \Rightarrow [l] = [k]$
$\Rightarrow n \mid l-k$

$a^{l-k} = e \Rightarrow a^l = a^k$

ولذا فإن $|l-k| \le n-1$ وبما أن $n \mid |l-k|$ فإن $l = k$

بما أن $|\mathbb{Z}_n| = |G| = n$ فإن φ شامل ولذا فإن φ تشاكل

$G \simeq \mathbb{Z}_n$

(ب) $\varphi : G \to \mathbb{Z}$

$a^l \to l$

$a^l = a^k \Rightarrow a^{l-k} = e$
$l - k = 0 \Leftrightarrow l = k$

φ أحادي

$\varphi(a^l a^k) = \varphi(a^l) \cdot \varphi(a^k)$ و φ شامل

$G \simeq \mathbb{Z}$

مبرهنة: ليكن $\varphi: G_1 \to G_2$ تماثلاً عندئذٍ:

(أ) G_1 ابدالية إذا وفقط G_2 ابدالية

(ب) $o(a) = o(\varphi(a))$ لكل $a \in G_1$

(ج) G_1 دورية إذا وفقط إذا كان G_2 دورية

(د) للمعادلة $x^n = a$ حل في الزمرة G_1 $\Leftrightarrow$

$(\varphi(x))^n = \varphi(a)$ حل في الزمرة G_2 لكل $a \in G_1$.

مثلا:

- $(\mathbb{Q},+) \not\cong (\mathbb{Z},+)$
دورية

- $(\mathbb{Q},+) \not\cong (\mathbb{Q}^*,\cdot)$

لأن رتبة أي عنصر ما عدا المحايد في عناصر $(\mathbb{Q},+)$
غير منتهية. لأن $(-1)^2 = 1$ ولهذا فإن رتبة
(-1) تساوي 2 في $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$

- $(\mathbb{Q}^*,\cdot) \not\cong (\mathbb{R}^*,\cdot)$

$x^2 = 2$ لها حل في $\mathbb{R}^*$ لكن ليس لها حل في $\mathbb{Q}^*$

$x^2 = -1$ $(\mathbb{R}^*,\cdot) \not\cong (\mathbb{C}^*,\cdot)$

- $(\mathbb{R}^*,\cdot) \not\cong (\mathbb{R},+)$

$x + x = -1$ لها حل في $(\mathbb{R},+)$

لكن $x^2 = -1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}^*$.

- $\mathbb{Z}_4 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_4$ دورية، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ليست دورية

مبرهنة كيلي: لتكن G زمرة وليكن $a \in G$

(أ) التطبيق $\lambda_a : G \to G$ المعرّف $\lambda_a(x) = ax$ لكل $x \in G$ تبديل

(ب) $H = \{\lambda_a, a \in G\} \leq S_G$ (ج) $G \cong H$

• مبرهنة كيلي تقدم تمثيل لأي زمرة منتهية كأنها زمرة جزئية من زمرة التبديلات.

(كل زمرة منتهية من الرتبة n هي متماثلة لزمرة جزئية من S_n)

الاثبات:

(أ) أولا لنلاحظ أن λ_a هو تطبيقا أحادي:

$$\lambda_a(x)=\lambda_a(y) \Rightarrow ax=ay \Rightarrow x=y$$

وإذا كان $y\in G$ فإن $\lambda_a(a^{-1}y)=a(a^{-1}y)=y$ يعني λ_a شامل

إذن λ_a احادي + شامل = تقابلي يعني λ_a هو تبديلا.

(ب) نريد اثبات أن $H=\{\lambda_a, a\in G\}\le G$.

• $\lambda_e\in H$ ولذا فإن $H\neq\phi$.

• إذا كان $\lambda_a\in H$ فإن $\lambda_{a^{-1}}\in H$ لأن عندما نأخذ $x\in G$

$$\lambda_{a^{-1}}(x)=a^{-1}x \quad \text{و} \quad \lambda_a(a^{-1}x)=x$$

وبالتالي $\lambda_a\circ\lambda_{a^{-1}}=\lambda_e$ يعني $(\lambda_a)^{-1}=\lambda_{a^{-1}}$

• إذا كان $\lambda_a,\lambda_b\in H$ فإنه لكل $x\in G$ لدينا

$$\lambda_a\circ\lambda_b^{-1}(x)=\lambda_a(b^{-1}x)=ab^{-1}x=\lambda_{ab^{-1}}(x)$$

إذا $\lambda_{ab^{-1}}=\lambda_a\circ\lambda_{b^{-1}}\in H$

فنستنتج أن $H\le S_G$

(ج) نأخذ $a\in G$ نعرف

$$\varphi: G\to H$$
$$a\to\lambda_a$$

φ هو تطبيق أحادي لأن عندما نأخذ $x\in G$, $a,b\in G$

$$ax=bx \Rightarrow \lambda_a(x)=\lambda_b(x) \Rightarrow \varphi(a)=\varphi(b)$$

من الواضح أن φ شامل.

$$\varphi(ab)=\lambda_{ab}$$
$$\varphi(a)\circ\varphi(b)=\lambda_a\circ\lambda_b$$
$$(\lambda_a\circ\lambda_b)(x)=\lambda_a(\lambda_b(x))=\lambda_a(bx)=abx=\lambda_{ab}(x)$$

إذا $\varphi(ab)=\varphi(a)\circ\varphi(b)$ يعني φ تشاكل

فنستنتج أن $G\simeq H$.

زمر خارج القسمة :

إذا كانت G زمرة وكانت $H \leq G$ وكانت $G|H = \{aH, a\in G\}$

فإننا نود أن نعرف عملية ثنائية على $G|H$ بحيث نحصل على زمرة.

والتعريف الطبيعي : $(aH)(bH) = (ab)H$ لكل $a, b\in G$.

مثلا : $\left\{\begin{array}{l} G = S_3 \\ H = <(1,2)> \end{array}\right.$

$(1,3)H = (1,2,3)\circ H$

$(1,3)\circ H = \{(1,3);(1,2,3)\}$

$(2,3)\circ H = (1,3,2)\circ H = \{(2,3);(1,3,2)\}$

$[(1,3)\circ(2,3)]\circ H = (1,3,2)\circ H \not\equiv [(1,2,3);(1,3,2)]\circ H = H$

للخروج من هذا المأزق يجب البحث عن شروط على H لنحصل على زمرة $G|H$

مبرهنة 1 :

إذا كانت $H \leq G$ فإن $(aH)(bH) = (ab)H$ عملية ثنائية على $G|H$ إذا وفقط إذا كان $H \lhd G$.

مبرهنة 2 : إذا كانت $H \lhd G$ فإن

(أ) $G|H = \{aH : a\in G\}$ زمرة حيث $(aH)(bH) = (ab)H$

(ب) إذا كانت G ابدالية فإن $G|H$ ابدالية.

(ج) إذا كانت $G = <x>$ دورية فإن $G|H = <xH>$ دورية.

(د) إذا كانت G منتهية فإن $|G|H| = \frac{|G|}{|H|}$

الاثبات : (أ) ◦ إذا كانت $aH, bH, cH \in G/H$ فإن

$[(aH)(bH)](cH) = [(ab)H](cH) = ((ab)c)H = [a(bc)]H$

$= (aH)[(bc)H] = (aH)[(bH).(cH)]$

فإن العملية تجميعية

◦ العنصر المحايد هو $eH = H$ لأن لكل $a\in G$ لدينا

$(aH)(eH) = (ae)H = aH = (eH)(aH)$

◦ نظير aH هو $a^{-1}H$ لأن

$(aH)(a^{-1}H) = eH = H$

إذن G/H زمرة.

(ب) إذا كانت G ابدالية وكان $a, b \in G$،

$$(aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH).$$

لذا فإن G/H ابدالية.

(ج) نفترض أن $G = \langle x \rangle$ ولنفترض أن $aH \in G/H$ بما أن $a \in G$

فإن $a = x^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$، عندئذ

$$aH = x^n H = (xH)^n$$

وبالتالي $G/H = \langle xH \rangle$ يعني أن G/H دورية.

(د) بما أن $|G/H| = [G:H]$ فإننا نجد أن $|G/H| = \dfrac{|G|}{|H|}$.

تعريف: الزمرة G/H تسمى زمرة خارج القسمة للزمرة G على H (quotient group (or factor group) of G by H)

مثال: • عناصر $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ هي $6\mathbb{Z}, 1+6\mathbb{Z}, \ldots, 5+6\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_6$

• لنأخذ $G = \mathbb{Z}_{18}$ ولنأخذ $H = \langle [6] \rangle$ فإن $H = \{[0], [6], [12]\}$

$$|G/H| = 6$$

فإن $G = \langle [1] \rangle$

$$G/H = \langle [1] + H \rangle = \{H, [1]+H; [2]+H; [3]+H; [4]+H; [5]+H\}$$

• إذا كانت $H = \{[1], [15]\} \leq U_{32}$ فإن $|U_{32}/H| = 8$ و U_{32}/H ابدالية.

فإن $([3]H)^4 = [81]H = [17]H \neq H$ فإن $o([3]H) = 8$

وبالتالي

$$U_{32}/H \cong \mathbb{Z}_8$$

مبرهنة: إذا كانت G زمرة حيث $G/Z(G)$ دورية فإن G ابدالية.

الاثبات: لنفترض أن $G/Z(G) = \langle xZ(G) \rangle$ ولنفترض أن $a, b \in G$ إذن يوجد $m, n \in \mathbb{Z}$ حيث

$$aZ(G) = (xZ(G))^m = x^m Z(G)$$
$$bZ(G) = (xZ(G))^n = x^n Z(G)$$

ولذا فإنه يوجد $g, h \in Z(G)$

بحيث

$$a = x^m g$$
$$b = x^n h$$

$$ab = (x^m g)(x^n h) = x^m (g x^n) h = x^m x^n (g h) = x^n x^m h g = (x^n h)(x^m g) = ba$$

وبالتالي G ابدالية.

مبرهنة (مبرهنة كوشي للزمر الابدالية المنتهية)

إذا كانت G زمرة ابدالية منتهية وكان p عدداً أولياً يقسم رتبة G فإن G تحتوي على عنصر رتبته p (وبالتالي تحتوي على زمرة جزئية رتبتها p)

الاثبات: نستخدم الاستقراء الرياضي على $|G|$.

من الواضح $|G|=2$.

لنفترض أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الابدالية المنتهية التي رتبتها أصغر من $|G|$.

لاحظ أولاً أن G تحتوي على عنصر من رتبة عدد أولي

لو كان $a\in G$ من الرتبة n و n عدد غير أولي $n = mq$ حيث q أولي

$$o(a^m) = \frac{n}{\gcd(m,n)} = \frac{n}{m} = q$$

لنفترض أن $x\in G$ رتبته عدد أولي q. إذا كان $q=p$ نكون انتهينا.

لنفترض أن $q\neq p$. ونأخذ $H=\langle x\rangle$. بما أن G ابدالية فإن $H \trianglelefteq G$ وأن G/H زمرة وبما أن $p\mid |G|$ فإن $p\mid |G/H|$

وبما أن $|G/H| < |G|$ فإنه يجب باستخدام الاستقراء الرياضي أن G/H تحتوي على عنصر aH رتبته p. إذن $(aH)^p = a^pH = H$ وهذا يعني $a^p\in H$ ومنه $a^p=e$ أو $o(a^p)=q$ (لأن $p\neq q$). إذا كان $a^p=e$ فإن $a\in G$ رتبته p. أما إذا كان $o(a^p)=q$ فإن $(a^q)^p=(a^p)^q=e$ وبالتالي $o(a^q)=p$.

نتيجة: إذا كانت G زمرة ابدالية منتهية رتبتها n وكان m يقسم n فإن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة m.

مبرهنات التماثل (Isomorphism Theorems)

مبرهنة 1: إذا كانت $\varphi: G_1 \to G_2$ تشاكلاً فإن

$$G_1/\ker\varphi \simeq \varphi(G_1)$$

الإثبات: نضع $K=\ker\varphi$ حيث $\varphi: G_1 \to G_2$ تشاكل.

نأخذ

$$\psi: G_1/K \to \varphi(G_1)$$
$$aK \to \varphi(a)$$

• ψ هو تطبيق لأنه إذا كان $aK=bK$

$$\psi(aK)=\varphi(a)=\varphi(bk)=\varphi(b)\varphi(k)$$
$$=\varphi(b)\,e_2$$
$$=\varphi(b)=\psi(bK)$$

• ψ أيضاً تشاكل:

$$\psi(aKbK)=\psi(abK)=\varphi(ab)$$
$$=\varphi(a)\varphi(b)=\psi(aK)\psi(bK)$$

• ψ أحادياً.

$$\ker\psi=\{aK\in G_1/K \ / \ \varphi(a)=e_2\}$$
$$=\{aK\in G_1/K \ / \ a\in \underset{K}{\underset{\shortparallel}{\ker\varphi}}\}=K$$

$$aK=K$$
$$\ker\psi=\{K\}=\{e_{G/K}\}$$

فنستنتج أن

$$G_1/\ker\varphi \simeq \varphi(G_1)$$

⚠ ← إذا كانت G زمرة منتهية وكان $\varphi: G \to G_1$ فإن $|\varphi(G)|$ يقسم $|G|$

لأن $G/\ker\varphi \simeq \varphi(G)$

$$|\varphi(G)| \ \Big| \ |G| \quad \Leftarrow \quad |G/\ker\varphi| = \frac{|G|}{|\ker\varphi|} = |\varphi(G)|$$

مثال: • $\varphi: (\mathbb{R}^\times,\cdot) \to (\mathbb{R}^*_+,\cdot)$ تشاكلاً غامراً: $\ker\varphi=\{\pm 1\}$

$$x \to |x|$$

$(\mathbb{R}^\times,\cdot)/\{\pm1\} \simeq (\mathbb{R}^*_+,\cdot)$ يعني أيضاً $(\mathbb{R}^\times,\cdot)/\mathbb{Z}_2 \simeq (\mathbb{R}^*_+,\cdot)$

• تشاكل تام زمرا $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$

$m \to [m]$

$\ker\varphi = n\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$$ عندئذ

• تشاكل تام زمرا حيث $\varphi : S_n \to \mathbb{Z}_2$

$$\sigma \to \begin{cases} 0 & \sigma \text{ زوجي} \\ 1 & \sigma \text{ فردي} \end{cases}$$

$\ker\varphi = A_n$

(زمرة التناوبات)

$$S_n / A_n \simeq \mathbb{Z}_2$$

• تشاكل تام زمرا. $\varphi : GL(n,\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^\times, \circ)$

$A \to \det A.$

$\ker\varphi = SL(n,\mathbb{R})$

عندئذ

$$GL(n,\mathbb{R}) / SL(n,\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}^\times, \circ)$$

• دائرة الوحدة. $G = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1 \}$

$G = \{ e^{ix} \,/\, x \in \mathbb{R} \}$

تشاكل φ أيضا شامل. $\varphi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (G, \times)$

$x \longrightarrow e^{2\pi i x}$

$$\varphi(x+y) = e^{2\pi i (x+y)} = e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i y} = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

$$\ker\varphi = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, \varphi(x) = 1 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \,/\, e^{2\pi i x} = 1 \} = \mathbb{Z}$$

عندئذ

$$\mathbb{R} / \mathbb{Z} \simeq G$$ دائرة الوحدة

• هل يوجد تشاكل غير تافه بين $\mathbb{Z}_{12}$ و $\mathbb{Z}_5$ ؟

نفترض أنه يوجد تشاكل غير تافه

$$\varphi : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$$

فإن $|\varphi(\mathbb{Z}_{12})| \mid |\mathbb{Z}_{12}| = 12$ لكن $\varphi(\mathbb{Z}_{12}) \leq \mathbb{Z}_5$

ولذا فإن $|\varphi(\mathbb{Z}_{12})| \mid |\mathbb{Z}_5| = 5$ يعني $5 \mid 12$ ↯

← لقد بينا سابقاً أن

$H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$ فإن $HK \leq G$

مبرهنة ٢ :

إذا كانت $H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$ فإن

$$\boxed{H/_{H\cap K} \simeq HK/_K}$$

الإثبات: $\varphi : H \longrightarrow HK/_K$, $h \longrightarrow hK$ تشاكلاً لأن

$$\varphi(h_1h_2) = (h_1h_2)K = h_1K\,h_2K = \varphi(h_1)\varphi(h_2)$$

φ شامل لأنه إذا كان $(hk)K \in HK/_K$ فإن $\varphi(h) = hK \cancel{\not\equiv hK}$

• $h \in H\cap K \Leftrightarrow hK = K$ فإن $\varphi(h) = K \Leftrightarrow h \in \ker\varphi$

يعني $\ker\varphi = H\cap K$ وبالتالي

$$H/_{H\cap K} \simeq HK/_K$$

مثال: $G = \mathbb{Z}$ ، $H = 3\mathbb{Z}$, $K = 4\mathbb{Z}$

$$H\cap K = 3\mathbb{Z}\cap 4\mathbb{Z} = \mathrm{lcm}(3,4)\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$$

$$H + K = 3\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z} = \gcd(3,4)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

باستخدام المبرهنة

$$3\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_4$$

مبرهنة ٣ : إذا كانت كل من H و K زمر جزئية من G

حيث $H \leq K$ فان لدينا

① $K/H \trianglelefteq G/H$

② $(G/H)/(K/H) \simeq G/K$

$\varphi : G/H \to G/K$

$gH \to gK$

مثال : $G = \mathbb{Z}$ ، $H = n\mathbb{Z}$ و $K = m\mathbb{Z}$

نفترض أن $m \mid n$ فان $n\mathbb{Z} \lneq m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

باستخدام المبرهنة ٣ :

$$\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)/\left(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_m$$

تمرين ١ : إذا كانت G و G_1 زمرتين وكانت $K \trianglelefteq G$ و $K_1 \trianglelefteq G_1$

فالمطلوب اثبات أن $K \times K_1 \trianglelefteq G \times G_1$ وأن

$$(G \times G_1)/(K \times K_1) \simeq (G/K) \times (G_1/K_1)$$

الحل :

$\pi : G \to G/K$

$\pi_1 : G_1 \to G_1/K_1$

التشاكلات الطبيعية الغامرة .

نأخذ $\varphi : G \times G_1 \to G/K \times G_1/K_1$

$(x, y) \to (\pi(x), \pi_1(y))$

تشاكل غامر

$$\operatorname{Ker} \varphi = K \times K_1$$

فان $K \times K_1 \trianglelefteq G \times G_1$ ولدينا $G \times G_1 / K \times K_1 \simeq (G/K) \times (G_1/K_1)$

تمرين 2: لتكن كل من H و K زمر جزئية من الزمرة المنتهية G

حيث $[G:K]=[G:H]=2$

و $H\neq K$ أثبت أن $[G:H\cap K]=4$

و أن $G/(H\cap K)$ ليست دورية .

الحل: بما أن الدليل يساوي 2 فإن $H \lhd G$ و $K \lhd G$

و لذا فإن $(H\cap K) \lhd G$

باستخدام مبرهنة 2 للتماثل :

$$H/(H\cap K) \simeq HK/K$$

$$[H:H\cap K]=[HK:K]$$

$$2=[G:K]=[G:HK]\times[HK:K]$$

فإن $[HK:K]=2$ لأن $H\neq K$

$$[G:H\cap K]=[G:H]\,[H:H\cap K]$$
$$=[G:H]\,[HK:K]=2\times 2=4$$

و أخيرا $G/(H\cap K)$ ليست دورية لأنها تحتوي على زمرتين من الرتبة 2 .

$|G/H\cap K|=4$

$|G/H|=2$

$|G/K|=2$

$G/H\cap K \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

⚠ $\gcd(m,n)=1 \iff m\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}_n$, $8\mathbb{Z}/56\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}_7$, $4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}_3$

$(\mathbb{C},+)/(\mathbb{R},+)\simeq(\mathbb{R},+)$

زمرة التماثلات الذاتية (Group of Automorphisms)

تعريف: يسمى التشاكل $\varphi : G \to G$ تشاكلاً ذاتيًا.
وإذا كان φ تماثلاً فإنه يسمى تماثلاً ذاتيًا.
نرمز لمجموعة التماثلات الذاتية على زمرة G بالرمز $Aut(G)$

مبرهنة: إذا كانت G زمرة فإن $(Aut(G), \circ)$ زمرة جزئية من $(S_G, \circ)$ هي زمرة التبديلات على G.

الإثبات: $I : \begin{matrix} G \to G \\ x \to x \end{matrix}$ تماثل فإن $I \in Aut(G)$

أي أن $Aut(G) \neq \phi$.

نأخذ $\varphi, \psi \in Aut\, G$ بما أن φ و ψ تقابل فإن $\varphi \circ \psi$ هو تقابل.

$$(\varphi \circ \psi)(xy) = \varphi(\psi(xy)) = \varphi(\psi(x)\psi(y)).$$
$$= \varphi(\psi(x))\, \varphi(\psi(y))$$
$$= (\varphi \circ \psi)(x)\ (\varphi \circ \psi)(y)$$

فإن $\varphi \circ \psi \in Aut(G)$

ونأخذ $\varphi \in Aut(G)$ فإن φ^{-1} تقابل أيضا وأن لكل $x, y \in G$

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)) = \varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(\varphi^{-1}(y))$$
$$= I(x)\ I(y) = xy$$

فإن $\varphi^{-1} \in Aut(G)$

وبالتالي $Aut(G) \leq S_G$.

تعريف: تسمى $Aut(G)$ بزمرة التماثلات الذاتية لـ G

مبرهنة: لتكن G زمرة وليكن $a \in G$. إذا كان التطبيق

$$\varphi_a : G \longrightarrow G$$
$$x \longrightarrow axa^{-1}$$

فإن

① $\varphi_a \in \mathrm{Aut}\, G$

② $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$ لكل $a, b \in G$

③ $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$

④ $\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(a)}$ لكل $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$

الاثبات. ① φ_a أحادياً لأن $\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1}$
$\Rightarrow x = y$

φ_a شامل لأنه لو كان $y \in G$ خذ $x = a^{-1}ya$

فإن $\varphi(x) = \varphi(a^{-1}ya) = y$

φ_a تشاكل لأنه لو كان $x, y \in G$ فإن

$\varphi_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \varphi_a(x)\varphi_a(y)$

إذن $\varphi_a \in \mathrm{Aut}\, G$.

② أخذ $a, b \in G$ و $x \in G$

$\varphi_a \circ \varphi_b(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(bxb^{-1})$
$= abxb^{-1}a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = \varphi_{ab}(x)$

إذن $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$

③ $\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = \varphi_{aa^{-1}} = \varphi_e = I$ لذا فإن $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$

④ نأخذ $\psi \in \mathrm{Aut}\, G$ عندئذ لكل $x \in G$ لدينا

$(\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1})(x) = \psi(\varphi_a(\psi^{-1}(x))) = \psi(a\psi^{-1}(x)a^{-1})$
$= \psi(a)\, \psi(\psi^{-1}(x))\, \psi(a^{-1})$
$= \psi(a)\, x\, (\psi(a))^{-1} = \varphi_{\psi(a)}(x)$.

يعني $\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(a)}$.

تعريف: لتكن G زمرة. تسمى المجموعة الجزئية $Inn(G)=\{\varphi_a\in Aut(G);\ a\in G\}$ مجموعة التماثلات الذاتية الداخلية للزمرة G.

(inner automorphisms of G)

$\boxed{\text{مبرهنة: } Inn(G) \trianglelefteq Aut(G) \text{ لكل زمرة } G}$

الإثبات: • بما أن $I\in Inn(G)$ فإن $Inn(G)\neq\phi$

• إذا كان $\varphi_a,\varphi_b\in Inn(G)$ وكان $\psi\in Aut(G)$ فنجد أن

$$\varphi_a\circ\varphi_b^{-1}=\varphi_a\circ\varphi_{b^{-1}}=\varphi_{ab^{-1}}\in Inn(G)$$

إذن $Inn(G)\le Aut(G)$

• كذلك لدينا $\psi\circ\varphi_a\circ\psi^{-1}=\varphi_{\psi(a)}\in Inn(G)$ فإن $Inn(G)\trianglelefteq Aut(G)$.

مبرهنة: إذا كانت G زمرة وكان $H\le G$ فإن

$$N(H)/C(H) \simeq Aut(H)$$

حيث

$N(H)=\{x\in G\ /\ xHx^{-1}=H\}$ منظم H في G

$C(H)=\{x\in G\ /\ xhx^{-1}=h\ \ \forall h\in H\}$ مركز H في G

الإثبات: خذ

$$\varphi: N(H)\longrightarrow Aut(H),\quad a\longrightarrow \varphi(a)=\varphi_a$$

تشاكل

$$\begin{aligned}Ker\,\varphi &=\{a\in N(H):\ \varphi(a)=I=\varphi_e\}\\ &=\{a\in G\ /\ \varphi_a(h)=\varphi_e(h)\ \forall h\}\\ &=\{a\in G\ /\ aha^{-1}=h\ \forall h\in H\}\\ &=C(H)\end{aligned}$$

$$N(H)/C(H) \simeq \varphi(N(H)) \le Aut(H)$$

△ • إذا كانت G زمرة فإن $G/Z(G) \simeq Inn(G)$

خذ $G=H$، $N(G)=G$، $C(G)=Z(G)$

$\varphi(N(G))=\varphi(G)=Inn(G)$

• إذا كانت $|Inn(G)|=1 \iff G$ زمرة ابدالية

لأن : إذا كان G زمرة ابدالية فإن $Z(G)=G$ وبالتالي

$$1 = |G/Z(G)| = |Inn\, G|$$

العكس : إذا كان $|Inn\, G|=1$ فإن $\varphi_a=\varphi_e$ لكل $a\in G$

وبالتالي $a x a^{-1}=x$ لكل $a,x\in G$ يعني $ax=xa$ لكل $a,x\in G$

وبالتالي G ابدالية

<u>مثال</u> ① اثبت أن $Aut(S_3)\simeq S_3$

② اثبت أن $Inn(D_6)\simeq D_3$

③ أثبت أن $Aut(\mathbb{Z}_{12})\simeq U_{12}$ وبصفة عامة $Aut(\mathbb{Z}_n)\simeq U_n$ لكل $n>0$

<u>الحل</u> ①

$Z(S_3)=\{e\}$ باستخدام المبرهنة $S_3 \simeq Inn(S_3)$

$$(*) \qquad 6=|S_3| = |Inn(S_3)| \le |Aut(S_3)|$$

$$S_3 = \langle a, b\rangle$$

حيث $a=(1,2)$; $o(a)=2$

$b=(1,2,3)$; $o(b)=3$

$\varphi\in Aut(S_3)$ فإن $\varphi: S_3\longrightarrow S_3$ تماثل ذاتي يحدد

بمعرفة $\varphi(a)$ و $\varphi(b)$.

$$o(\varphi(a)) = o(a) = 2$$
$$o(\varphi(b)) = o(b) = 3$$

S_3 تحتوي على عنصرين الرتبة 3

على 3 عناصر من الرتبة 2

إذا $\left.\begin{array}{l}\varphi(a) \text{ له 3 خيارات} \\ \varphi(b) \text{ خيارين}\end{array}\right\} \Leftarrow |Aut(S_3)|\le 6 \quad (**)$

عندئذ $|Aut(S_3)|=6$ وبالتالي $Aut(S_3)\simeq S_3$

② $D_6=\langle a, b\rangle$ حيث $o(a)=6$, $o(b)=2$, $ba=a^{-1}b$

$Z(D_6)=\{e, a^3\}$ فإن $|Inn\, D_6| = |D_6/Z(D_6)| = 6$

$$|\mathrm{Inn}(D_6)| = 6$$

$\mathrm{Inn}(D_6) \simeq \mathbb{Z}_6$ أو $\mathrm{Inn}(D_6) \simeq \cancel{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3}$

$\simeq D_3$

إذا كانت $\mathrm{Inn}(D_6) \simeq \mathbb{Z}_6$ فإن $\mathrm{Inn}(D_6)$ دورية

ولذا فإن $D_6/Z(D_6)$ دورية ومنه نجد D_6 ابدالية $\lightning$

إذا $\mathrm{Inn}(D_6) \simeq D_3$

③ نريد اثبات أن $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \simeq U_n$ لكل $n \geq 1$

$U_n = \{k \in [\![1, n]\!], \gcd(k, n) = 1\}$

$\mathbb{Z}_n = \langle [1] \rangle$

$$f : \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \longrightarrow U_n$$

ابدالي وليس دوري بصفة عامة

$$\varphi \longrightarrow f(\varphi) = \varphi([1]) = [t]$$

لاحظ أن

$$m\,\varphi([1]) = \varphi([m])$$

$$\varphi([m]) = [0] \iff n \mid m$$ ولذا فإن $o(\varphi[1]) = n$

◦ f تشاكل

$\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$

$$f(\varphi \circ \psi)([1]) = (\varphi \circ \psi)[1]$$
$$= \varphi(\psi([1]))$$

لنفترض أن $\psi([1]) = [k]$,

$$f(\varphi \circ \psi)([1]) = \varphi([k]) = k\,\varphi([1]) = k[1]\,\varphi([1])$$
$$= [k]\,\varphi([1])$$
$$= \varphi([1])\,\psi([1])$$

◦ f أحادي

$$f(\varphi) = f(\psi) \Rightarrow \varphi([1]) = \psi([1])$$
$$\Rightarrow [k]\,\varphi([1]) = [k]\,\psi[1]$$
$$\varphi[k] = \psi[k] \Rightarrow \varphi = \psi$$

◦ f شامل

فصول الترافق : Conjugacy Classes ومبرهنة كوشي

تعريف : إذا كان p عدداً أولياً فإننا نقول أن الزمرة G هي زمرة من النوع p (p-group) إذا كانت رتبة كل من عناصرها قوة للعدد p وإذا كانت $H \leq G$ فإننا نقول إن H زمرة جزئية من النوع p إذا كانت H زمرة من النوع p.

⚠ إذا كانت $|G| = p^n$ حيث p أولي فإن G هي زمرة من النوع p لأن رتبة أي عنصر لا بد أن يقسم p^n.

تعريف : إذا أثرت الزمرة G على المجموعة A وكان $a \in A$ فإننا نقول إن a مثبتاً بالعنصر $g \in G$ إذا كان $g*a = a$ وإذا كان a مثبتاً لجميع عناصر G فإننا نقول إن a مثبتاً للزمرة G سنرمز

$$A_g = \{a \in A ; ga = a\}$$

$$A_G = \{a \in A , ga = a \ \forall g \in G\}$$

⚠ • $a \in A_G \iff ga = a$ لكل $g \in G$ يعني $[a] = \{a\}$ وبالتالي A_G هو اتحاد المدارات التي تحتوي كل منها على عنصر واحد فقط

• لنفرض الآن أن G تؤثر على المجموعة المنتهية A ولنفترض أن عدد المدارات G على A هو r.

$$|A| = \sum_{i=1}^{r} |[a_i]| = \sum_{i=1}^{r} [G : G_{a_i}]$$

$$\boxed{|A| = |A_G| + \sum_{i=k+1}^{r} [G : G_{a_i}]}$$

المبرهنة : إذا كانت G زمرة رتبتها p^n حيث p عدد أولي وإذا كانت G تؤثر على المجموعة المنتهية A فإن $|A| \equiv |A_G| \bmod p$

إذن
$$|A| = |A_G| + \sum_{i=k+1}^{r} [G:G_{a_i}]$$

و بما أن $[G:G_{a_i}] \,\big|\, |G|$ لكل $k+1 \le i \le r$

يعني p يقسم $[G:G_{a_i}]$ " " "

فإن p يقسم $(|A|-|A_G|)$ و بالتالي

$$|A| \equiv |A_G| \mod p$$

مبرهنة: إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H \le G$ بحيث $|H| = p^k$

حيث p عدد أولي لدينا

(أ) $[G:H] = [N(H):H] \mod p$

(ب) إذا كان $p \,\big|\, [G:H]$ فإن $N(H) \neq H$.

إذا أثرت الزمرة المنتهية G على نفسها بالترافق نحصل على:

(*) تسمى معادلة الفصول للزمرة G

$$\boxed{|G| = |Z(G)| + \sum_{i=k+1}^{r} [G:G_{a_i}]}$$

فصل الترافق

حيث r عدد المدارات و k عدد المدارات التي تحتوي كل منها على عنصر واحد فقط.

$$G_G = \{x \in G \,/\, gxg^{-1} = x \;\forall g \in G\}$$
$$= \{x \in G \,/\, gx = xg \;\forall g \in G\} = Z(G)$$

$$orb(x) = G_x = \{g \in G \,/\, gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \,/\, gx = xg\} = C(x)$$

⚠ إذا كانت G زمرة ابدالية منتهية وكان $x \in G$ فإن فصل الترافق لـ x
$$[x] = \{gxg^{-1} \,/\, g \in G\} = \{x\}$$
و بالتالي $|G| = |Z(G)|$ أي (*) لا تقدم شيء اضافي.

مثال ①: نعلم أن أي دورتين في S_n تكونان مترافقتين إذا كانتا متساويتين في الطول.

نأخذ S_3 فإن صفوف الترافق لـ S_3 هي:

$$\{e\}\ ;\ \{(1,2,3);(1,3,2)\}\ ;\ \{(1,2);(1,3);(2,3)\}$$

ولذا (*).

$$6 = |S_3| = |Z(G)| + \sum [G:G_{a_i}]$$
$$= 1 + 2+3$$

$\langle x\rangle \leq C(x)$

مبرهنة

$\boxed{\text{إذا كانت } G \text{ زمرة مرتبتها } p^n \text{ حيث } p \text{ أولي فإن } |Z(G)|>1}$

الإثبات:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=k+1}^{r}[G:G_{a_i}]$$

- إذا كانت $|G| = |Z(G)|$.

- إذا كانت $Z(G)$ زمرة جزئية فعلية من G، بما أن $[G:G_{a_i}] = \frac{|G|}{|G_{a_i}|}$ فإن p^l يقسم $[G:G_{a_i}]$ لكل $k+1 \leq l \leq r$

وبالتالي $p \mid [G:G_{a_i}]$ يعني $p \mid \left(|G| - \sum_{i=k+1}^{r}[G:G_{a_i}]\right)$

إذن $p \mid |Z(G)|$ فنستنتج أن $|Z(G)| \geq p$.

- **نتيجة 1**: إذا كانت G زمرة رتبتها p^2 فإن G ابدالية كلاً ن

بما أن $|Z(G)|>1$ فإن $|Z(G)|=p^2$ أو $|Z(G)|=p$

إذا كان $|Z(G)|=p^2$ فإن $G=Z(G)$ يعني G ابدالية.

متابعة

أما إذا كان $|Z(G)|=p$ فإن $|G/Z(G)|=p$ وبالتالي

$G/Z(G)$ دورية وبالتالي G ابدالية.

هل توجد زمرة غير ابدالية رتبتها 1681؟
$|G|=p^2=(41)^2$ 361
$|G|=19^2$ $841=(29)^2$
تذكير 2

يوجد زمرتان غير متشاكلتين من الرتبة p^2 حيث p عدد أولي
هما $\mathbb{Z}_{p^2}$ و $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

مبرهنة كوشي

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n وكان p عدداً أولياً
يقسم n فإن G تحتوي على عنصر من الرتبة p
ومن ثمة زمرة جزئية من الرتبة p.

الاثبات: الاستقراء الرياضي

نتيجة: إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p (أي رتبة أي عنصر من G هي قوة للعدد p) فإن $|G|=p^n$ لأنه
إذا كان q عدداً أولياً لا يساوي p ويقسم $|G|$ عندئذ باستخدام مبرهنة كوشي تحتوي G على عنصر رتبته q وهذا مستحيل). إذن p هو القاسم الوحيد الأولي لرتبة G وبالتالي $|G|=p^n$ حيث $n\geq 1$ (عدد صحيح).

تمرين: إذا كانت G زمرة من الرتبة pq حيث p و q عددان أوليان فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة

الحل: إذا كان $q=p$ فإن $|G|=p^2$ ولذا فإن G ابدالية وباستخدام مبرهنة كوشي نجد أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة p وهذه الزمرة ناظمية لأن G ابدالية.

- أما إذا كان $p>q$ فإننا نجد باستخدام مبرهنة كوشي أيضاً أن G تحتوي على زمرة جزئية H من الرتبة p فإن $H \trianglelefteq G$. (التمرين)

مبرهنات سيلو (Sylow Theorems)

لتكن G زمرة منتهية. لقد سبق أن برهنا باستخدام لاجرانج أن رتبة أي زمرة جزئية من G يجب أن تقسم رتبة G ولقد بينا أيضاً أن عكس مبرهنة لاجرانج صحيحاً للزمر الدورية والزمر الابدالية المنتهية لكن بصفة عامة غير صحيح للزمر المنتهية مثلاً لا يوجد زمرة جزئية رتبتها 6 لـ A_4.

مبرهنة ١ (مبرهنة سيلو الأولى)

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها $p^n m$ حيث p عدد أولي بحيث $gcd(p,m)=1$ و $n\geq 1$ عدد صحيح فإن

(أ) G تحتوي على زمر جزئية رتبتها p^k لكل $1\leq k\leq n$

(ب) إذا كانت $H\leq G$ حيث $|H|=p^k$ لكل $1\leq k< n$ فإنه يوجد زمرة جزئية K من G رتبتها p^{k+1} بحيث $H\trianglelefteq K$

تعريف: إذا كانت G زمرة منتهية وكان p عدداً أولياً يقسم $|G|$ فإننا نقول إن الزمرة الجزئية P من G هي زمرة سيلو من النوع p (Sylow p-group) إذا كانت P زمرة جزئية أعظمية من النوع p (أي أنها غير محتواة فعلياً في زمرة جزئية أخرى من نوع p).

سنرمز لها $Syl_p(G)$.

⚠ إذا كانت $|G|=p^n m$ حيث $p\nmid m$ فإن $|Syl_p(G)|=p^n$

مبرهنة [مبرهنة سيلو الثانية]:

إذا كانت $|G| = p^n m$ حيث p عدداً أولياً و $\gcd(p,m)=1$
($n \geq 1$ عدد صحيح)
وكانت $H, K \in Syl_p(G)$ فإن H و K مترافقتان (ومن ثم متشاكلتان) . (يعني يوجد $a \in G$ بحيث $H = aKa^{-1}$)

نتيجة ⟵ إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H \in Syl_p(G)$ فإن H وحيدة إذا وفقط إذا كانت $H \trianglelefteq G$.

لأن : إذا كانت H وحيدة فإن $|gHg^{-1}| = |H|$
يعني $gHg^{-1} \in Syl_p(G)$. إذن $gHg^{-1} = H$
وبالتالي $H \trianglelefteq G$

والعكس نفترض أن $H \trianglelefteq G$ و $K \in Syl_p(G)$
باستخدام مبرهنة سيلو الثانية إنه يوجد $x \in G$ بحيث
$xHx^{-1} = K$ لكن $xHx^{-1} = H$ فإن $H = K$

مبرهنة (سيلو الثالثة)

إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة $p^n m$ حيث
p عدد أولي و $n \geq 1$ (عدد صحيح) و $\gcd(p,m)=1$.
إذا كان n_p عدد زمر سيلو الجزئية من النوع p فإن :

(أ) $n_p \equiv 1 \mod p$

(ب) $n_p \mid |G|$

مثال : $|S_3| = 3 \times 2$

$$n_2 \equiv 1 \mod 2$$
$$n_2 \mid 6$$
$$\Rightarrow n_2 \in \{1, \cancel{2}, 3, \cancel{6}\}$$

ولكن $\begin{cases} \langle (2,3) \rangle \\ \langle (1,3) \rangle \\ \langle (1,2) \rangle \end{cases}$ زمر 2- سيلو في S_3

فإن $\boxed{n_2 = 3}$

$$n_3 \in \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{6}\} \Leftarrow \begin{cases} n_3 = 1 \mod 3 \\ n_3 \mid 6 \end{cases}$$

إذن توجد زمرة سيلو وحيدة من النوع 3 وهي $H = \langle (1,2,3) \rangle$

ومن ثم فإن $H \triangleleft S_3$ (يعني S_3 ليست بسيطة)

مثال: حدد جميع زمر سيلو الجزئية للزمرة A_4.

الحل: نعلم أن $|A_4| = 12 = 4 \times 3$

$= 2^2 \times 3$

$$n_2 \in \{1, 3\} \Leftarrow \begin{cases} n_2 = 1 \mod 2 \\ n_2 \mid 3 \end{cases}$$

بما أن ... لا حاجة نعلم أن زمرة جزئية من A_4 رتبتها 4 لا يمكن أن تحتوي على دورة طولها 3.

فإن $n_2 = 1$ (زمرة وحيدة طولها 4)

$$H = \{(1); (1,3)\circ(2,4); (1,4)\circ(2,3); (1,2)\circ(3,4)\} \triangleleft A_4$$

$$n_3 = \{1, 4\} \qquad \begin{cases} n_3 = 1 \mod 3 \\ n_3 \mid 4 \end{cases}$$

4 زمر طولها 3

$$\begin{cases} H_1 = \langle (1,2,3) \rangle \\ H_2 = \langle (1,2,4) \rangle \\ H_3 = \langle (1,3,4) \rangle \\ H_4 = \langle (2,3,4) \rangle \end{cases}$$

وبالتالي $n_3 = 4$.

مثال: بيّن أن إذا كانت G زمرة ذات رتبة 40 فهي غير بسيطة.

الحل: $40 = 2^3 . 5$ باستخدام سيلو:

$$\begin{cases} n_2 = 1 \mod (2) \\ n_2 \mid 5 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} n_5 = 1 \mod 5 \\ n_5 \mid 2^3 \end{cases}$$

$n_2 \in \{1,5\}$

$n_5 \in \{1, \cancel{2}, \cancel{4}, \cancel{8}\}$

إذا يوجد زمرة سيلو وحيدة ذات رتبة 5 وبالتالي

$Syl_5(G) \triangleleft G$ يعني G ليست بسيطة.

مثال: أثبت أن زمرة G ذات رتبة 30 ليست بسيطة.

حل: نأخذ G زمرة بحيث $|G|=30$. $30 = 2\times3\times5$

باستخدام سيلو: لدينا

$n_2 \in \{1,3,5,15\}$ $\begin{cases} n_2 = 1 \mod 2 \\ n_2 \mid 15 \end{cases}$

$\begin{cases} n_3 = 1 \mod 3 \\ n_3 \mid 10 \end{cases} \Rightarrow n_3 \in \{1, \cancel{2}, \cancel{5}, 10\}$

$\begin{cases} n_5 = 1 \mod 5 \\ n_5 \mid 6 \end{cases}$

$\Rightarrow n_5 \in \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, 6\}$

نفترض $n_3 = 10$ و $n_5 = 6$

$|Syl_3(G)| = 3 \Leftarrow$ عنصرين مخالف للعنصر محايد

عندئذ $10.2 = 20$ عنصر مخالف لـ e

إذن لدينا 20 عنصر مختلف في G

$|Syl_5(G)| = 5 \Leftarrow$ 4 عناصر مخالف للعنصر محايد.

إذن لدينا 24 عنصر مخالف للعنصر المحايد

وبالتالي: $21 + 24 = 45 > |G|$

↯

عندئذ $n_3 = 1$ أو $n_5 = 1$ يعني $Syl_3 \triangleleft G$ أو $Syl_5 \triangleleft G$.

مثال : بين أن اذا كانت G زمرة رتبتها 77 فانها دورية

الحل : نأخذ زمرة G ذات رتبة 77 . $77=7\times 11$

باستخدام نظرية سيلو :

$$n_7 \in \{1, \cancel{11}\} \Leftarrow \begin{cases} n_7 \equiv 1 \mod 7 \\ n_7 \mid 11 \end{cases}$$

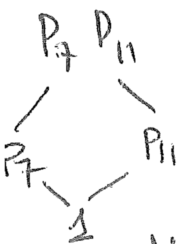
$$n_{11} \in \{1, \cancel{7}\} \Leftarrow \begin{cases} n_{11} \equiv 1 \mod 11 \\ n_{11} \mid 7 \end{cases}$$

عندئذ

$$Syl_7(G) \lhd G$$
$$Syl_{11}(G) \lhd G$$

$$\left| Syl_7(G)\, Syl_{11}(G) \right| = \frac{\left| Syl_7(G)\; Syl_{11}(G) \right|}{\left| Syl_7(G) \cap Syl_{11}(G) \right|}$$

$$= \frac{7\times 11}{\boxed{1}} = |G|$$



$$G/C_G(P_{11}) \simeq H \leq \underbrace{Aut(P_{11})}_{10 \text{ elements}}$$

$|H| \mid 10$ باستخدام لاجرانج

$\Rightarrow |C_G(P_{11})| = |G|$ هنا ابيودي

$P_{11} \leq Z(G)$

$P_7 \leq Z(G)$ بنفس الطريقة

$|xy| = 77 \quad \Rightarrow G = \langle xy \rangle \simeq \mathbb{Z}_{77}$

الباب الأخير: مبرهنات سيلو وتطبيقاتها

Sylow Theorems & its applications

§ تأثير الزمر على المجموعات (Group acting on sets)

تعريف: لتكن G زمرة ولتكن X مجموعة غير خالية. يعرف تأثير الزمرة G على المجموعة X بأنه تطبيق (action of a group on a set)

$$*: G\times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longrightarrow g*x$$

الذي يحقق ما يلي:

① $e*x = x$ لكل $x\in X$

② $(g_1 g_2) * x = g_1*(g_2*x)$ لكل $g_1, g_2\in G$

⚠ نقول ان G تؤثر على X.

مثال: • إذا كان $*: G\times X \to X$, $(g, x)\to x$ لكل $x\in X$ ، يسمى بالتأثير التافه

• إذا كانت G هي زمرة التبديلات على مجموعة X ونعرف

$$*: G\times X \longrightarrow X$$
$$(\sigma, x) \longrightarrow \sigma(x)$$

① $e*x = e(x) = x$ لكل $x\in X$

② $(\sigma_1\circ\sigma_2)*x = \sigma_1\circ\sigma_2(x) = \sigma_1(\sigma_2(x)) = \sigma_1*(\sigma_2*x)$ لكل $\sigma_1, \sigma_2\in G$

• V فضاء المتجهات على $\mathbb{R}$ فان

$$*: \mathbb{R}^*\times V \longrightarrow V$$
$$(\lambda, v) \longrightarrow \lambda v$$

① $1*v = v$ لكل $v\in V$

② $(\lambda\mu)*v = (\lambda\mu)v = \lambda*(\mu*v)$ لكل $\lambda, \mu\in\mathbb{R}^*$, $v\in V$

• إذا كانت G زمرة فانه من الواضح أن

$$*: G\times G \to G$$
$$(g_1, g_2)\to g_1 g_2$$

تأثير زمرة G على المجموعة G.

• إذا كانت $H \le G$ من الواضح أن $* : H\times G \to G$, $(h,g)\to hg$ تأثير الزمرة H على المجموعة G

• // // // $*: H\times G \to G$

$(h,g) \to hgh^{-1}$ //

لأن $e*g=g$ لكل $g\in G$

و $h_1*(h_2*g)=(h_1h_2)*g$ لكل $h_1,h_2\in H$ و $g\in G$

$h_1*(h_2gh_2^{-1}) = h_1h_2gh_2^{-1}h_1^{-1}$

$h_1h_2gh_2^{-1}h_1^{-1}$

يسمى بالتأثير بالترافق (action by conjugation)

مبرهنة لنفترض أن الزمرة G تؤثر على المجموعة X. إذا كانت $\sim$ علاقة معرفة على X كالتالي

لكل $x,y\in X$ ، $x\sim y \iff \exists g\in G / gx=y$.

فإن $\sim$ هي علاقة تكافؤ على X .

الإثبات: • $\sim$ انعكاسية لأن عندما نأخذ $x\in X$ لدينا $ex=x$ يعني $x\sim x$

• $\sim$ تناظرية لأن عندما نأخذ $x,y\in X$ ونفترض أن $x\sim y$ فإنه يوجد $g\in G$ بحيث $gx=y$ يعني $x=g^{-1}y$

وبالتالي $y\sim x$.

• $\sim$ متعدية لأن عندما نأخذ $x,y,z\in X$ ونفترض أن $x\sim y$ و $y\sim z$ فإنه يوجد g_1 و g_2 في G الذي يحقق

(1) $y=g_1x$

و

(2) $z=g_2y$

باستبدال قيمة y في (2) نجد $z=(g_2g_1)x$ لذا فإن $x\sim z$

تعريف: لتكن الزمرة G تؤثر على المجموعة غير الخالية X.

(أ) تسمى فصول التكافؤ للعلاقة $\sim$ بمدارات G على X

$$Orb(x) = [x] = \{y \in X, \exists g \in G, gx = y\}$$

$$Orb(x) = \{gx , g \in G\}$$

(ب) يكون تأثير G على X متعديا إذا كان هناك مدار واحد فقط أي أنه لكل $x, y \in X$ يوجد $g \in G$ بحيث $gx = y$

⚠ • إذا أخذنا التأثير التافه $(g, x) \to x$ على المجموعة X فإن مدارات G على X هي X و يكون متعديا $\Leftrightarrow |X| = 1$

• إذا كانت $H \leq G$ وكان تأثير G على X متعديا فإنه ليس بالضرورة أن يكون تأثير H على X متعديا.

مثال: $H = \langle (1,2) ; (3,4) \rangle \leq S_4$ فإن مدارات H على $X = \{1, 2, 3, 4\}$ هي $\{1,2\}$ و $\{3,4\}$، و لذلك فإن تأثير H على X ليس متعديا (لا يمكن إيجاد $\sigma \in H$ بحيث $\sigma(2) = 3$)

مبرهنة: إذا كانت G الزمرة تؤثر على المجموعة X وكان $x \in X$ فإن

$$G_x = \{g \in G / gx = x\} \leq G$$

(Stabilizer of x)
مثبتة x.

تعريف: نعرف نواة التأثير G على X بـ

$$G_X = \{g \in G, gx = x \ \forall x \in X\} = \bigcap_{x \in X} G_x$$

نقول إن تأثير G على X تأثيرا أمينا إذا كانت $G_X = \{e\}$
faithful action

مثال: إذا كانت G زمرة وكانت $X=\{H : H\leq G\}$ وكان تأثير G
على X التأثير الترافقي

$$G\times X \to X$$
$$(g, H)\to gHg^{-1}$$

فإن الزمرة المثبتة
للعنصر H في X هي

$G_H=\{g\in G / gHg^{-1}=H\}$ هو المنظم $N(H)$

المبرهنة التالية تبين لنا العلاقة الوثيقة بين دليل G_x في G وبين عدد عناصر المدار $orb(x)$.

مبرهنة: إذا أثرت الزمرة G على المجموعة X فإن
$$[G : G_x]=|orb(x)| \quad \text{لكل } x\in X$$

الإثبات:
لنفترض أن $L=\{gG_x ; g\in G\}$ هي مجموعة جميع المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة الجزئية G_x في G
وليكن $Orb(x)=\{gx / g\in G\}$ مدار x
لنعرف

$$f : L \longrightarrow orb(x)$$
$$gG_x \longrightarrow f(gG_x)=gx$$

$$g_1G_x=g_2G_x \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1\in G_x \Leftrightarrow g_2^{-1}(g_1x)=x$$
$$\Leftrightarrow g_1x=g_2x \Leftrightarrow f(g_1G_x)=f(g_2G_x)$$

إذن f هو تطبيق أحادياً.
من الواضح أن f شامل لأنه إذا كان $y\in orb(x)$
فإنه يوجد $g\in G$ الذي يحقق $gx=y$
وبالتالي
$$f(gG_x)=gx=y$$
عندئذ
$$[G : G_x]=|L|=orb(x)$$

⚠ إذا أثرت الزمرة G على مجموعة X وكانت $Y\subseteq X$ هي مجموعة ممثلات مدارات X فإن
$$|X|=\sum_{x\in Y}[G:G_x]$$

$$X = \bigcup_{x \in Y} orb(x)$$

$$|X| = \sum_{x \in Y} |orb(x)| = \sum_{x \in Y} [G : G_x]$$

ملاحظة: إذا أثرت الزمرة G على المجموعة X بالضرب من اليسار ($g*x = gx$) فإن

(أ) لكل $g \in G$ فإن $\tau_g : X \to X$, $x \to gx$ هو تبديلاً

(ب) $\tau_{g_1 g_2} = \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2}$ لكل $g_1, g_2 \in G$

(ج) يكون $\psi : G \to S_X$, $g \to \tau_g$ تشاكلاً

$\triangle 1$

• (مبرهنة كيلي المعممة): إذا كانت $H \le G$ وكانت $X = \{gH ; g \in G\}$ فإنه يوجد تشاكل $\psi : G \to S_X$ بحيث $Ker\,\psi \subseteq H$

• إذا كانت G زمرة فإن G تشاكل زمرة جزئية من S_X (حيث $H = \{e\}$ مبرهنة كيلي)

المبرهنة التالية تزودنا باختبار هام لوجود زمر جزئية ناظمية من زمرة منتهية G. تسمى بمبرهنة الدليل

مبرهنة: إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة المنتهية G حيث $[G:H] = n$ وإذا كان $|G| \nmid n!$ (لا يقسم) فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة

الإثبات: $\varphi : G \to S_n$ و $Ker\varphi \subseteq H$ فإن
تشاكل

$$G/_{Ker\varphi} \simeq \varphi(G) \leq S_n$$

$$\Leftarrow \quad \frac{|G|}{|Ker\varphi|} \text{ يقسم } n!$$

وبما أن $|G| \nmid n!$ فإن $|Ker\varphi| \neq 1$ وبالتالي $Ker\varphi$
هي زمرة جزئية ناظمية في G.

تطبيق ①

إذا كانت $H \leq G$ حيث $|G| = 80$ و $|H| = 16$ فإن $[G : H] = 5$
وبما أن 80 لا يقسم $5! = 120$ فإن G تحتوي
على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة.

② لتكن G زمرة منتهية من الرتبة pn حيث
p عدد أولي و $p > n$. ولتكن $H \leq G$ حيث $|H| = p$.
أثبت أن $H \trianglelefteq G$

لنأخذ $X = \{gH ; g \in G\}$ عندئذ

$$|X| = [G : H] = \frac{pn}{p} = n$$

ليكن

$\varphi : G \longrightarrow S_n$ تشاكل عندئذ

$Ker\varphi \subseteq H$ وبما أن $|H| = p$ فإن $Ker\varphi = \{e\}$
أو
$Ker\varphi = H$

إذا كان $Ker\varphi = \{e\}$ فإن $G \simeq$ (الزمرة الجزئية من S_n).

وبالتالي (pn) يقسم $n!$ يعني $p \mid (n-1)!$ ↯

لأن $p > n$ فإن $Ker\varphi = H$ يعني $H \trianglelefteq G$

الضرب المباشر للزمر: (Direct product of Groups)

تعريف:
إذا كان $G_1, \dots, G_n$ زمر فلقد اثبتنا أن

$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ هي زمرة

للعملية الثنائية

$$(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$$

تسمى الزمرة G زمرة الضرب المباشر الخارجي للزمر $G_1, \dots, G_n$
(external direct product)

الهدف: كيفية تعريف أي زمرة كحاصل ضرب مباشر لبعض زمرها الجزئية (لتصنيف الزمر).

$\boxed{\text{مبرهنة 11}}$ إذا كانت $G = G_1 \times \dots \times G_n$ و كان $a = (a_1, \dots, a_n) \in G$

حيث $o(a_i) = r_i$ لكل $1 \le i \le n$ فان

$$o(a) = lcm(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

مثال: احسب رتبة العنصر $([8],[4],[10]) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{24}$

الحل:

$$o([8]) = \frac{12}{gcd(8,12)} = 3$$

$$o([4]) = \frac{60}{gcd(4,60)} = 15$$

$$o([10]) = \frac{24}{gcd(10,24)} = 12$$

فان $o(([8],[4],[10])) = lcm(3,15,12)$
$= \underline{\underline{60}}$

مبرهنة: إذا كانت كل من $G=\langle a\rangle$ و $H=\langle b\rangle$ زمر دورية منتهية من الرتبة m و n على التوالي فان

$$\gcd(m,n)=1 \iff G\times H=\langle(a,b)\rangle \text{ زمرة دورية}$$

← **تعميم** $G=G_1\times\cdots\times G_n$

حيث G_i دورية منتهية ذات رتبة m_i

فان G دورية $\iff \gcd(m_i,m_j)=1$ لكل $i\neq j$

- إذا كان $m=n_1n_2\cdots n_k$ فان

$$\gcd(n_i,n_j)=1 \iff \mathbb{Z}_m\simeq\mathbb{Z}_{n_1}\times\mathbb{Z}_{n_2}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{n_k}$$

لكل $i\neq j$

- إذا $n=p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}$ هو تحليل العدد n إلى قوى عوامله الاولية $p_1,\ldots,p_k$ فان

$$\mathbb{Z}_n\simeq\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$$

$60|\frac{2}{30}|\frac{2}{15}|\frac{3}{5}$

مثال: $60=2^2\times3\times5$

$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5\simeq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_5\simeq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{30}$$

تعريف: نقول إن G هي زمرة الضرب المباشر الداخلي
Internal direct product
للزمر الجزئية الناظمية $H_1,\ldots,H_n$ من G إذا كان لكل $a\in G$ يوجد $a_i\in H_i$ لكل i بحيث $a=a_1a_2\cdots a_n$.

مبرهنة: تكون الزمرة G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية الناظمية $H_1, \dots, H_n$ من G إذا وفقط إذا كان:

$$G = H_1 \cdots H_n \quad ①$$

$$\{e\} = H_i \cap (H_1 H_2 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_n) \quad ②$$ لكل $1 \leq i \leq n$

المبرهنة التالية تبين لنا امكانية اعتبار الضرب المباشر الخارجي ضربا مباشرا داخليا.

مبرهنة: إذا كانت $G = G_1 \times G_2 \cdots \times G_n$ زمرة ضرب مباشر خارجي وكانت

$$H_i = \{(e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n) \; a_i \in G_i\}$$ لكل $1 \leq i \leq n$

① $H_i \lhd G$ لكل $1 \leq i \leq n$

② $H_i \simeq G_i$

③ G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر $H_1, \dots, H_n$

$\Leftarrow \quad G \simeq H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$

نقول أن G **متحللة**

مثال: • S_3 غير متحللة

$S_3 \not\simeq \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3}_{\text{ابدالية}}$

• $\mathbb{Z}_n$ غير متحللة $\Leftrightarrow$ $n = p^k$ حيث p أولي

$k \geq 1$ عدد صحيح

ملاحظة إذا كانت G زمرة منتهية فان G زمرة ضرب مباشر لزمر غير متحللة

مبرهنة [المبرهنة الاساسية للزمر الابدالية المنتهية]

إذا كانت G زمرة ابدالية منتهية فان G ضرب مباشر لزمر دورية رتبة كل منها قوة لعدد اولي p وعلاوة على ذلك فان طريقة كتابة G كضرب مباشر وحيدة باستثناء الترتيب

مثال جد جميع الزمر الابدالية غير متماثلة من الرتبة 720

الحل :

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

- $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
- $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
- $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
- $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$

$\boxed{10}$

$U_n = \{[a] \in \mathbb{Z}_n \ / \ gcd(a,n)=1\} \simeq Aut(\mathbb{Z}_n)$

زمرة ابدالية
وليست دورية

مبرهنة :

$$\boxed{n = 1, 2, 4, p^k, 2p^k \Leftrightarrow U_n \text{ دورية}}$$

حيث p أولي فردي
و $k \geq 1$ عدد صحيح

$$\boxed{U_{mn} \simeq U_m \times U_n \Leftarrow gcd(m,n)=1}$$

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$$

مثال :

$$U_{720} \simeq U_{16} \times U_9 \times U_5$$

$$U_{65} \simeq U_5 \times U_{13} \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$$

$$\simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$$

فإن $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \{[0]\}$ زمرة جزئية من U_{65}

تماثل $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

مبرهنة إذا كان $|G| = 2p$ حيث p أولي

$$G \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_{2p} & \text{فإن ابدالي} \\ D_p & \text{غير ابدالي} \end{cases}$$

د. ابرهان

التمارين: (الجزء الأول)

تمرين ١:

إذا كانت G زمرة حيث $a^2=e$ لكل $a\in G$ فأثبت أن G زمرة ابدالية.

تمرين ٢:

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها $2n$ فأثبت أنه يوجد $e\neq a\in G$ بحيث $a^2=e$.

تمرين ٣:

إذا كانت G زمرة حيث $(ab)^3=a^3b^3$ و $(ab)^5=a^5b^5$ لكل $a,b\in G$

فأثبت أن G زمرة ابدالية.

تمرين ٤:

إذا كانت G زمرة وكان $a,b\in G$ حيث $a^{-1}b^2a=b^3$ و $a^2=e$ فأثبت أن $b^5=e$.

تمرين ٥: إذا كانت G زمرة وكان $a,b\in G$ فأثبت أن

(أ) $o(a)=o(a^{-1})$

(ب) $o(a)=o(b^{-1}ab)$

(ت) $o(ab)=o(ba)$

تمرين ٦: لتكن G زمرة منتهية وليكن $g,h\in G$ حيث $g^5=e$, $ghg^{-1}=h^2$.

أثبت أن $o(h)=31$.

تمرين ٧: ليكن G زمرة و H و K زمر جزئية من G. أثبت أن

$H\cup K$ هي زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان $H\leq K$ أو $K\leq H$.

تمرين ٨: نضع $SL_2(\mathbb{Z})=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \middle/ \begin{array}{l} a,b,c,d\in\mathbb{Z}\\ ad-bc=1\end{array}\right\}$ (الزمرة الخطية الخاصة من درجة n على $\mathbb{Z}$)

(أ) اثبت أن $SL_2(\mathbb{Z})\leq GL_2(\mathbb{Z})$

(ب) لتكن $A=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$. بين أن $O(A)<\infty$ و $O(B)<\infty$

لكن $O(AB)=\infty$.

تمرين ٩ : لتكن G زمرة و كلا من H و K زمر جزئية من G.

(أ) اثبت أن $HK = \{xy \mid x \in H, y \in K\} \le G \iff HK = KH$

(ب) اثبت أن إذا كان $|H| < \infty$ و $|K| < \infty$ فإن $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$

طريقة ثانية: باستخدام مبرهنة لاجرانج:

نضع $N = H \cap K$ بما أن $N \le H$ فإن $|N| \mid |H|$

نضع $[H:N] = \frac{|H|}{|N|} = n$.

$$\{a_1 N, \dots, a_n N\}$$

$$H = \bigcup_{i=1}^{n} a_i N$$

$$N \le K$$

$$HK = \left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i N\right) K = \bigcup_{i=1}^{n} a_i K$$

$a_i K \cap a_j K = \emptyset$, $i \neq j$

$a_i K \simeq a_i$

$$|HK| = |a_1 K| + \dots + |a_n K| = n|K| = \frac{|H|\,|K|}{|H \cap K|}$$

$|a_i K| = |K|$

إذا كان $|H| > \sqrt{|G|}$ و $|K| > \sqrt{|G|}$ فإن $|H \cap K| > 1$

$$|G| \ge |HK| = \frac{|H|\,|K|}{|H \cap K|} > \frac{|G|}{|H \cap G|}$$

الحل:

س 1

نأخذ $a, b \in G$ لدينا

$a^2 = e$ إذن $a = a^{-1}$

$b^2 = e$ إذن $b = b^{-1}$

$$(ab)^2 = e \iff (ab)(ab) = e$$

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$$

س 2 نضع $S = \{ g \in G \,/\, g \neq g^{-1} \}$. نرى أن إذا كان $g \in S$ فإن $g^{-1} \in S$

$$e \notin S$$

ولذا $|S|$ هو عدد زوجي فإن $|S \cup \{e\}|$ فردي

$S \cup \{e\} \subset G$ لكن $|G|$ زوجي إذن يوجد عنصر $a \in G$ لكن $a \notin S \cup \{e\}$

وبالتالي $a = a^{-1} \iff a^2 = e$.

س 3 نأخذ $a, b \in G$ نريد اثبات أن $ab = ba$ ؟

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = a^3b^3 = a\,a^2b^2\,b$$

$$(ba)(ba) = \boxed{a^2b^2 = (ba)^2}$$

$$\cancel{(ba)^4 = (a^2b^2)(a^2b^2)}$$

$$(ab)^5 = ab\,ab\,ab\,ab\,ab = a\,\underbrace{a^4}_{a^5}\,\underbrace{b^4}_{b^5}\,b$$

$$\boxed{(ba)^4 = a^4b^4}$$

$$a^4b^4 = (ba)^4 = [(ba)^2]^2 = [a^2b^2]^2$$

$$a^2\,a^2b^2\,b^2 = a^2b^2\,a^2b^2$$

$$a^2b^2 = b^2a^2 = (ba)^2 \qquad aabb = b$$

$$bbaa = baba \Rightarrow \boxed{ba = ab}$$

$a^{-1} = a$ يعني $a^2 = e$ $\boxed{\text{س } 4}$

- $a^{-1} b^2 a = b^3 \Rightarrow b^2 a = a b^3$

$\Rightarrow a = b^{-2} a b^3$

- $e = a^2 = (b^{-2} a b^3)(b^{-2} a b^3)$

$= b^{-2} a b a b^3 \Rightarrow \boxed{b^2 = abab^3}$

$\Rightarrow e = abab \Rightarrow a^{-1} = bab$

$\boxed{a = bab}$

$b^3 = \underbrace{bab}_{a^{-1}} b^2 a = \boxed{a} bba$ abba

$a = bba$

$b^5 = b^3 b^2 = abbaabab$

$b^5 = b^1 b^3 b^1 = babbab = a^2 = e$

$ghg^{-1} = h^2$; $g^5 = e$ $\boxed{\text{س } 7}$

$o(g) \le 5$

$h^4 = ghg^{-1} ghg^{-1}$

$h^4 = g h^2 g^{-1}$

$g^5 h g^{-5} = g^4 h^2 g^{-4}$

$= g^3 g h^2 g^{-1} g^{-3}$

$= g^3 h^4 g^{-3}$

$= g^2 g h^4 g^{-1} g^{-2}$

$= g^2 h^8 g^{-2}$

$= g\, g h^8 g^{-1} g^{-1}$

$= g\, h^{16} g^{-1} = h^{32}$

$g^5 h g^{-5} = h^{32}$ اذن

$h = h^{32}$

$h^{31} = e$

$o(h) = 31$ اذن

$\boxed{5\ \text{س}}$ (i) نفرض $o(a)=m$ أصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^n=e$

لدينا $a^m=e$ و $a=(a^{-1})^{-1}$

$$e=a^m=(a^{-1})^{-m}=[(a^{-1})^m]^{-1}$$

$$(a^{-1})^m=e$$

نفرض $o(a^{-1})=L$ عندئذ $\boxed{L \mid m}$

كذلك لدينا

$a^L=((a^{-1})^{-1})^L=((a^{-1})^L)^{-1}=e$ إذا $\boxed{m \mid L}$

فنستنتج أن $L=m$ يعني $o(a)=o(a^{-1})$

(ii) نفس الطريقة:

$$o(a)=m$$
$$o(b^{-1}ab)=L$$

$$(b^{-1}ab)^m=(b^{-1}ab)(b^{-1}ab)\cdots(b^{-1}ab)$$
$$=b^{-1}\underset{e}{a^m}b=b^{-1}b=e$$

إذا $\boxed{L \mid m}$

الآن $(b^{-1}ab)^L=b^{-1}a^Lb=e$

يعني $a^L=e$ عندئذ $\boxed{m \mid L}$

فنستنتج أن $m=L$ يعني $\boxed{o(a)=o(b^{-1}ab)}$

(iii) نفرض $o(ab)=m$ ولنثبت أن $m=n$

$o(ba)=n$

if $\gcd(\underset{o(a)}{m},\underset{o(b)}{n})=1$ then $o(ab)=m.n$

Δ

$$(ab)^m=(ab)(ab)\cdots(ab)=e$$
$$=a\,\underbrace{(ba)(ba)\cdots(ba)}\,b=e$$

$$(ba)^n=a\,\underbrace{(ba)(ba)\cdots\cdots(ba)}\,b=e$$

س ٧

"⇐" نفترض أن $H\cup K$ هي زمرة جزئية من G و $H \not\subset K$
فلنثبت أن $K \subset H$.

بما أن $H \not\subset K$ إذن يوجد $h \in H$ لكن $h \notin K$.

نأخذ $k \in K$ فلنثبت أن $k \in H$.

$hk \in H\cup K$ و $hk \notin K$ (لأن إذا كان $hk \in K$
$h = \underbrace{hk}_{K}\,\underbrace{k^{-1}}_{K} \in K$ تناقض)

هذا يؤدي أن $hk \in H$

$$k = h^{-1}(hk) \in H$$

"⇒" إذا كان $H \subset K$ فلنثبت أن $H\cup K$ زمرة جزئية من G.

وبما أن $H\cup K \subset K$ و K زمرة جزئية فإن $(H\cup K)$ هي أيضاً زمرة جزئية.

س ٩

(أ) "⇐" نفترض أن $HK \leq G$ فلنثبت أن $HK = KH$

نأخذ $h \in H$ و $k \in K$، $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in HK$،

$hk \in (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$

إذا كان $HK \subset KH$

والعكس صحيح لأن ~~$(kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in KH$~~

~~$kh \in (KH)^{-1} = H^{-1}K^{-1} = HK$~~

$HK \supset (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$ $\longrightarrow$ $KH \subset HK$

"⇒" إذا كان $HK = KH$ فلنثبت أن $HK \leq G$

$$(HK)(HK) \subset HK$$

$$(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} \subset KH = HK$$

(ب) نأخذ $h, h_0 \in H$ و $k, k_0 \in K$ لدينا $\underbrace{h_0 k_0}_{HK} = hk \Leftrightarrow \underbrace{h_0^{-1}h}_{H} = \underbrace{k_0 k^{-1}}_{K}$

إذن هذا العنصر لابد أن يكون في $H \cap K$. إذا ($\Rightarrow h_0 k_0 = hk$)

يوجد $u \in H\cap K$ بحيث $h = h_0 u$ و $k = u^{-1}k_0$

فنستنتج أن كل عنصر $h_0k_0 \in HK$ يوجد $|H\cap K|$ طريقة لكتابته في hk مع العلم أن $h \in H$، $k \in K$

$|HK| = |H|.|K| / |H\cap K|$

تمرين :

لتكن $S_{10} \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 3 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

① σ^{-1}

② فكك σ إلى دورات.

③ $sig\,\sigma = ?$

④ $ord(\sigma) = ?$

⑤ $\sigma^{147} = ?$

$(1,5) \to 1<j,\ \sigma(j)<5$ — 4 7 9 10 — 4

$(2,6) \to 2<j, \sigma(j)<6$ — 4 7 9 10 — 4

$(3,7) \to 3<j / \sigma(j)<7$ — 4 7 9 10 — 4

$(4,4) \to 4<j\ (\sigma(j)<4)$ — 7 9 10 — 3

$(5,8) \to 5<j\ (\sigma(j)<8)$ — 7 9 10 — 3

$(6,9) \to 6<j\ (\sigma(j)<9)$ — 7 9 10 — 3

$(7,3) \to 7<j\ (\sigma(j)<3)$ — 9 10 — 2

$(8,10) \to 8<j\ (\sigma(j)<10)$ — 9 10 — 2

$(9,2) \to 9<j\ (\sigma(j)<2)$ — 10 — 1

$(10,1) \to 10<j$ 0

الحل : ①

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

②

$\sigma = \cancel{(1,10)\circ(2,9,6)\circ(3,7)\circ(4)}$

$\sigma = (1,5,8,10)\circ(2,6,9)\circ(3,7)$

$sig\,\sigma = (-1)^{26} = 1$

$ord(\sigma) = lcm(4,3,2,1) = 12$

$(1,10,8,5)(7,3) = \sigma^{147} = \sigma^3$

$\boxed{1\ 5\ 8\ 10}$
5 8 10 1
8 10 1 5
$\boxed{10\ 1\ 5\ 8}$

$(1\ 5\ 8\ 10)^3 = (1,10,8,5)$

$(2\ 6\ 9)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 2 \\ 9 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} = (2,6,9) = I$

$3\to7\to3\to7$
$2\to6\to9..$

$(3,7)^3 = (7,3)$

3 7
7 3
3 7

س ١ أثبت أن $H=\left\{\underbrace{x+y\sqrt{3}} \;/\; \begin{matrix} x\in\mathbb{N},\, y\in\mathbb{Z} \\ x^2-3y^2=1 \end{matrix}\right\}$ هو زمرة جزئية من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

✓

الحل: • أولا إذا كان $a\in H$ فإن $a=x+y\sqrt{3}$ مع العلم $\begin{matrix} x\in\mathbb{N} \\ y\in\mathbb{Z} \end{matrix}$ و $x^2-3y^2=1$

$$x^2=1+3y^2$$

$$x=\sqrt{1+3y^2}>\sqrt{3}\,|y|$$ عندئذ $a>0$ يعني $H\subset\mathbb{R}_+^*$.

• $1\in H$ لأن $1=1+0\times\sqrt{3}$ و $1^2-3\cdot 0^2=1$.

• ليكن $a\in H$ نرى أن

$$\frac{1}{a}=\underset{\mathbb{N}}{x}\;\underset{\in\mathbb{Z}}{(-y)}\sqrt{3}$$

$$x^2-3(-y^2)=1$$

إذن $\frac{1}{a}\in H$.

• ليكن $a,b\in H$ فإن

نكتب
$$a=x+y\sqrt{3}$$
$$b=x'+y'\sqrt{3}$$
$$ab=(x+y\sqrt{3})(x'+y'\sqrt{3})$$
$$ab=\underbrace{(xx'+3yy')}_{\mathbb{N}}+\sqrt{3}\,(\underbrace{xy'+x'y}_{\in\mathbb{Z}})$$

$x>\sqrt{3}|y|$
$x'>\sqrt{3}|y'|$

$xx'+3yy'\geq 0$

$$(xx'+3yy')^2-3(xy'+x'y)^2=1$$

يعني $ab\in H$

س ٢ لتكن H و K زمرتين

(أ) لنثبت أن: "إذا كان h عنصر من H ذات رتبة p و k عنصر من K ذات رتبة q فإن (h,k) هو عنصر من $H\times K$ ذات رتبة $\operatorname{lcm}(p,q)$".

(ب) نفترض أن كلا من H و K دورية.

أثبت أن $(H\times K)$ دورية إذا وفقط إذا كان $\gcd(|H|,|K|)=1$

الحل: (أ)

$$(h,k)^n=1_{H\times K} \iff \begin{matrix} p\mid n \\ \text{و} \\ q\mid n \end{matrix}$$

إذن (h,k) هو عنصر من $H\times K$ ذات رتبة $\operatorname{lcm}(p,q)$.

(ب) نضع $|H|=p$ و $|K|=q$.

" $\Longrightarrow$ " نفترض أن $\gcd(p,q)=1$. إذا كان $\begin{matrix} H=\langle h\rangle \\ K=\langle k\rangle \end{matrix}$ فإن $pq=|\langle(h,k)\rangle|$

$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

س ٣

نعتبر $U_n = \{ k \in \mathbb{Z}_n^{\times} \mid gcd(k,n) = 1 \}$

أثبت أن $(U_n, \cdot)$ هي زمرة ابدالية منتهية ورتبتها $\varphi(n)$ دالة أويلر

الحل

- $[1]$ عنصر محايد. لكل $[a] \in U_n$ لدينا $[a] = [1][a] = [a][1]$
- نأخذ $[a] \in U_n$ فإن $gcd(a, n) = 1$ يستلزم يوجد $x, y \in \mathbb{Z}$

بحيث

$$ax + ny = 1$$

$$ax = 1 \mod [n]$$

يعني $[ax] = [a][x] = [1]$ إذن $[x]$ هو نظير $[a]$.

- التجميع والابدال واضحة من خلال عملية $\cdot_n$.

مثلا

$$U_8 = \{ [1], [3], [5], [7] \}$$

$(\mathbb{Z}_n^{*}, \times)$ زمرة إذا وفقط $n = p$ كسر أولي

مثال خذ $n = 4$

$$\mathbb{Z}_4^{\times} = \{ [1], [2], [3] \}$$

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	$\boxed{0}$	2
3	3	2	1

$[2]$ ليس له نظير

$[x] \in \mathbb{Z}_p^{*}$

$[x][y] = 1 \mod p$

$xy = 1 \mod p$

$p \mid xy - 1$

لاجرانج

- إذا كانت $|G| < 100$ وكانت $H, K \leq G$

حيث $|H| = 10$ و $|K| = 25$ فاثبت أن $|G| = 50$.

د. انور طهان

تمارين ٢ (مقرر نظرية الزمر)

س١ عيّن جميع الزمر الجزئية من $(\mathbb{Z}, +)$

س٢ إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H, K \le G$ حيث $\gcd(|H|,|K|)=1$ فاثبت أن $H \cap K = \{e\}$. عيّن الزمرة $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$

س٣ إذا كانت G زمرة وكانت $a, x \in G$ فاثبت أن $C(xax^{-1}) = x\,C(a)\,x^{-1}$

س٤ جد جميع الزمر الجزئية من Q_8.

س٥ جد جميع الزمر الجزئية من D_4.

س٦ بين أيًا من العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة:

(أ) كل من عناصر الزمرة الدورية G يولد الزمرة G. F $G=\langle a^t \rangle$; $|G|=|\langle a \rangle|=n$ $\Rightarrow \gcd(t,n)=1$

(ب) G زمرة ابدالية إذا وفقط إذا كانت G زمرة دورية. F Klein 4 - group

(ت) كل زمرة جزئية من زمرة ابدالية يجب أن تكون ابدالية. T

(ث) كل عنصر a في زمرة G يولد زمرة جزئية من G. T

(ج) S_n ليست دورية لكل $n \in \mathbb{Z}^+$. F عند $n=2$ لكن اذا $n \ge 3$ صح

(ح) اذا كانت G زمرة غير ابدالية فإن جميع الزمر الجزئية الفعلية من G غير ابدالية. F

(خ) كل زمرة G رتبتها أقل أو يساوي 4 هي زمرة دورية. F

(د) A_3 زمرة دورية. T لأن $|A_3|=3$

(ذ) إذا كانت جميع الزمر الجزئية الفعلية من الزمرة G دورية فإن G دورية. F

(ر) جميع الزمر الجزئية الفعلية غير التافهة من $(\mathbb{Z},+)$ زمر غير منتهية. T

(ز) إذا كان $H, K, L \le G$ حيث $H \cup K \subseteq L$ فإن $HK \le L$. T

(س) إذا كانت G زمرة غير ابدالية فإن $Z(G) \ne \{e\}$. F لأن $Z(S_n)=\{e\}$

(ش) توجد زمرة جزئية فعلية H من $(\mathbb{Z},+)$ تحتوي كلاً من $3\mathbb{Z}$ و $4\mathbb{Z}$. F

(ص) إذا كانت H الزمرة جزئية من $(\mathbb{R},+)$ حيث $\mathbb{Z} \subset H$ فإن $H=\mathbb{Q}$. F

(ض) إذا كانت H الزمرة جزئية من $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ حيث $\mathbb{Z}-\{0\} \subset H$ فإن $H=\mathbb{Q}^*$. T

س١ الحل : $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ وبما أن $H \leq \mathbb{Z}$ فإن H دوري $H = \langle k.1 \rangle$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

يعني $H = k\mathbb{Z}$.

س٢ لجزء أ ـ نأخذ $x \in H \cap K$ فإن $o(x) \,|\, |H|$ و $o(x) \,|\, |K|$ عندئذ $o(x) \,|\, \gcd$

فإن $o(x) = 1$

يعني $x = e$.

$H \cap K = \{e\}$

ـ بما أن $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ إذن يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$

سنثبت أن $k = \mathrm{lcm}(m,n)$

بما أن $k \in n\mathbb{Z}$ يعني $n | k$ $(\Rightarrow)$ $k = ns$

كذلك $k \in m\mathbb{Z}$ يعني $m | k$ $(\Rightarrow)$ $k = mk$

لنفترض أن $n | u$ و $m | u$ يعني $u \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ إذن $\boxed{k | u}$

لهذا فإن $\boxed{k = \mathrm{lcm}(m,n)}$

س٣ نأخذ $a, x \in G$ ؛

$$C(a) = \{ y \in G \,/\, ay = ya \}$$

$$C(\underbrace{xax^{-1}}_{z}) = \{ g \in G \,|\, g\underbrace{xax^{-1}}_{z} = \underbrace{xax^{-1}}_{z} g \}$$

$$x\, C(a)\, x^{-1} = \{ x g x^{-1} \,/\, ag = ga \}$$

نأخذ الآن $h \in x C(a) x^{-1}$ فلنثبت أن $h \in C(xax^{-1})$ (يعني $hxax^{-1} = xax^{-1}h$

بما أن $h \in x C(a) x^{-1}$ إذن يوجد $k \in C(a)$ بحيث $h = xkx^{-1}$ مع العلم $ka = ak$

$$h\,xax^{-1} = xkx^{-1}xax^{-1}$$

$$h\,xax^{-1} = xkax^{-1} = xakx^{-1} = xax^{-1}h$$

يعني $h \in C(xax^{-1})$

العكس نفترض أن $g \in C(xax^{-1})$ فلنثبت أن $g \in x C(a) x^{-1}$ (يعني يوجد $h \in C(a)$ بحيث $g = xhx^{-1}$

يعني أن نثبت أن $h = (x^{-1} g x) \in C(a)$

بما أن $g \in C(xax^{-1})$ لدينا $gxax^{-1} = xax^{-1}g$

$\boxed{\text{س } ٤}$

$ba = a^3b \;;\; a^2 = b^2 \;,\; o(a)=4 \;;\; Q_8 = \langle a, b\rangle$

$Q_8 = \{ e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b \}$

- $\langle e\rangle = \{e\} \leq Q_8$
- $\langle a^2\rangle = \{e, a^2\} \leq Q_8$
- $\langle a\rangle = \{e, a, a^2, a^3\} \leq Q_8$
- $\langle b\rangle = \{e, b, a^2, a^2b\} \leq Q_8$
- $\langle ab\rangle = \{e, ab, a^2, a^3b\} \leq Q_8$

سنثبت الآن أن جميع الزمر الجزئية لـ Q_8 هي دورية أولاً.
ثم ننظر إلى اتحادهما.

بما أن $a^3 \in \langle a\rangle$ عندئذ $\langle a^3\rangle \subseteq \langle a\rangle$ لكن $o(a^3) = 4$
$\parallel$
$o(a)$

بالتالي $\langle a\rangle \subseteq \langle a^3\rangle$

$a^2b = \langle ab\rangle = \langle a^3b\rangle$

$\boxed{\text{س } ٥}$

$D_4 = \langle a, b\rangle = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$
$ba = a^3b \;,\; o(b)=2 ;\; o(a)=4$

$H_0 = \langle e\rangle = \{e\}$
$H_1 = \langle a^2\rangle = \{e, a^2\}$
$H_2 = \langle b\rangle = \{e, b\}$ $\qquad (ab)(ab) = aa^3bb = e$
$H_3 = \langle ab\rangle = \{e, ab\}$
$H_4 = \langle a^2b\rangle = \{e, a^2b\}$ $\qquad a^2b\,a^2b$, baa, a^2a^3bab, $a\,bab$, aa^3bb
$H_5 = \langle a^3b\rangle = \{e, a^3b\}$
$T_1 = \langle a\rangle = \{e, a, a^2, a^3\}$

3 زمر ذي رتبة 4
5 زمر ذي رتبة 2

$D_4 = \langle T_1 \cup H_2\rangle = \langle T_1 \cup H_3\rangle = \langle T_1 \cup H_4\rangle = \langle T_1 \cup H_5\rangle$

$\langle H_4 \cup H_3\rangle = \langle H_4 \cup H_5\rangle = \langle H_2 \cup H_5\rangle = \langle H_2 \cup H_3\rangle = D_4$

$T_2 = \{e, a^2, b, a^2b\} \leq D_4$

$T_3 = \{e, a^2, ab, a^3b\} \leq D_4$

تمرين ١ : إذا كانت $H \leq G$ وكان $x^2 \in H$ لكل $x \in G$ فاثبت أن $H \lhd G$.

الحل: نأخذ $x \in G$ و $h \in H$. بما أن $(xh)^2 \in H$ فإن $h^{-1}, x^{-2} \in H$

$$\begin{aligned} xhx^{-1} &= xh(xh)(xh)^{-1}x^{-1} \\ &= xhxhh^{-1}x^{-1}x^{-1} \\ &= (xh)^2 h^{-1}(x^{-1})^2 \in H \end{aligned}$$

وبالتالي $H \lhd G$.

تعريف: نقول إن الزمرة $G \neq \{e\}$ بسيطة إذا كانت الزمر الجزئية الناظمية هي $\{e\}$ و G.

مثلا: • $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ بسيط اذا وفقط إذا كان p أوليّ.

• A_n بسيط إذا كان $n \geq 5$.

تمرين: إذا كانت $A, B \lhd G$ فاثبت أن $AB \lhd G$ إذا علمت أن $AB \leq G$

الحل: نأخذ $g \in G$ و $a \in A$, $b \in B$ علينا نثبت أن $g^{-1}abg \in AB$

$$g^{-1}abg = \underbrace{g^{-1}ag}_{\in A}\underbrace{g^{-1}bg}_{\in B} \in AB$$

$g^{-1}ag \in A$ لأن $A \lhd G$

$g^{-1}bg \in B$ لأن $B \lhd G$

تمرين٣: إذا كانت $H \leq G$ و $N \lhd G$ فاثبت أن $H \cap N \lhd H$.

الحل: نأخذ $h \in H$ و $g \in H \cap N$ فلنثبت أن $h^{-1}gh \in H \cap N$

$$h^{-1}gh = h^{-1}hg = g \in H \cap N$$ لأن $N \lhd G$, $gh = hg$

هل $H \cap N \lhd G$ ؟

تمرين ٤: إذا كانت H زمرة جزئية فعلية من G تحقق $xy\in H$ لكل $x,y\in G-H$ فأثبت أن $H\triangleleft G$.

الحل: نأخذ $g\in G$ و $h\in H$ فلنثبت أن $g^{-1}hg\in H$

• إذا كان $g\in H$. واضح لأن $H\le G$

• إذا كان $g\notin H$ فإن $g^{-1}\notin H$ عندئذ

$g^{-1}h\notin H$ (نفترض بالتناقض أن $g^{-1}h\in H$

$(\lightning\ g^{-1}=g^{-1}hh^{-1}\in H$

فنستنتج أن $\underbrace{g^{-1}h}_{\notin H}\underbrace{g}_{\notin H}\in H$. يعني $H\triangleleft G$

تمرين ٥: لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G ولتكن $H_G=\bigcap_{g\in G} g^{-1}Hg$

(أ) أثبت أن $H_G\triangleleft G$

(ب) إذا كانت $K\le H$ بحيث $K\triangleleft G$ فأثبت أن $K\le H_G$.

(ج) إذا كانت $G=GL(2,\mathbb{Q})$ وكانت $H=\{\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}; a,b\in\mathbb{Q}, ab\neq0\}$ فأثبت أن $H_G=\{\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix} a\in\mathbb{Q}^*\}$

الحل: (أ) بما أن $g^{-1}Hg\le G$ فإن H_G هي زمرة جزئية من G (كتقاطع زمر جزئية من G)

الآن نأخذ $x\in G$ و $y\in H_G$

فلنثبت أن $x^{-1}yx\in H_G$.

$y\in H_G$ يعني لكل $g\in G$ لدينا $y\in g^{-1}Hg$ ولذا فإن

$x^{-1}yx\in x^{-1}(g^{-1}Hg)x=(gx)^{-1}H(gx)$

$\in H_G$

وبالتالي $H_G\triangleleft G$

(ب) ~~نأخذ $x\in H_G$ و $y\in K$ فلنثبت أن $x^{-1}yx\in H_G$~~

~~بما أن $K\triangleleft G$ فإن $g^{-1}yg\in K$ لكل $g\in G$.~~

~~فنستنتج أن $x^{-1}yx\in x^{-1}Kx\subseteq x^{-1}Hx$~~

~~$y\in H_G$~~

• نأخذ $k\in K$. بما أن $K\triangleleft G$ فإن $g^{-1}kg\in K$ لكل $g\in G$

$k\in H_G$ يعني $k\in g^{-1}Kg\subseteq g^{-1}Hg$

(ج) نفترض أن

$$K=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} ;\ a\in \mathbb{Q}^*\right\}$$

من الواضح أن $K \lhd GL_2(\mathbb{Q})$

باستخدام (ب) $K\subseteq H_G$.

الآن نأخذ

$x=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\in H_G$ كذلك

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a-b\\ 0 & b\end{pmatrix}\in H_G\subseteq H$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a\\ 0 & b\end{pmatrix}$$

لابد $a-b=0$

يعني $a=b$ فإن

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

$x=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} ;\ a\neq 0$

هذا يعني أن $x\in K$

لذا $H_G=K$

تمرين 7: بيّن أيٍّ من العبارات التالية صادقة وأيها خاطئة:

$G=S_3$, $H=\langle \tau(1\,2)\rangle$, $H \not\lhd S_3$ خذ

① إذا كانت $H\leq G$ وكانت H ابدالية فإن $H\lhd G$ F

② إذا كانت $H\leq G$ وكانت G ابدالية فإن $N(H)=G$ T

③ إذا كانت $H\leq K\leq G$ وكانت $H\lhd G$ فإن $H\lhd K$ T

④ إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من زمرة منتهية فإن $[G:H]=2$ F

$G=Q_8$, $H=\{e,a^2\}$

$|H|=2$ لكن $H\lhd G$, $[G:H]=4$

[illegible]

⑤ إذا كانت $\varphi: G_1\to G_2$ تشاكلاً وكانت $H\lhd G_1$ فإن $\varphi(H)\lhd G_2$ F

$\boxed{\varphi(H)\lhd\varphi(G_1)}$

⑥ إذا كانت $H\lhd G$ فإن $xhx\in H$ لكل $x\in G$ ولكل $h\in H$ F

⑦ A_4 تحتوي على زمرة جزئية ناظمية رتبتها 9 F

$A_4 \lhd S_4$ لديها [illegible]

تمارين (التشاكلات)

س1 لتكن كل من G و H زمرة منتهية حيث $|G|=n$, $|H|=m$ و $\gcd(m,n)=1$
أثبت أن التشاكل الوحيد من G إلى H هو التشاكل التافه.

الحل: $\varphi : G \to H$ تشاكل.

ليكن $a \in G$. نعلم $o(a) \mid n$ و $o(\varphi(a)) \mid m$

~~كذلك~~ بما أن φ تشاكل فإن $o(\varphi(a)) \mid o(a)$

ولذا فإن $o(\varphi(a)) \mid n$

بما أن $\gcd(m,n)=1$ فإن $o(\varphi(a))=1$ يعني $\varphi(a)=e$

وبالتالي φ هو تشاكل تافه.

س2 عين جميع التشاكلات من $\mathbb{Z}_6$ إلى $\mathbb{Z}_4$.

الحل: ليكن $\varphi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_4$ تشاكلاً

بما أن $\mathbb{Z}_6 = \langle [1] \rangle$ فإن $\varphi([a]) = a\,\varphi([1])$
لكل $[a] \in \mathbb{Z}_6$

لتحديد φ يكفي أن نحدد قيمة $\varphi([1])$.

$o(\varphi[1]) \mid o([1])=6$ ولدينا أيضاً $o(\varphi([1])) \mid 4$ ومنه.

$o(\varphi([1])) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ يعني $\varphi([1]) = \begin{cases} [0] \\ [2] \end{cases}$

- إذا كان $\varphi([1])=[0]$ هو التشاكل التافه
- إذا كان $\varphi([1])=[2]$ فإن $\varphi([a])=[2a]$ لكل $[a] \in \mathbb{Z}_6$.

س٣ لتكن $(G, *)$ و (G', T) زمرتين و $\varphi: G \to G'$ تشاكلاً. أثبت ما يلي:

(أ) إذا كان $H \leq G$ فان $\varphi(H) \leq G'$.

(ب) إذا كان $H' \leq G'$ فان $\varphi^{-1}(H') \leq G$.

الحل: (أ) نأخذ $H \leq G$ فان $\varphi(H) \subseteq G'$

$\varphi(e) = e' \in \varphi(H)$ لأن $e \in H$ إذن $\varphi(H) \neq \phi$

ليكن $y, y' \in \varphi(H)$ إذن يوجد $x, x' \in H$ بحيث $\varphi(x) = y$، $\varphi(x') = y'$

$$y \, T \, y'^{-1} = \varphi(x) \, T \, (\varphi(x'))^{-1} = \varphi(x) \, T \, \varphi(x'^{-1})$$

$$= \varphi(x * x'^{-1}) \in \varphi(H)$$

فنستنج أن $\varphi(H) \leq G'$

(ب) $\varphi^{-1}(H') \subset G$ و $e \in \varphi^{-1}(H')$

لأن $\varphi(e) = e' \in H'$

لنأخذ $x, x' \in \varphi^{-1}(H')$. فان $\varphi(x) \in H'$، $\varphi(x') \in H'$

$$\varphi(x * x'^{-1}) = \varphi(x) \perp \varphi(x'^{-1})$$

$$= \varphi(x) \, T \, (\varphi(x'))^{-1} \in H'$$

لذا $x * x'^{-1} \in \varphi^{-1}(H')$

فنستنج أن $\varphi^{-1}(H')$ هي زمرة جزئية من G.

س٤ هل يوجد تماثل بين $(\mathbb{R}, +)$ و $(\mathbb{R}^*, \times)$ ؟

الحل: لا، المعادلة $x^2 = 1$ لها حلان في $(\mathbb{R}^*, \times)$

لكن المعادلة $2x = 0$ لها حلاً وحيداً في $(\mathbb{R}, +)$.

س5) اثبت ما يلي :

(أ) إذا كان $\varphi: G_1 \to G_2$ تشاكلاً وكانت $H \trianglelefteq G_1$ فأثبت
$\varphi(H) \trianglelefteq \varphi(G_1)$

(ب) إذا كان $\varphi: G_1 \to G_2$ تشاكلاً وكانت $H \trianglelefteq G_2$ فإن
$\varphi^{-1}(H) \trianglelefteq G_1$

(ج) إذا كان $\varphi: G_1 \to G_2$ تشاكلاً فأن $\varphi(Z(G_1)) \subseteq Z(\varphi(G_1))$.

الحل (أ) نأخذ $y \in \varphi(G)$ و $h' \in \varphi(H)$ فلنثبت $y^{-1}h'y \in \varphi(H)$

بما أن $y \in \varphi(G)$ يوجد $x \in G_1$ بحيث $\varphi(x) = y$
كذلك $h' \in \varphi(H)$ يوجد $h \in H$ بحيث $\varphi(h) = h'$

$$\therefore\ y^{-1}h'y = (\varphi(x))^{-1}\varphi(h)\varphi(x)$$
$$= \varphi(x^{-1}hx) \in \varphi(H)$$

لأن $x^{-1}hx \in H$ $(H \trianglelefteq G_1)$.

(ب) نأخذ $x \in G$ و $h \in \varphi^{-1}(H)$ فلنثبت أن $x^{-1}hx \in \varphi^{-1}(H)$

$$\varphi(x^{-1}hx) = \varphi(x^{-1})\underbrace{\varphi(h)}\varphi(x)$$
$$= \underset{G_2}{(\varphi(x))^{-1}}\ \underset{H}{h'}\ \underset{G_2}{\varphi(x)} \in H$$

لأن $H \trianglelefteq G_2$

وبالتالي $x^{-1}hx \in \varphi^{-1}(H)$. يعني $\varphi^{-1}(H) \trianglelefteq G_1$

(ج) $Z(G_1) = \{g \in G_1 \,/\, \forall x \in G_1,\ xg = gx\}$

نأخذ $h' \in \varphi(Z(G_1))$ إذن يوجد $h \in Z(G_1)$ بحيث $\varphi(h) = h'$

نأخذ $x \in G_1$ لدينا $xh = hx$

$$\varphi(xh) = \varphi(hx)$$
$$\varphi(x)\varphi(h) = \varphi(h)\varphi(x)$$
$$\varphi(x)\,h' = h'\,\varphi(x)$$

فإن $h' \in Z(\varphi(G_1))$

س 6 لتكن G زمرة منتهية غير ابدالية من الرتبة p^3 حيث p عدد أولي وليكن $Z(G) \neq \{e\}$. اثبت أن $Z(G)$ زمرة دورية .

الحل بما أن $Z(G) \trianglelefteq G$ فان $|Z(G)|$ يقسم $|G|$

ولذا فان $|Z(G)|=p$ أو $|Z(G)|=p^2$

• إذا كان $|Z(G)|=p^2$ فان $|G/Z(G)|=p$ وبالتالي

$G/Z(G)$ ~~المنتظمة~~ دورية ومنه G ابدالية (تناقض)

• إذا كان $|Z(G)|=p$ فبالتالي $Z(G) \simeq \mathbb{Z}_p$.

س 7 بين أيا من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

① يوجد تشاكل بين أي زمرتين . (T) حيث $\varphi: G_1 \to G_2$, $x \to e_2$ تشاكل تافه

② يوجد تشاكل غير تافه بين أي زمرتين (F)

③ يوجد تشاكل من زمرة غير منتهية إلى زمرة منتهية . T

④ من الممكن أن أي زمرتين من الرتبة 5 أن تكونا متماثلتين : T

⑤ إذا كانت كل من G و H زمرة منتهية حيث $|G|=|H|$ فان $G \simeq H$: F

⑥ إذا كانت كل من G و H زمر منتهية حيث $G \simeq H$ فان $|G|=|H|$: T

⑦ من الممكن أن تماثل زمرة ابدالية زمرة غير ابدالية . F

⑧ $(\mathbb{R},+)$ تماثل زمرة تبديلات . T

⑨ التطبيق $\varphi: G \to G$, $x \to x^{-1}$ تشاكل : F

$\varphi(xy)=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$
$=\varphi(y)\varphi(x)$
إذا كانت G ابدالية $\Leftarrow$

⑩ $S_3 \not\simeq \mathbb{Z}_6$. T

⑪ إذا كان $\varphi: \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4$ تشاكل غامر فان $\ker\varphi=\{[0],[4]\}$ T

⑫ يوجد تشاكل غامر من $(\mathbb{Q},+)$ إلى $(\mathbb{Z},+)$. F

⑬ إذا كانت $H \leq Z(G) \leq G$ حيث G/H دورية فان G ابدالية T

⑭ إذا كانت $G/Z(G)$ ~~المنتظمة~~ دورية فان $G/Z(G)$ هي الزمرة التافهة T

$G/Z(G)$ دورية
G ابدالية
$Z(G)=G$,

⑮ إذا كانت G ليست دورية وكان $H \trianglelefteq G$ فان G/H ليست دورية F

⑯ إذا كانت $H \trianglelefteq G$ وكانت G/H زمرة منتهية فان G زمرة منتهية F

تمارين

س ١ إذا كان $a,b \in G$ فأثبت أن $\varphi_a = \varphi_b \iff b^{-1}a \in Z(G)$

الحل: نأخذ $x \in G$

$$\varphi_a(x) = \varphi_b(x) \iff axa^{-1} = bxb^{-1}$$
$$\iff b^{-1}ax = xb^{-1}a$$
$$\iff b^{-1}a \in Z(G) = \{x \in G \mid gx = gx \ \forall g \in G\}$$

س ٢ إذا كان $\varphi_a \in Inn(G)$ فأثبت أن $o(\varphi_a)$ يقسم $o(a)$

الحل: نضع $o(\varphi_a) = m$ إذن $\varphi_a^m = I$. نأخذ $x \in G$

$$\varphi_{a^m}(x) = \varphi_a^m(x) = I(x) = \varphi_e(x)$$

إذن $a^m = e$ ~~$\varphi_a(x)\circ\varphi_a(x)\ldots\varphi_a(x) = I(x) = x$~~ ~~$axa^{-1}\ axa^{-1}\ldots axa^{-1}$~~ $ax^m a^{-1} = x \Rightarrow x$

فإن $m \mid o(a)$

$x = a^{-1}$ $a^{-1} = a^{m-1}$ $a^m = I$

س ٣ إذا كان $Z(G) = \{e\}$ فأثبت أن $Z(Aut(G)) = \{e\}$. هل العكس صحيح؟

الحل نأخذ $\varphi_a \in Z(Aut(G))$ عندئذ لدينا

$$\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_b \circ \varphi_a$$ لكل $\varphi_b \in Aut(G)$

$$\varphi_{ab} = \varphi_{ba}$$

$a \in Z(G) \Leftrightarrow ab = ba \Leftarrow$

لكن $Z(G) = \{e\}$ فإن $a = e$

وبالتالي $Z(Aut(G)) = \{\varphi_e\}$

$Z(Aut(\mathbb{Z}_2)) = \{I\}$ $\boxed{\text{العكس غير صحيح}}$

لكن $Z(\mathbb{Z}_2) \neq \{e\}$

س ٤ إذا كانت $Aut(G) = \{e\}$ فأثبت أن $G = \{e\}$ أو أن $G \simeq \mathbb{Z}_2$

الحل: $Inn\,G \lhd Aut(G)$

فإن $Inn\,G = \{e\}$ يعني $|Inn\,G| = 1 \Rightarrow G$ تبديلية

$\Leftarrow$ ∴

يماثل $(G / Z(G)) \simeq inn(G)$

تشاكل $G \xrightarrow{\varphi} Aut(G)$

$$g \longrightarrow c_g : G \to G$$
$$h \to ghg^{-1}$$

$$Ker\,\varphi = Z(G)$$

$G / Ker\,\varphi = Z(G) \simeq Aut(G)$

$a \in G$ لكل $\varphi_a = \varphi_e$

$axa^{-1} = x$

$a \in G$ لكل $ax = xa$

$a \in Z(G)$ م

س ٥ إذا كانت كل من G و H زمر منتهية حيث $\gcd(|G|,|H|)=1$

٧ وكان $\varphi: G \to H$ تشاكلا فأثبت أن φ هو التشاكل التافه

الحل: $\varphi: G \to H$ تشاكل و $a \in G$ فإن

$o(a) \mid |G|$ و $o(\varphi(a)) \mid o(a)$ ونعلم أن $o(\varphi(a)) \mid |H|$

يعني

$$\left.\begin{array}{l} o(\varphi(a)) \mid |H| \\ o(\varphi(a)) \mid |G| \end{array}\right\}$$ فإن $o(\varphi(a))=1$ وأن φ هو تافه

$\gcd(|H|,|G|)=1$

$\varphi_e=\varphi \quad \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_5$

س ٦ ليكن $\varphi: G \to G_1$ تشاكلا غامرا ولتكن $K \triangleleft G_1$

٧ حيث $[G_1 : K]=n$. إذا كانت $H=\varphi^{-1}(K)$ فأثبت أن $[G:H]=n$

مرحلة التقابل

الحل: بما أن $H=\varphi^{-1}(K)$ و $K \triangleleft G$ فإن $H \triangleleft G$ لأن φ تشاكلا

بما أن φ تشاكلا غامرا (شامل) ~~المجال يعني $|G|=|G_1|$~~

$H/\ker\varphi \simeq K \quad$ تشاكل غامر $\varphi_{|H} : H \to K \qquad \ker\varphi \leq H.$

~~$|G|=|G_1|$ وبما أن~~ $\frac{|G|}{[G:H]}=|H|=|K|=\frac{|G_1|}{[G_1:K]}$

~~$[G:H]=[G_1:K]=n$ إذن~~

$$[G:H]=\frac{|G|}{|H|}=\frac{|G_1|}{|K|}=[G_1$$

$$G/\ker\varphi \simeq G_1$$

$$|G| = |G_1| \times |\ker\varphi|$$

$$|H| = |K| \times |\ker\varphi|$$

$$|G| \times |K| = |G_1|\,|\cancel{K}|$$

س ٧ لتكن G زمرة. ~~المجموعة~~ نرمز لـ $D(G)$ الزمرة الجزئية المولدة

$S = \{aba^{-1}b^{-1} ; a, b \in G\}$

$D(G) = \langle S \rangle$ (زمرة المبدلات أو زمرة المشتقة)

derived group / commutator group

① أثبت أن G ابدالية $\Leftrightarrow D(G) = \{e_G\}$.

② أثبت أن $D(G) \triangleleft G$

③ $G/D(G)$ زمرة ابدالية.

الحل: ① نفترض أن G ابدالية (يعني لكل $x, y \in G$ فإن $xy = yx$).

نأخذ $x \in D(G)$ فإنه يوجد $a, b \in G$ بحيث $x = aba^{-1}b^{-1}$

$= aa^{-1}bb^{-1} = e$

لأن $ba^{-1} = a^{-1}b$

العكس نفترض أن $D(G) = \{e\}$. نأخذ $a, b \in G$.

بما أن $aba^{-1}b^{-1} = e$ فإن $aba^{-1} = b$

$ab = ba$ يعني G ابدالي.

② نأخذ $x \in G$ و $h \in D(G)$ فلنثبت أن $xhx^{-1} \in D(G)$

بما أن $h \in D(G)$ فإنه يوجد $a, b \in G$ بحيث $h = aba^{-1}b^{-1}$

لدينا

$$xhx^{-1} = xaba^{-1}b^{-1}x^{-1}$$

$$= xaba^{-1}eb^{-1}x^{-1} = xaba^{-1}x^{-1}b^{-1}bxb^{-1}x^{-1}$$

$$= ((xa)b(xa)^{-1}b^{-1})\ bxb^{-1}x^{-1} \in D(G)$$

$(\lambda \mu \lambda^{-1}\mu^{-1})\ (\lambda \mu \lambda^{-1} \mu^{-1})$

فإن $D(G) \triangleleft G$

ⓘ

$\varphi \in \mathrm{Aut}\,G$ تماثل ذاتي $\varphi : G \to G$

$\varphi(aba^{-1}b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)(\varphi(a))^{-1}(\varphi(b))^{-1}$

نقول أن $D(G)$ مميزة // characteristic إذا كان $\varphi(D(G)) \subseteq D(G)$?

$D(S_3) = \{1, \sigma, \sigma^2\}$

$D(Q_8) = \{\pm I\}$

ⓘ $D(G)$ هو أصغر زمرة جزئية ناظمية تجعل $G/D(G)$ ابدالية.

③ نأخذ $a, b \in G$ عندئذ $(ba)^{-1}ab = a^{-1}b^{-1}ab \in D(G)$ ولذا فإن

$\boxed{abD(G) = baD(G)}$ أي أن $(aD(G))(bD(G))$

$= (bD(G))(aD(G))$

وبالتالي $G/D(G)$ ابدالية.

س ١٨ | بيّن أيًّا من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة:

① توجد زمرة G بحيث تكون $\mathbb{Z}_p$ زمرة تشاكلية للزمرة G لكل عدد أولي p True

خذ $G=\mathbb{Z}$ تشاكل $\varphi: G \to \mathbb{Z}_p$

$G/_{\ker\varphi} \simeq \varphi(G) = \begin{cases} e \\ \mathbb{Z}_p \end{cases}$

② إذا كانت $\mathbb{Z}_{10}$ صورة تشاكلية لزمرة منتهية G فإن $10 \mid |G|$.

True

لتكن $\varphi: G \to \mathbb{Z}_{10}$ غامر فإن $|\mathbb{Z}_{10}| = |\varphi(G)| \mid |G|$

$G/_{\ker\varphi} \simeq \varphi(G) = \mathbb{Z}_{10}$

③ إذا كان $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ تشاكلاً غامرًا فإن φ تماثل ذاتي

True لأن $\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/_{\ker\varphi} \simeq \mathbb{Z}$ $\quad \ker\varphi \trianglelefteq \mathbb{Z}$ $\quad \varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

يتحدد بتحديد $\varphi(1) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$ لأن $\varphi(n) = n\varphi(1)$

بينما $|\mathbb{Z}| = \infty$ فإن $|\mathbb{Z}/_{\ker\varphi}| = \infty$ إذن $|\ker\varphi| = 1$ يعني φ أحادي

أكثر من ذلك يوجد فقط تشاكلان فقط $\varphi(n) = \begin{cases} n \\ -n \end{cases}$

④ $Aut(G) \simeq Aut(H)$ فإن $G \simeq H$ False

لأن $Aut(S_3) \simeq S_3 \simeq Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

$S_3 \not\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

⑤ إذا كان $Aut(G)$ زمرة دورية فإن G ابدالية True.

لأن $Inn\,G \trianglelefteq Aut(G)$

$G/_{Z(G)} \simeq Inn\,G$ دورية ابدالية يعني $G/_{Z(G)}$ دورية $\Rightarrow$ G ابدالية

⑥ إذا كانت $|G| \geq 2$ وكانت G غير ابدالية فإنه من المحال أن تكون $Aut(G) = \{e\}$ False.

لأن

$Inn\,G \trianglelefteq Aut(G)$ لو إذا كان $|Aut\,G| = |\{e\}| = 1$

فإن $|Inn\,G| = 1$ $\Leftrightarrow$ G ابدالية

تمارين

س لتكن $GL_2(\mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C})$

$$\overset{G}{\shortparallel} \qquad\qquad \overset{X}{\shortparallel}$$

أثبت أن
$$\varphi : GL_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$$
$$(P\ ,A) \longrightarrow PAP^{-1} = P * A$$
هو تأثير

ثم بيّن أن التأثير غير متعديا !

الحل: . لتكن $A \in M_2(\mathbb{C})$ ،
$$\varphi(I,A) = I A \cdot I^{-1} = A$$

. نأخذ $P_1, P_2 \in G$ و نأخذ $A \in M_2(\mathbb{C})$

$$P_1 * (P_2 * A) = P_1 * (P_2 A P_2^{-1}) = P_1 P_2 A P_2^{-1} P_1^{-1}$$
$$= (P_1 P_2) * A$$

. التأثير غير متعديا خذ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

لا يوجد $P \in GL_2(\mathbb{C})$ بحيث $B = PAP^{-1}$

لأن

$\det B = 0$
$\det A = 1$

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \quad ; \; z_1 \neq z_2$$

$$\mathrm{Orb}\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} = \left\{ P \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} P^{-1} \;/\; P \in GL_2(\mathbb{C}) \right\}$$

(la formule de Burnside affirme ($\cancel{X}$, G finis)

le nombre des orbites $= \dfrac{1}{|G|}\left(\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}\, g| \right)$

$= \dfrac{1}{|G|} \left(\sum_{g \in G} \left| \{ x \in X \,;\, gx = x \} \right| \right)$

تمرين 1: لتكن G زمرة تؤثر على مجموعة منتهية X.
منتهية

① نفترض أن كل مدار يحتوي على الأقل على عنصرين و $|G|=15$ و $|X|=17$.
أوجد عدد المدارات و عدد عناصر المدارات.

② نفترض أن $|G|=33$ و $|X|=19$. أثبت أنه يوجد مدار يحتوي على عنصر وحيد.

الحل: نعلم أن $[G:G_x] \overset{\text{تقابل}}{\sim} Orb(x)$ و بالتالي $|Orb(x)| \,\big|\, |G|$

و $|X| = \sum_{x\in X} |orb(x)|$

① إذا كان $|G|=15$ و $|X|=17$ و لا يوجد مدار يحتوي على عنصر وحيد.
فإن لدينا 4 مدارات ذات طول $\boxed{3}$ و واحد منها ذات طول $\boxed{5}$ (امكانية واحدة)

② إذا كان $|G|=33$ و $|X|=19$. عندئذ

طول المدارات 3 أو 11 لكن المجموع لا يكون 19 $\quad 19=11+3+3+1+1$

و بالتالي يوجد مدار يحتوي على عنصر وحيد.

تمرين 2: ليكن G زمرة من الرتبة 35 و X مجموعة ذات 19 عنصر و التطبيق $\phi: G\times X \longrightarrow X$ لا يثبت أي عنصر من X.
أوجد عدد المدارات لـ ϕ.

الحل: نضع k عدد المدارات. نعلم أن

$$19 = |X| = \sum_{i=1}^{k} [G:G_{x_i}]$$

بما أن $[G:G_{x_i}] \,\big|\, |G|$ فإن $[G:G_{x_i}] \in \{1,5,7,35\}$

و بما أن ϕ لا تثبت أي عنصر فإن $[G:G_{x_i}] \geq 2$ و $35 > 19$

و بالتالي $[G:G_{x_i}] \in \{5,7\}$. نضع n عدد المدارات ذات طول 5
m عدد المدارات ذات طول 7

س . أوجد مدارات S_4 و مثبتات S_4 .

1 2 3 4
2 1 4 3

مدار x $\quad orb(x) = \{ g x g^{-1} / g \in G \}$

المدارات هي

1 $\quad C_1^1 = 1 \quad orb(\{I\}) = \{I\}$

6 $\quad C_2^4 = 6 \quad orb\{(1,2)\} = \{(1,2) ; (1,3) ; (1,4) , (2,3), (2,4), (3,4)\}$

3 $\quad orb\{\underbrace{(1,2)(3,4)}_{(1,2)(3,4)}\} = \{(1,2)(3,4) ; (1,3)(2,4) ; (1,4)(2,3)\}$

8 $\quad orb(1,2,3) = \{(1,2,3) ; (1,3,2) ; (1,3,4) ; (1,4,3) ; (2,3,4) ; (2,4,3) ; (1,2,4) ; (1,4,2)\}$

6 $\quad orb(1,2,3,4) = \{(1,2,3,4) ; (1,2,4,3) ; (1,3,2,4) ; (1,3,4,2) ; (1,4,2,3) (1,4,3,2)\}$

1+1+1+1
1+1+2
1+3
2+2
4

S_n عدد المدارات هو عدد تجزئات n

$n = \sum k_i m_i$

$|[\sigma]| = \dfrac{n!}{\prod k_i^{m_i} \cdot m_i!}$

مثبت x $\quad G_x = \{ g \in G / g x g^{-1} = x \} \leq G$

المثبتات :

24 $\quad G_{id} = S_4$

4 $\quad G_{(1,2)} = \{ id ; (12) ; (34) ; (12)(3,4) \}$

8 $\quad G_{(12)(3,4)} = \{ id ; (1,2) ; (3,4) ; (12)(3,4) ; (1,3)(2,4) ; (1,4)(2,3) ; (1324) ; (1423) \}$

3 $\quad G_{(1,2,3)} = \{ id ; (1,2,3) ; (1,3,2) \}$

4 $\quad G_{(1,2,3,4)} = \{ id ; (1234) ; (13)(2,4) ; (1432) \}$

$$\boxed{|G| = |\underbrace{G.x}_{orb(x)}| \times |G_x|}$$

تمرين ٣: ليكن G زمرة رتبتها 56 . اثبت أن G ليس بسيط .

الحل:

$$|G| = 56 = 2^3 \times 7$$

نضع n_2 عدد الزمر لسيلو الجزئية من نوع 2

n_7 " " " " " 7

باستخدام مبرهنة 3 لسيلو لدينا

$$n_2 = \{1,7\} \Leftarrow \begin{cases} n_2 = 1 \bmod 2 \\ n_2 \mid 7 \end{cases}$$

$$n_7 = \{1,\cancel{2},\cancel{4},8\} \Leftarrow \begin{cases} n_7 = 1 \bmod 7 \\ n_7 \mid 8 \end{cases}$$

إذا كان $n_7 = 1$ فإن G يحتوي على زمرة جزئية ناظمية $Syl_7(G) \lhd G$

إذا كان $n_7 = 8$ ، فإن G يحتوي 48 عنصر من الرتبة 7.

وإذا كان $n_2 > 1$ فإن G يحتوي على الأقل 9 عناصر ذات رتبة 2^i ، $1 \le i \le 3$

نفرض أن $H_1, H_2 \in Syl_2(G)$

$H_1 \cap H_2 \le H_1$

$|H_1 \cap H_2| \le 4$

$|H_1 \cup H_2| \ge 12$

و لا يوجد عنصر ذو رتبة 7

و بالتالي $48 + 9 \le |G| = \cancel{56}$ ↯

و بالتالي إذا كان $n_7 = 8$ فإنه يجب $Syl_2(G)$ يكون وحيد يعني $Syl_2(G) \lhd G$

7 زمر رتبة 7

تمرين 3 ليكن G زمرة ذات رتبة 60 و لا تحتوي على زمرة جزئية ناظمية فعلية

① أوجد عدد $Syl_5(G)$

② $G \simeq S_6$

63

① $60 = 12 \times 5$.

نضع n_5 عدد $Syl_5(G)$ باستخدام مبرهنة سيلو لدينا

$$n_5 = \{1,\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},6,\cancel{12}\} \Leftarrow \begin{cases} n_5 = 1 \bmod 5 \\ n_5 \mid 12 \end{cases}$$

و بما أن G لا تحتوي على زمرة ناظمية فعلية

فإن $\boxed{n_5 = 6}$

② نضع X مجموعة الزمر الجزئية سيلو من نوع 5 ; $|X| = 6$

تشاكلا $\Phi : G \longrightarrow S(X) \simeq S_6$

$$g \longrightarrow f_g : X \longrightarrow X$$
$$S \longrightarrow g S g^{-1}$$

$\{e\} = \mathrm{Ker}\,\Phi \lhd G$

و Φ ليس تشاكلا تافها لأن Φ متباين

مثال: إذا كانت $|G|=105$ فإن G ليست بسيطة

الحل

$$105 = 3\times 5\times 7$$

$$n_3 \in \{1,7\}$$
$$n_5 \in \{1,21\}$$
$$n_7 \in \{1,15\}$$

إذا كان G بسيطة فإن $n_7 = 15,\ n_5 = 21,\ n_3 = 7$

$\Leftarrow$ G تحتوي على

15×6 عنصر من رتبة 7

21×4 " " 5

7×2 " " 3

$$|G| \geq 15\times 6 + 21\times 4 + 7\times 2 = 90+84+14 = 188 \ \lightning$$

إذن G ليست بسيطة.

س: ليكن G زمرة من نوع p (p عدد أولي) و H زمرة جزئية ناظمية لـ G. أثبت أن $H\cap Z(G)$ هي زمرة جزئية فعلية وبالتالي استنتج أن $Z(G)$ هو من نوع p فعلي.

$$|H| = |H\cap Z(G)| + \sum_{x\in H} [G:G_x] \quad |HZ(G)| = \frac{|H|\,|Z(G)|}{|H\cap Z(G)|} \; x?$$

الحل الزمرة الجزئية $H\subset G$ هي ناظمية. G تؤثر على H بالترافق. بما أن G من نوع p فإن H من نوع p و المدارات ليست تافهة و عدد عناصر المدارات تقسم p.

فنستنتج أن أحادي المدارات التافهة هي $H\cap Z(G)$ مجموعة (مجموعة النقاط الثابتة)

و بالتالي عدد عناصر من مضاعفات p.

بما أن $H\cap Z(G)$ تحتوي على عنصر المحايد فإنها تحتوي على p عنصر و $H\cap Z(G)\neq\{e\}$. في حالة $H=G$ فإن $|Z(G)|>1$.

س | بين أيًا من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة:

① إذا كان $a \in G$ فإن $a \in Z(G)$ إذا وفقط إذا كان $[orb(a)] = \{a\}$

T

$orb(a) = \{gag^{-1} / g \in G\}$

② إذا كان $|G| = 14$ فإن G تحتوي على زمرة ناظمية رتبتها 7

T

$14 = 2 \times 7$

$n_7 = 1 \mod (7)$ فإن $n_7 = 1$

$n_7 | 2$

③ إذا كانت $|G| = 15$ فإن G ابدالية.

$= 3 \times 5$

T

$G = \langle xy \rangle \Rightarrow |G| = |Syl_3\, Syl_5| = \frac{\# Syl_3 \; \# Syl_5}{\#(Syl_3 \cap Syl_5)} = \frac{3 \times 5}{1}$ $n_3 = 1$ $n_5 = 1$

④ إذا كانت $|G| = 28$ وكانت G تحتوي على زمرة جزئية وحيدة من الرتبة 4 فإن G ابدالية

$A = \{x \in G / x^7 = e\} \leq G$

$B = \{x \in G / x^4 = e\} \leq G$

$|G| = 2^2 \times 7$

T

$A \cap B = \{e\}$ $\boxed{G = AB}$

⑤ إذا كانت $|G| = 81$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية فعلية ناظمية رتبتها أكبر من 3

$|G| = 3^4$ لأن $|Z(G)| > 1$

T

$Z(G) \triangleleft G$

$n_3 = 1 \mod 3$

$n_3 | 81$

$\{4, 8, 9, 16, 25, \cancel{49}, \cancel{81}, 121\}$

ليست بسيطة

⑥ إذا كانت $|G| = 99$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية وحيدة من الرتبة 11

T

$|G| = 3^2 \times 11$

$n_{11} = 1 \mod 11$

$n_{11} = 1$

$n_{11} | 9$

مبرهنة:

إذا كانت G زمرة من الرتبة pq
حيث p و q عددان أوليان
و $p<q$ فإن

1. G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية وحيدة رتبتها q.
2. إذا كان $p \nmid q-1$ فإن G دورية
3. إذا كان $p \mid q-1$ فإن $G=\langle a,b\rangle$

حيث
$$o(a)=q$$
$$o(b)=p$$
$$ba=a^r b$$
حيث
$q \nmid r-1$ لكن $q \mid r^p-1$

$$H = Syl_p$$
$$K = Syl_q$$
$$H\cap K=\{e\}$$
$$HK = G \simeq K\times H = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \simeq \mathbb{Z}_{pq}$$

$\boxed{A_n \text{ بسيطة إذا كان } n\geq 5}$

$2^1\ 2^2\ 2^3\ 2^4$

تمرين بيّن أيا من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة.

① $(\mathbb{Z},+)$ متحللة (F)

نفترض أنها متحللة إذن يوجد $H\le\mathbb{Z}$ و $K\le\mathbb{Z}$ غير تافهة بحيث $H\times K=\mathbb{Z}$

$H=n\mathbb{Z}$, $K=m\mathbb{Z}$

$lcm(n,m)\in H$, $\in K$ فإن $H\cap K\neq\{0\}$ ↯ هذا مستحيل وبالتالي $\mathbb{Z}$ غير متحللة

② $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ دورية (F)

نفترض أن $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ دورية إذن $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\langle(1,1)\rangle$ لكن $(2,1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ فإنه يوجد عدد $n\in\mathbb{Z}$ بحيث $(2,1)=(1,1)^n=(n,n)$ ↯ مستحيل

③ $\underbrace{\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{15}}_{\text{دورية}}\cong\underbrace{\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{10}}_{\text{ليس دورية}}$ (F)

دورية لأن $gcd(4,15)=1$

$\{1,2,4,8\}$

④ $D_{12}\cong\mathbb{Z}_3\times D_4$ (F)

لديها 4 عناصر رتبتها 2 في الزمرة

لديها 12 عنصر رتبة 2

$Z(D_{12})=\{e\}$ لكن $Z(D_4\times\mathbb{Z}_3)\neq\{e\}$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$

$U_{15}\cong U_3\times U_5$

$U_{15}=\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$

$|U_{15}|=8$

⑤ إذا كانت $a=([2],[3],(1,2,3)\circ(4,5))\in U_{15}\times\mathbb{Z}_{10}\times S_5$ فإن $o(a)=20$ (T)

$o((1,2,3)\circ(4,5))=4$, $o[3]=\frac{10}{gcd(3,10)}=10$, $o([2])=4$

$lcm(4,10,2)=20$

12345
23145
23541
$(1,2,3,5)$

⑥ إذا كانت G زمرة ابدالية حيث العدد 5 يقسم رتبة G فإن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبتها 5. (T)

مبرهنة كوشي: $5\mid|G|$ و 5 أولي إذا يوجد عنصر في G رتبته 5 والزمرة المولدة له هي دورية.

⑦ إذا كانت $H,K\le G$ بحيث $G=HK$ و $hk\in G$ فإن

$o(h.k)=lcm(o(h),o(k))$ (F)

يلزم $H\trianglelefteq G$, $K\trianglelefteq G$

$8\cdot 2\cdot 15=$

$[16]=[8][2]=[1]$

نظير 2 هو 8

نظير 8 هو 2

$|\langle[2]\rangle|=|\{1,2,4,8\}|=4$

$ord[a]=\frac{n}{gcd(a,n)}$

$xy=$

$2n=1 \mod[15]$

U_{15} ابدالية وليست دورية

$D_{12}\not\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_{24}\\ \mathbb{Z}_3\times D_4\\ \mathbb{Z}_4\times D_3\end{cases}$ 4 زمر غير متشاكلة من الرتبة 24

$\mu_{15}=\{z / z^{15}=1\}=\{e^{2i\pi k/15} / 0\le k\le n-1\}$

مقرر343 ريض (نظرية الزمر-Group Theory)

تعريف الزمرة و خصائصها الأساسية , الزمر الجزئية و الزمر الدائرية, المجموعات المشاركة و مبرهنة لاجرانج, الزمر الجزئية الناظمية, الزمر خارجة القسمة, التشاكلات, تماثل الزمر, مبرهنات التماثل, زمرة التماثلات الذاتية, مبرهنة كيلي, الزمر البسيطة, زمر التناظر, تأثير الزمر على مجموعات, معادلة فصول الترافق و مبرهنة كوشي, الزمر الأولية, مبرهنات سيلو, الضرب المباشر, بعض التطبيقات على المواضيع السابقة.

Definition and basic properties of the group, subgroups and cyclic groups, cosets and Lagrange's theorem, normal subgroups, homomorphisms and factor groups, isomorphism theorems, group of automorphisms, Cayley's theorem and its generalization. Simple groups, permutation groups. Action of a group on a set, conjugacy classes and Cauchy's theorem, p-groups, Sylow's theorems, External and internal direct products of groups.

المواضيع المطلوب بحثها وشمولها		
الموضوع	عدد الأسابيع	ساعات الاتصال
تعريف الزمرة وخصائصها الأساسية	1	5
الزمر الجزئية والزمر الدائرية	1	5
المجموعات المشاركة ومبرهنة لاغرانج	1.5	7.5
الزمر الجزئية الناظمية و الزمر خارج القسمة	2.5	12.5
تشاكل وتماثل الزمر وزمرة التماثلات الذاتية	1.5	7.5
مبرهنات التماثل	2	10
مبرهنة كيلي وتعميمها	1	5
زمر التناظر والزمر البسيطة	1	5
تأثير زمرة على مجموعة ومبرهنات سيلو	2.5	12.5
الضرب المباشر	1	5

وصف المعرفة التي سيتم اكتسابها في المقرر:

المعارف التي سيتم اكتسابها في المقرر كثيرة ومنها ما يلي :

(1) الخصائص الأساسية للزمر — (2) الزمرالجزئية والزمر الدائرية
(3) مبرهنة لاغرانج — (4) الزمر الجزئية الناظمية
(5) الزمر خارجة القسمة — (6) تشاكل وتماثل الزمر
(7) مبرهنات التماثل — (8) زمرة التماثلات الذاتية
(9) مبرهنة كيلي وتعميمها — (10) الزمرة البسيطة
(11) زمر التناظر — (12) تأثير زمرة على مجموعة
(13) معادلة فصول الترافق — (14) مبرهنة كوشي
(15) مبرهنات سيلو — (16) الضرب المباشر
(17) تصنيف الزمر ذوات الرتب الصغيرة طبقا للتماثل

كتاب المقرر : **نظرية الزمر**

تأليف د/ معروف سمحان و د/ فوزي الذكير- الناشر: دار الخريجي للنشر و التوزيع (1428 هـ).

جامعة الملك سعود
King Saud University

مقرر343 ريض (نظرية الزمر-Group Theory)

تعريف الزمرة و خصائصها الأساسية , الزمر الجزئية و الزمر الدائرية, المجموعات المشاركة و مبرهنة لاجرانج, الزمر الجزئية الناظمية, الزمر خارجة القسمة, التشاكلات, تماثل الزمر, مبرهنات التماثل, زمرة التماثلات الذاتية, مبرهنة كيلي, الزمر البسيطة, زمر التناظر, تأثير الزمر على مجموعات, معادلة فصول الترافق و مبرهنة كوشي, الزمر الأولية, مبرهنات سيلو, الضرب المباشر, بعض التطبيقات على المواضيع السابقة.

Definition and basic properties of the group, subgroups and cyclic groups, cosets and Lagrange's theorem, normal subgroups, homomorphisms and factor groups, isomorphism theorems, group of automorphisms, Cayley's theorem and its generalization. Simple groups, permutation groups. Action of a group on a set, conjugacy classes and Cauchy's theorem, p-groups, Sylow's theorems, External and internal direct products of groups.

المواضيع المطلوب بحثها وشمولها		
الموضوع	عدد الأسابيع	ساعات الاتصال
تعريف الزمرة وخصائصها الأساسية	1	5
الزمر الجزئية والزمر الدائرية	1	5
المجموعات المشاركة ومبرهنة لاغرانج	1.5	7.5
الزمر الجزئية الناظمية و الزمر خارج القسمة	2.5	12.5
تشاكل وتماثل الزمر وزمرة التماثلات الذاتية	1.5	7.5
مبرهنات التماثل	2	10
مبرهنة كيلي وتعميمها	1	5
زمر التناظر والزمر البسيطة	1	5
تأثير زمرة على مجموعة ومبرهنات سيلو	2.5	12.5
الضرب المباشر	1	5

وصف المعرفة التي سيتم اكتسابها في المقرر:

المعارف التي سيتم اكتسابها في المقرر كثيرة ومنها ما يلي :

(1) الخصائص الأساسية للزمر (2) الزمرالجزئية والزمر الدائرية
(3) مبرهنة لاغرانج (4) الزمر الجزئية الناظمية
(5) الزمر خارجة القسمة (6) تشاكل وتماثل الزمر
(7) مبرهنات التماثل (8) زمرة التماثلات الذاتية
(9) مبرهنة كيلي وتعميمها (10) الزمرة البسيطة
(11) زمر التناظر (12) تأثير زمرة على مجموعة
(13) معادلة فصول الترافق (14) مبرهنة كوشي
(15) مبرهنات سيلو (16) الضرب المباشر
(17) تصنيف الزمر ذوات الرتب الصغيرة طبقا للتماثل

كتاب المقرر : **نظرية الزمر**

تأليف د/ معروف سمحان و د/ فوزي الذكير- الناشر: دار الخريجي للنشر و التوزيع (1428 هـ).

جامعة الملك سعود
King Saud University

مقرر343 ريض (نظرية الزمر-Group Theory)

تعريف الزمرة و خصائصها الأساسية , الزمر الجزئية و الزمر الدائرية, المجموعات المشاركة و مبرهنة لاجرانج, الزمر الجزئية الناظمية, الزمر خارجة القسمة, التشاكلات, تماثل الزمر, مبرهنات التماثل, زمرة التماثلات الذاتية, مبرهنة كيلي, الزمر البسيطة, زمر التناظر, تأثير الزمر على مجموعات, معادلة فصول الترافق و مبرهنة كوشي, الزمر الأولية, مبرهنات سيلو, الضرب المباشر, بعض التطبيقات على المواضيع السابقة.

Definition and basic properties of the group, subgroups and cyclic groups, cosets and Lagrange's theorem, normal subgroups, homomorphisms and factor groups, isomorphism theorems, group of automorphisms, Cayley's theorem and its generalization. Simple groups, permutation groups. Action of a group on a set, conjugacy classes and Cauchy's theorem, p-groups, Sylow's theorems, External and internal direct products of groups.

المواضيع المطلوب بحثها وشمولها		
الموضوع	عدد الأسابيع	ساعات الاتصال
تعريف الزمرة وخصائصها الأساسية	1	5
الزمر الجزئية والزمر الدائرية	1	5
المجموعات المشاركة ومبرهنة لاغرانج	1.5	7.5
الزمر الجزئية الناظمية و الزمر خارج القسمة	2.5	12.5
تشاكل وتماثل الزمر وزمرة التماثلات الذاتية	1.5	7.5
مبرهنات التماثل	2	10
مبرهنة كيلي وتعميمها	1	5
زمر التناظر والزمر البسيطة	1	5
تأثير زمرة على مجموعة ومبرهنات سيلو	2.5	12.5
الضرب المباشر	1	5

وصف المعرفة التي سيتم اكتسابها في المقرر:

المعارف التي سيتم اكتسابها في المقرر كثيرة ومنها ما يلي :

(1) الخصائص الأساسية للزمر (2) الزمرالجزئية والزمر الدائرية
(3) مبرهنة لاغرانج (4) الزمر الجزئية الناظمية
(5) الزمر خارجة القسمة (6) تشاكل وتماثل الزمر
(7) مبرهنات التماثل (8) زمرة التماثلات الذاتية
(9) مبرهنة كيلي وتعميمها (10) الزمرة البسيطة
(11) زمر التناظر (12) تأثير زمرة على مجموعة
(13) معادلة فصول الترافق (14) مبرهنة كوشي
(15) مبرهنات سيلو (16) الضرب المباشر
(17) تصنيف الزمر ذوات الرتب الصغيرة طبقا للتماثل

كتاب المقرر : **نظرية الزمر**

تأليف د/ معروف سمحان و د/ فوزي الذكير- الناشر: دار الخريجي للنشر و التوزيع (1428 هـ).

جامعة الملك سعود
King Saud University

مقرر343 ريض (نظرية الزمر-Group Theory)

تعريف الزمرة و خصائصها الأساسية , الزمر الجزئية و الزمر الدائرية, المجموعات المشاركة و مبرهنة لاجرانج, الزمر الجزئية الناظمية, الزمر خارجة القسمة, التشاكلات, تماثل الزمر, مبرهنات التماثل, زمرة التماثلات الذاتية, مبرهنة كيلي, الزمر البسيطة, زمر التناظر, تأثير الزمر على مجموعات, معادلة فصول الترافق و مبرهنة كوشي, الزمر الأولية, مبرهنات سيلو, الضرب المباشر, بعض التطبيقات على المواضيع السابقة.

Definition and basic properties of the group, subgroups and cyclic groups, cosets and Lagrange's theorem, normal subgroups, homomorphisms and factor groups, isomorphism theorems, group of automorphisms, Cayley's theorem and its generalization. Simple groups, permutation groups. Action of a group on a set, conjugacy classes and Cauchy's theorem, p-groups, Sylow's theorems, External and internal direct products of groups.

المواضيع المطلوب بحثها وشمولها		
الموضوع	عدد الأسابيع	ساعات الاتصال
تعريف الزمرة وخصائصها الأساسية	1	5
الزمر الجزئية والزمر الدائرية	1	5
المجموعات المشاركة ومبرهنة لاغرانج	1.5	7.5
الزمر الجزئية الناظمية و الزمر خارج القسمة	2.5	12.5
تشاكل وتماثل الزمر وزمرة التماثلات الذاتية	1.5	7.5
مبرهنات التماثل	2	10
مبرهنة كيلي وتعميمها	1	5
زمر التناظر والزمر البسيطة	1	5
تأثير زمرة على مجموعة ومبرهنات سيلو	2.5	12.5
الضرب المباشر	1	5

وصف المعرفة التي سيتم اكتسابها في المقرر:

المعارف التي سيتم اكتسابها في المقرر كثيرة ومنها ما يلي :

(1) الخصائص الأساسية للزمر (2) الزمرالجزئية والزمر الدائرية
(3) مبرهنة لاغرانج (4) الزمر الجزئية الناظمية
(5) الزمر خارجة القسمة (6) تشاكل وتماثل الزمر
(7) مبرهنات التماثل (8) زمرة التماثلات الذاتية
(9) مبرهنة كيلي وتعميمها (10) الزمرة البسيطة
(11) زمر التناظر (12) تأثير زمرة على مجموعة
(13) معادلة فصول الترافق (14) مبرهنة كوشي
(15) مبرهنات سيلو (16) الضرب المباشر
(17) تصنيف الزمر ذوات الرتب الصغيرة طبقا للتماثل

كتاب المقرر : **نظرية الزمر**

تأليف د/ معروف سمحان و د/ فوزي الذكير- الناشر: دار الخريجي للنشر و التوزيع (1428 ھ).

جامعة الملك سعود
King Saud University

مقرر343 ريض (نظرية الزمر-Group Theory)

تعريف الزمرة و خصائصها الأساسية , الزمر الجزئية و الزمر الدائرية, المجموعات المشاركة و مبرهنة لاجرانج, الزمر الجزئية الناظمية, الزمر خارجة القسمة, التشاكلات, تماثل الزمر, مبرهنات التماثل, زمرة التماثلات الذاتية, مبرهنة كيلي, الزمر البسيطة, زمر التناظر, تأثير الزمر على مجموعات, معادلة فصول الترافق و مبرهنة كوشي, الزمر الأولية, مبرهنات سيلو, الضرب المباشر, بعض التطبيقات على المواضيع السابقة.

Definition and basic properties of the group, subgroups and cyclic groups, cosets and Lagrange's theorem, normal subgroups, homomorphisms and factor groups, isomorphism theorems, group of automorphisms, Cayley's theorem and its generalization. Simple groups, permutation groups. Action of a group on a set, conjugacy classes and Cauchy's theorem, p-groups, Sylow's theorems, External and internal direct products of groups.

المواضيع المطلوب بحثها وشمولها		
الموضوع	عدد الأسابيع	ساعات الاتصال
تعريف الزمرة وخصائصها الأساسية	1	5
الزمر الجزئية والزمر الدائرية	1	5
المجموعات المشاركة ومبرهنة لاغرانج	1.5	7.5
الزمر الجزئية الناظمية و الزمر خارج القسمة	2.5	12.5
تشاكل وتماثل الزمر وزمرة التماثلات الذاتية	1.5	7.5
مبرهنات التماثل	2	10
مبرهنة كيلي وتعميمها	1	5
زمر التناظر والزمر البسيطة	1	5
تأثير زمرة على مجموعة ومبرهنات سيلو	2.5	12.5
الضرب المباشر	1	5

وصف المعرفة التي سيتم اكتسابها في المقرر:

المعارف التي سيتم اكتسابها في المقرر كثيرة ومنها ما يلي :

(1) الخصائص الأساسية للزمر (2) الزمرالجزئية والزمر الدائرية
(3) مبرهنة لاغرانج (4) الزمر الجزئية الناظمية
(5) الزمر خارجة القسمة (6) تشاكل وتماثل الزمر
(7) مبرهنات التماثل (8) زمرة التماثلات الذاتية
(9) مبرهنة كيلي وتعميمها (10) الزمرة البسيطة
(11) زمر التناظر (12) تأثير زمرة على مجموعة
(13) معادلة فصول الترافق (14) مبرهنة كوشي
(15) مبرهنات سيلو (16) الضرب المباشر
(17) تصنيف الزمر ذوات الرتب الصغيرة طبقا للتماثل

كتاب المقرر : **نظرية الزمر**

تأليف د/ معروف سمحان و د/ فوزي الذكير- الناشر: دار الخريجي للنشر و التوزيع (1428 هـ).