جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

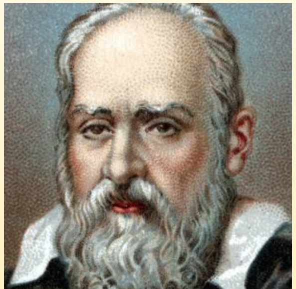
المحاضرة رقم: 01

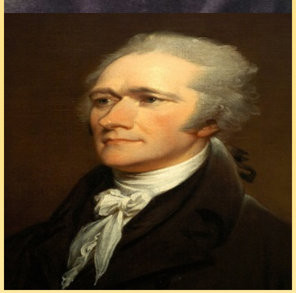
مقدمة عامة – الجزء الأول

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

1.1- مدخل إلى الميكانيكا التقليدية



- يمكن اعتبار أن جاليليو (مات عام 1642م) يمثل بداية علم الميكانيكا حيث درس الأجسام الساقطة
- ثم جاء أسحق نيوتن (مات عام 1727م) بقوانينه الثلاثة التي عرفت بقوانين نيوتن للحركة + قانون الجذب العام
- بعد ذلك بعدة عقود قام العالم الفرنسي (لاجرانج) (توفي عام 1813 م) باستحداث صورة رياضية متطورة للميكانيكا، أطلق عليها معادلات لاجرانج
- وبعده بقليل جاء العالم الأيرلندي (هاملتون) (توفي 1865 م) باستحداث معادلات هاملتون وهي أيضا متطورة رياضيا مقارنة بقوانين نيوتن.
- ببساطة هذه الثلاث مجموعات من المعادلات تشكل ما يسمى **بالميكانيكا التقليدية**

قوانين نيوتن + معادلات لاجرانج + مبادئ هاملتون

- الأقسام الأخرى تشمل: ميكانيكا الكم + الميكانيكا النسبية

1.2- الأبعاد الزمانية والمكانية

- كما هو معلوم فأننا نعيش في عالم ثلاثي الابعاد، أضافة إلى البعد الزمني.
- في هذا المقرر نعتبر أن الأطار الذي يجمع الأبعاد الثلاثة مع الزمن هو أطار ثابت.
- وعلى هذا الأساس فهناك نقطة في الفراغ (O) تسمى نقطة الأصل بحيث يمكن نسبة موقع النقطة P إليها باستخدام ثلاثة أحداثيات هي: $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$
- وبالتالي فنقول أن النقطة P تقع عند:

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$$

- في بعض الأحيان نستخدم تعبيرا آخر لنفس الغرض وهو:

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

- وهكذا فكل متجه في الفراغ يمكن كتابته باستخدام ثلاثة أبعاد (مركبات) كما يلي:

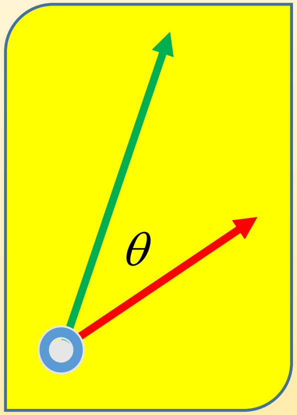
$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

تذكير ببعض خصائص المتجهات

- مجموع متجهات: أذا كان لدينا المتجهان: $\mathbf{r}=(r_1,r_2,r_3); \quad \mathbf{s}=(s_1,s_2,s_3)$

فأن مجموعهما هو: $\mathbf{r}+\mathbf{s}=(r_1+s_1,r_2+s_2,r_3+s_3)$

- ضرب متجه بكمية قياسية: $c\mathbf{r}=(cr_1,cr_2,cr_3)$
- الضرب القياسي لمتجهين:



$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}=rs\cos\theta$$

$$=r_1s_1+r_2s_2+r_3s_3=\sum_{n=1}^{3}r_ns_n$$

- الضرب الاتجاهي: $\mathbf{p}=\mathbf{r}\times\mathbf{s}; \quad |\mathbf{r}\times\mathbf{s}|=rs\sin\theta$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{s}=\det\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ r_x & r_y & r_z\\ s_x & s_y & s_z\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ r_x & r_y & r_z\\ s_x & s_y & s_z\end{vmatrix}$$

تفاضل المتجهات

- لو اعتمدنا قواعد التفاضل العادية، وأدخلنا مؤثر التفاضل على مجموع متجهين:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}+\mathbf{s})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

- أما تفاضل متجه مضروب بكمية قياسية فيكتب:

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{r})=f\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\frac{df}{dt}\mathbf{r}$$

- تفاضل متجه الموضع بالصورة: $\mathbf{r}=x\,\hat{\mathbf{x}}+y\,\hat{\mathbf{y}}+z\,\hat{\mathbf{z}}$

ولذا فأن:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}}+\frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{y}}+\frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{z}}\Rightarrow \mathbf{v}=v_x\hat{\mathbf{x}}=+v_y\hat{\mathbf{y}}+v_z\hat{\mathbf{z}}$$

وهذا يؤدي بالضرورة إلى أن تفاضل وحدات المتجه يساوي أصفارا:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt}=\frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dt}=\frac{d\hat{\mathbf{z}}}{dt}=0$$

1.3- الكتلة والقوة

- الكتلة هي تلك الخاصية التي تجعل الجسم قاصرا ذاتيا (أي يميل لحفظ الحالة)
- ترتبط الكتلة بالتسارع لتعطي القوة $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
- وترتبط بتسارع الجاذبية لتعطي الوزن $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$
- ولكن الوزن هو في الحقيقة (قوة) وله نفس الوحدة (نيوتن)
- الكتلة النقطية Point Mass (أو الجسم النقطي) أي ننظر للكتلة وكأنها نقطة تتحرك في الفراغ بدون أبعاد ذاتية للجسم.
- عندما نتحدث عن أجسام لانقطية فأننا نقصد مجموعة كبيرة من الكتل النقطية مجتمعة لتشكل تلك الأجسام. وربما نتحدث عن توزيع للكتلة في الفراغ.
- يساعدنا هذا التصور على سهولة الحل ولذلك فهو يؤدي إلى حلول تقريبية
- أما عندما نتحدث عن جسيمات أولية مثل البروتونات والألكترونات فتصبح الصورة شبه مطابقة للواقع، أي أنها بالفعل أجسام نقطية.

1.4- قوانين نيوتن الثلاثة

- **قانون القصور الذاتي**: ويسمى قانون نيوتن الأول: (يبقى الجسم على ما هو عليه من سكون أو حركة في خط مستقيم مالم تؤثر عليه قوة خارجية)
- **قانون القوة**: ويسمى أيضا بقانون نيوتن الثاني ونصه الرياضي: $F = ma$
- **قانون حفظ الاندفاع** (ويسمى أيضا بقانون الفعل ورد الفعل، أو قانون نيوتن الثالث): (لكل فعل رد فعل مساو له في المقدار مضاد له في الاتجاه)
- يلاحظ أن قانون نيوتن الثاني هو نفسه الأول في حالة كون التسارع $a = 0$

لأن معنى ذلك أن $F = 0$ وبالتالي يمثل ذلك غياب القوة الخارجية. يسمى هذا أيضا بالاتزان. أي أن الجسم المتزن هو ذلك الجسم الذي ينطبق عليه قانون نيوتن الأول، أو قانون نيوتن الثاني في حالة غياب التسارع.

- يمكن الربط بين قانون نيوتن الثاني والاندفاع:

$$\because \mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

ومعني ذلك أن التغير في الاندفاع سببه وجود قوة خارجية

حفظ الاندفاع

- ذكرنا في شريحة سابقة العلاقة بين الاندفاع والقوة الخارجية. ويكن أعادة تلك العلاقة بأعتبار الاندفاع الكلية للنظام والقوة الخارجية كما يلي: $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}$

والتي معناها أن جميع القوى الداخلية للنظام لا تؤثر على اندفاع النظام بل يلغي بعضها بعضا. أي أن: الاندفاع الكلي للنظام يتأثر فقط بالقوى الخارجية.

- أي بعبارة أخرى: في ظل غياب محصلة القوى الخارجية، فيبقى الاندفاع الكلي للنظام محفوظا
- حفظ الاندفاع صحيح دائما حتى في ميكانيكا الكم والميكانيكا النسبية.
- وحيث أننا قلنا سابقا: أن قانون نيوتن الثالث هو نفسه قانون حفظ الاندفاع. كذلك يمكن القول أن قانون حفظ الاندفاع هو نفسه قانون نيوتن الثالث.
- سوف نعتمد على ما يسمى: أطار الأسناد. مثلا لو تصورنا كتلة تتحرك على سطح لا احتكاكي في غياب للقوى الخارجية فهي تتحرك بسرعة ثابتة. لنفترض أنها تتحرك داخل الأطار الأسنادي S .
- لو تصورنا أطارا آخر S′ يتحرك داخل S بسرعة ثابتة وفي خط مستقيم ولا يدور فأن الكتلة أيضا سوف تحرك داخل S′ بسرعة ثابتة.

مثال محلول

- Two objects of masses m_1 and m_2 are subject to no external forces. Object 1 is traveling with velocity $\mathbf{v}$ when it collides with the stationary object 2. The two objects stick together and move off with common velocity $\mathbf{v}'$. Use conservation of momentum to find $\mathbf{v}'$ in terms of $\mathbf{v}$, m_1 and m_2.
- Solution:

Conservation of momentum says *the momentum before the collision must be the same as the momentum after the collision*:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v}'$$

Since $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$, and $\mathbf{v}_2 = 0$ (second object is stationary), we simply solve for $\mathbf{v}'$ to find:

$$\mathbf{v}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}$$

- أي أن سرعة الجسمين مع بعضهما هي جزء من سرعة الجسم الأول. ولو كانت كتلة الجسم الثاني كبيرة جدا فهذا يؤدي إلى أن تؤول السرعة بعد التصادم إلى الصفر. لاحظ أن لصوق الجسمين مع بعضهما يجعل من رجوع الجسم الأول إلى الوراء أمرا مستحيلا، ولذا فاتجاه $\mathbf{v}'$ هو نفسه اتجاه $\mathbf{v}$

1.6- قانون نيوتن الثاني في الأحداثيات الكارتيزية

- الأحداثيات الكارتيزية هي أبسط الأحداثيات المعروفة في ثلاثة أبعاد ويعبر عنها ببساطة بالصورة: $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$. ولذلك فيمكن التعبير عن القوى في ظل هذه الأحداثيات كما يلي:

$$\mathbf{F} = F_x\,\hat{\mathbf{x}} + F_y\,\hat{\mathbf{y}} + F_z\,\hat{\mathbf{z}}$$

- قد تجد في كتب آخرى استخدام متجهات الوحدة: $\hat{\mathrm{i}}, \hat{\mathrm{j}}, \hat{\mathrm{k}}$ وهي نفسها.
- يعبر عن متجه الموقع كما يلي: $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$
- وبالتفاضل مرتين نحصل على متجه التسارع: $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\,\hat{\mathbf{x}} + \ddot{y}\,\hat{\mathbf{y}} + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{z}}$

أذن يمكن التعبير عن معادلة الحركة (قانون نيوتن الثاني **F = ma**) كما يلي:

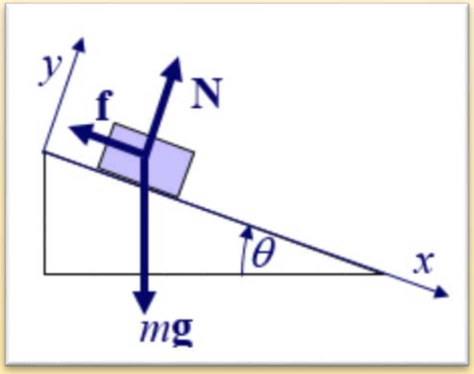
$$F_x\,\hat{\mathbf{x}} + F_y\,\hat{\mathbf{y}} + F_z\,\hat{\mathbf{z}} = m\ddot{x}\,\hat{\mathbf{x}} + m\ddot{y}\,\hat{\mathbf{y}} + m\ddot{z}\,\hat{\mathbf{z}}$$

ويؤدي ذلك إلى:

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases}$$

مثال محلول

- problems—a block m sliding from rest down an incline at angle q, with coefficient of kinetic friction m, subject to gravity



- ***Solution:***

  Let's choose x down the incline, and

  y perpendicular, with x = 0 at t = 0.

- The x and y components of the equation of motion are:

$$F_x = mg\sin\theta - \mu N = m\ddot{x} \qquad (1)$$

$$F_y = N - mg\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

$$(2) \rightarrow N = mg\cos\theta \qquad (3)$$

$$(3) \text{ in } (1):$$

$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = m\ddot{x}$$

$$\rightarrow \ddot{x} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) \qquad (4)$$

- معادلة (4) تمثل تسارع الجسم على السطح المائل

مثال محلول (تكملة)

- لأيجاد المسافة x كعلاقة مع الزمن: نقوم بعملية تكامل لطرفي المعادلة (4) مرتين، نحصل من الأولى على السرعة كما يلي:

$$\because \ddot{x} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) \qquad (4)$$

$$\rightarrow \int \ddot{x}dt = \int g(\sin\theta - \mu\cos\theta)dt \qquad (5)$$

$$\rightarrow \dot{x} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t \qquad (6)$$

- التكامل الثاني لطرفي المعادلة الناتجة (6) يعطينا المسافة كما يلي:

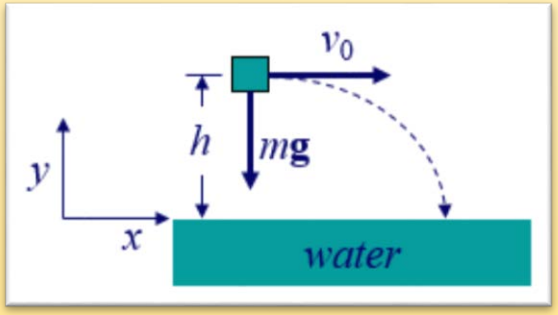
$$x = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t^2 \qquad (7)$$

- لاحظ في الحالتين أن التكامل غير محدود ولكن ثابت التكامل يساوي الصفر بافتراض أن $x = 0$ عندما $t = 0$ وذلك كشروط حدية للتكامل الأول. بالنسبة للتكامل الثاني يضاف لذلك أن $v = 0$ في بداية الحركة من أعلى المنحدر.

مثال محلول

- A plane, which is flying horizontally at a *constant speed* v_0, and at a height h above the sea, must drop a bundle of supplies to a castaway on a small raft. (**a**) Write down Newton's second law for the bundle as it falls from the plane, assuming you can neglect air resistance. Solve your equation to give the bundle's position in flight as a function of time t.

  (**b**) How far before the raft (measured horizontally) must the pilot drop the bundle if it is to hit the raft? What is the distance if $v_0 = 50$ m/s, $h = 100$ m, and $g \approx 10$ m/s^2?



- ***Solution:***

  Choose (x horizontal, y positive upward)

  Write down Newton's second law for x and y

$$x:\ m\ddot{x} = 0 \qquad (1)$$

$$y: m\ddot{y} = -mg \qquad (2)$$

- Integrating both sides of Eq. (1) to find v then to find x
- Integrating both sides of Eq. (2) to find vertical velocity and vertical distance

مثال محلول (تكملة)

$$\int \ddot{x}dt = 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow \dot{x} = c$$

from initial conditions (v_x at $t = 0$ is v_0)

$$\therefore \dot{x} = v_0 \qquad (3)$$

$$\therefore \int \dot{x}dt = \int v_0 dt$$

$$\rightarrow x = v_0 t \qquad (4)$$

$$(2) \rightarrow \ddot{y} = -g$$

$$\therefore \int \ddot{y}dt = -\int g dt$$

$$\therefore \dot{y} = -gt + c \quad \text{but } c = 0 \; v_y \; at \; t = 0 = 0 \qquad (5)$$

$$\therefore \int \dot{y}dt = -\int gtdt$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + c \quad c = h \; (at \; t = 0)$$

$$\therefore y = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (6)$$

مثال محلول (تكملة)

- (b)

We need time (t). At time t, the bundle reaches the raft. At that time, raft is at position $y = 0$,

$$eq.(6) \rightarrow y = h - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$\therefore h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (7)$$

$$(7)\, in\, (4):$$

$$\rightarrow x = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\text{for } v_0 = 50\,\text{m/s and } h = 100\,\text{m}$$

$$\rightarrow x = 50\ \text{m/s}\sqrt{\frac{200\ \text{m}}{10\ \text{m/s}^2}} = 224\,\text{m}$$

شكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 02

مقدمة عامة – الجزء الثاني

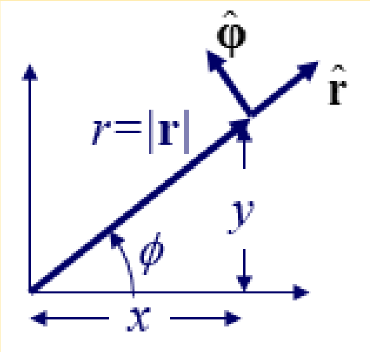
د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

1.7- الأحداثيات القطبية في بعدين 2D

- تطبيق قانون نيوتن الثاني أسهل ما يكون باستخدام الأحداثيات الكارتيزية.
- ولكن هذا لا يعني عدم أمكانية استخدامه مع غيرها من الأحداثيات
- ولنحاول دراسة الصورة عند استخدام الأحداثيات القطبية في بعدين فقط.
- التحويل بين النظامين يتم من خلال المعادلات التالية:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &= \arctan(y/x) \end{aligned}\right.$$



- لنقم الآن بتحديد متجهات الوحدة لهذه الأحداثيات كما يلي:

$$r \rightarrow \hat{\mathbf{r}}$$
$$\phi \rightarrow \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

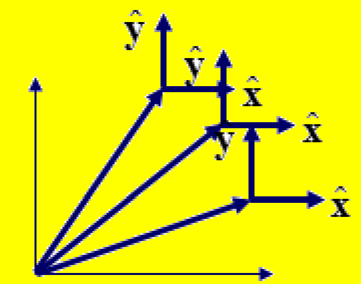
- وتذكر أن هذه المتجهات الوحدوية لها مقدار يساوي الوحدة، وأما اتجاهها فهو نفسه اتجاه الأحداثيات.

متجهات الوحدة في الأحداثيات القطبية

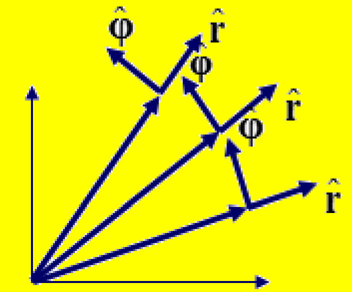
- هناك أكثر من طريقة لتحديد متجه وحدة لمتجه ما، فعلى سبيل المثال نختار متجها ما ولنقل $\mathbf{r}$ ثم نقسم ذلك المتجه على مقداره $|\mathbf{r}|$. في هذه الحالة نحصل على متجه مقداره وحدة واحدة واتجاهه هو نفسه اتجاه المتجه الأصلي.

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

- هناك فرق كبير بين متجهات الوحدة الكارتيزية ونظيراتها في الأحداثيات القطبية وهو كون الأولى ذات مقدار ثابت يساوي الوحدة واتجاه ثابت هو نفسه اتجاه الأحداثيات الكارتيزية. أما متجها الوحدة القطبية فلديها أيضا مقادرير تساوي الوحدة غير أن اتجاهاتها تتغير كما في الشكل.



Cartesian unit vectors are constant



Polar coordinate unit vectors change (direction) with time

متجهات الوحدة في الأحداثيات القطبية

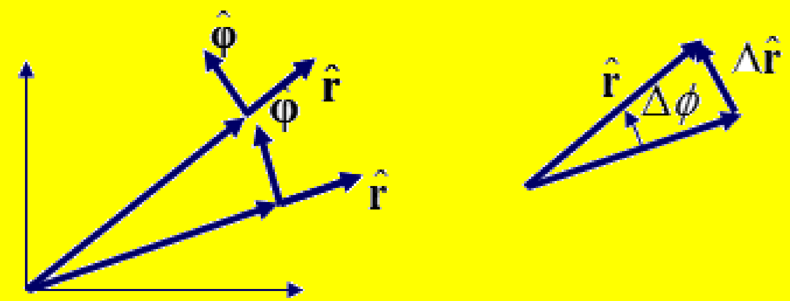
- بما أن متجهي الوحدة $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ متعامدين في الفضاء الثنائي، فأن أي متجه يمكن التعبير عنه بدلالة هذين المتجهين. على سبيل المثال يمكن أن نعبر عن القوة كما يلي: $\mathbf{F} = F_r\hat{\mathbf{r}} + F_\phi\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
- مثلا تخيل أن كتلة صغيرة مربوطة بحبل ويتم الدوران بها في الفراغ بشكل أفقي فهناك مركبتان للقوة المؤثرة الأولى على طول الحبل F_r وتقابل قوة الشد في الحبل والثانية عمودية على الحبل F_ϕ وتقابل قوة ما ولنقل مقاومة الهواء للكتلة.
- أن اتجاه الموضع في هذه الحالة سهل ويعبر عنه بالصورة: $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$
- ولحساب القوة من قانون نيوتن الثاني أي $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ فأننا نحتاج إلى اشتقاق متجه الموضع بالنسبة للزمن. فلو قمنا بالاشتقاق الأول وباعتبار متغيرين مضروبين في بعض فأن القاعدة توصلنا للنتيجة:

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}}$$

- (تفاضل الأولى في الثانية + الثانية في تفاضل الأولى). لقد احتفظنا بالحد الثاني لأنه ليس ثابتا في هذه الحالة بل متغير.

اشتقاق وحدات المتجهات القطبية

- كثيرا ما نسمع بأن مشتقة القيمة الثابتة (بالنسبة للزمن) تساوي الصفر. وهذا الكلام صحيح ولكن بأخذ الاعتبار بأن اشتقاق المتجهات يساوي صفرا فقط في حالة كون مقدارها ثابتا واتجاهها ثابت كذلك.
- ولهذا فأن التسارع المرتبط بجسم يدور بسرعة ثابتة في مسار دائري لا يساوي الصفر بالرغم من أن التسارع هو مشتقة السرعة. والسبب في ذلك هو أن تلك السرعة متغيرة الاتجاه كما هو واضح.
- دعنا ندرس متجها للموضع $\mathbf{r}$ يتغير خلال الفترة الزمنية $t_2=t_1+\Delta t \rightarrow t_1$ كما في الصورة أدناه:



Recall: arc length $= r\theta$

In this case, $\theta = \Delta\phi$ *and* $r = |\hat{\mathbf{r}}| = 1$

$$\Delta\hat{\mathbf{r}} = \Delta\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

اشتقاق وحدات المتجهات القطبية

- إذن من الشكل السابق: $\Delta\hat{\mathbf{r}} \approx \Delta\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
- لنستخدم التعبير التالي:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}\Delta t = \dot{\phi}\Delta t$$

- إذن:

$$\Delta\hat{\mathbf{r}} \approx \dot{\phi}\Delta t\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (1)$$

$$\rightarrow \lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\hat{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (2)$$

$$\therefore\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}r\hat{\mathbf{r}}$$

$$= \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (3)$$

- أي أن مركبات السرعة هي:

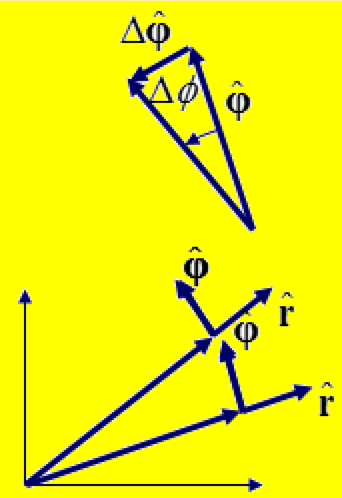
$$v_r = \dot{r}; \qquad v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega$$

اشتقاق وحدات المتجهات القطبية

❑ لو قمنا بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة للزمن نحصل على ما يلي:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)$$

$$= \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + r\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + r\dot{\varphi}\frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} \qquad (4)$$



❑ في الحد الخامس من المعادلة (4) ظهر لدينا الحد: $\dfrac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{dt}$

❑ للتعامل مع هذا الحد نستخدم نفس الطريقة السابقة. انظر للشكل

لتلاحظ أن:

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\Delta\phi\hat{\mathbf{r}} \qquad (5)$$

$$\because\ \Delta\phi = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}\Delta t = \dot{\phi}\Delta t \qquad (6)$$

$$(5) \rightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\Delta t} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\mathbf{r}} \qquad (7)$$

اشتقاق وحدات المتجهات القطبية

- في معادلة (5) اضفنا أشارة (-) حيث أن التغير في وحدة الاتجاه الدوراني هي عكس الاتجاه القطري. الآن معادلة (4) تصبح:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}) + (\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\boldsymbol{\varphi}} + r\dot{\phi}\frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} \\ &= (\ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \left(\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} - r\dot{\phi}^2\hat{\mathbf{r}} \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (8)\end{aligned}$$

- قد تبدو هذه المعادلة معقدة بعض الشئ ولكن يمكن النظر إلى بعض الحالات الخاصة التي تصبح فيها أسهل. مثلا لو افترضنا أن $r = constant$ (مثلا كتلة تدول بطرف حبل طوله ثابت).

- في هذه الحالة الحدين الأول والرابع في (8) تصبح أصفارا وبالتالي:

$$\mathbf{a} = -r\dot{\phi}^2\hat{\mathbf{r}} + r\ddot{\phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -r\omega^2\hat{\mathbf{r}} + r\alpha\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (9)$$

حيث الحد الأول عبارة عن التسارع المركزي المعروف $a_r = -r\omega^2 = -v^2/r$ والحد الثاني التسارع الزاوي.

قانون نيوتن الثاني باعتماد الأحداثيات القطبية

- بما أن معادلة (8) السابقة تعطينا التسارع في الفضاء القطبي فأنه صار من الممكن التعبير عن قانون نيوتن الثاني في هذا الفضاء كما يلي:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) \\ F_\phi = m\left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right) \end{cases} \qquad (10)$$

- وسوف نقوم باشتقاق تلك المعادلة لاحقا باستخدام معادلات لاجرانج.

شكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 03

بعض الطرق الرياضية في حساب التغيرات 1

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

6.0- مقدمة

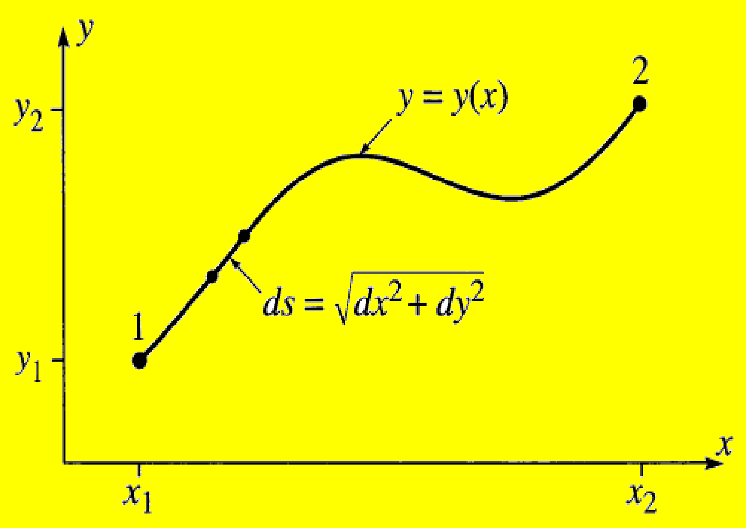
- كما في الباب الأول، هناك مسائل كثيرة يصبح من المناسب فيها استخدام أحداثيات أخرى غير الكارتيزية، فمثلا المسائل التي يكون لديها تناسق كروي يصلح لها الأحداثيات الكروية. ومن جانب آخر قد يحتم وضع المسالة اختيار نظام أحداثي معين، فمثلا في مسألة تصف حركة جسم فوق سطح كرة فمن المناسب هنا استخدام الأحداثيات الكروية وهكذا...
- لقد لاحظنا من الباب السابق ارتفاع درجة الصعوبة في التعبير عن قانون نيوتن الثاني عندما نطبقه على أحداثيات غير الكارتيزية، ومع ذلك تصبح المسائل أكثر صعوبة عندما نتحدث عن مسائل معقدة وصعبة.
- أن معنى ذلك أن استخدام قانون نيوتن الثاني لحل مثل تلك المسائل يصبح أصعب.
- أننا إذن بحاجة إلى طريقة لحل المسائل وأيجاد معادلات الحركة (قانون نيوتن الثاني) بشكل أسهل بالرغم من أن النتيجة هي نفسها في النهاية. وهذه الطريقة هي باستخدام معادلات لاجرانج.
- ولكن لن نتمكن من فهم معادلات لاجرانج إلا بالتعرف أولا على طريقة الحساب بالتغيرات Calculus of Variations .
- سوف نتعرف أكثر على هذا الموضوع من خلال بعض الأمثلة.

6.1- مثالان على حساب التغيرات

- ❑ تقوم فكرة حساب التغيرات على أساس البحث عن قيم دنيا minimum أو عظمى maximum للكميات التي يمكن التعبير عنها بالتكامل.
- ❑ المثال الأول: أقصر مسافة بين نقطتين

ربما كل واحد سوف يقول فورا: أقصر مسافة هي الخط المستقيم! ولكن كيف نثبت ذلك؟ أننا نحتاج لطريقة حساب التغيرات لأثبات هذه المقولة.

بحسب الصورة المرفقة، هناك نقطتان 1 و 2 وهناك خط منحني يصل بينهما. هذا الخط مهما كان شكله فهو لا يخرج عن العلاقة $y = y(x)$



يمكننا تحديد عنصر طولي في هذا الخط من نظرية فيثاغورس كما يلي: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

$$\because dy = \frac{dy}{dx}dx = y'(x)dx.$$

$$\therefore ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx \quad (1)$$

6.1- مثالان على حساب التغيرات

- إذن يمكن أيجاد طول الخط الواصل بين النقطتين باستخدام التكامل، ولكن معادلة (1) جعلت ذلك التكامل على متغير واحد هو x فقط. أذن ما نريد حسابه هو:

$$L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx. \qquad (2)$$

- ما نريد حسابه الآن هو البحث عن طريقة ما بحيث تصبح الكمية L هي أقل ما يمكن (أو أكبر ما يمكن في حالات أخرى).
- بمعنى آخر، بما أن هذا التكامل يعتمد أساسا على الدالة *y(x)* فنحن إذن نبحث عن قيمة لهذه الدالة تجعل ناتج التكامل (2) أقل ما يمكن.
- سوف نعود لهذا المثال ونقوم بحله ولكن قبل ذلك نذكر المثال الثاني:
- المثال الثاني: مبدأ فرمات Fermat's Principle

هنا السؤال المطلوب: ماهو المسار الذي يختاره الضوء للانتقال بين نقطتين في الفضاء. ولم يحدد ما إذا كان معامل الانكسار هو نفسه للفضاء أم متغيرا

6.1- مثالان على حساب التغيرات

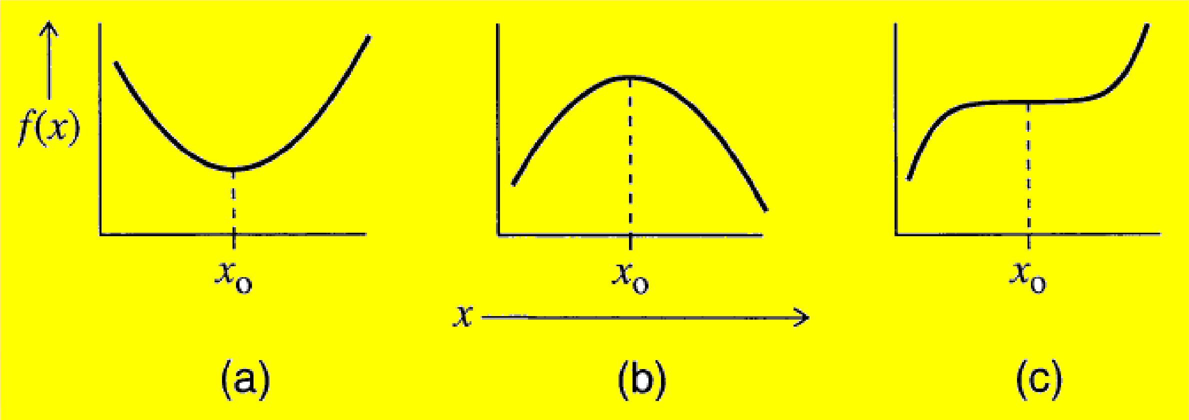
- قد يبدو الجواب بديهيا أن الضوء سوف يختار طريقا مستقيما في حالة كون معامل الانكسار هو نفسه، ولكن ماذا لو كان معامل الانكسار هو نفسه متغيرا؟ أو لو مر شعاع الضوء بعدسة سواء كانت مجمعة أو مشتته؟
- معلوم أن سرعة الضوء تختلف بحسب معامل انكسار الوسط فتكون أقصى ما يمكن في الفراغ وتقل كلما زادت قيمة معامل الانكسار n والذي يعرف بالعلاقة $n = c/v$ حيث c هي سرعة الضوء في الفراغ و v سرعته في الوسط.
- إذن الزمن الكلي الذي يحتاجه الشعاع لقطع المسافة بين النقطتين يعطى بالصورة:

$$\tau = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \frac{1}{c}\int_1^2 n\,ds = \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x_2} n(x,y)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx. \qquad (3)$$

- مع ملاحظة أن معامل الانكسار في (3) متغير ويعتمد على كل من x و y .

6.1- مثالان على حساب التغيرات

- لو تأملنا في المثالين لوجدنا أن هدفنا في الأول التأكد من أن الخط المستقيم هو المطلوب كأقصر مسافة، وأن المسار الذي يلزمه أقصر فترة زمنية هو المطلوب في الحالة الثانية.
- ماذا تعني لنا عبارة: أقصر؟ أي قيمة التكامل هي الأقل؟ وهذا يكون عندما تكون قيمة مشتقة الدالة هي الأقل؟
- ربما نتصور بأن الصورتين الوحيدتين هما عندما تكون للدالة قيمة عظمى أو قيمة دنيا حيث يصبح التفاضل يساوي (الميل) ويساوي الصفر أي أن: $\frac{df}{dx} = 0$
- نتأمل في الشكل التالي



6.1- مثالان على حساب التغيرات

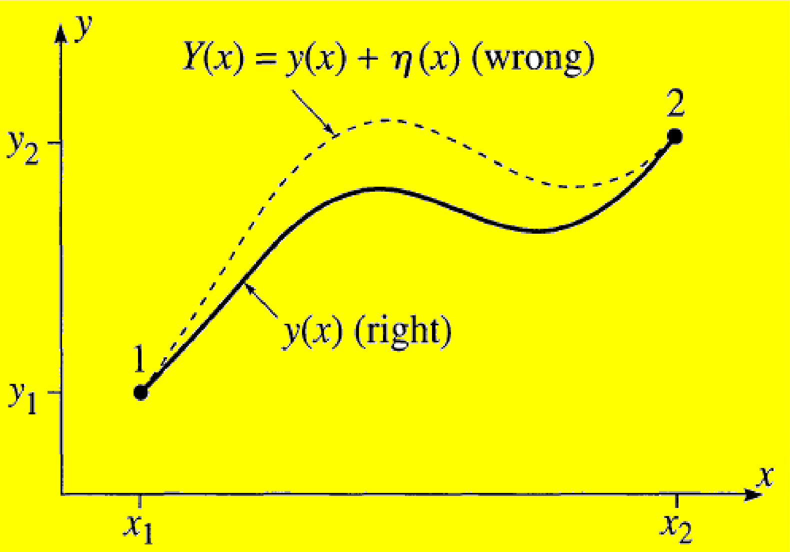
- في الشكل السابق (a) و (b) واضح أن هناك قاع وقمة على الأقل فيما يبدو بشكل مباشر.
- أما في الجزء (c) فأن تحديد النقطة التي تمثل نقطة الانقلاب بشكل واضح هو أمر صعب.
- إذن لابد من القيام بعمليات اختبار لقيمة المشتقة عند عدد من النقاط ابتداء من اليسار وحتى نصل لأفضل قيمة ممكنة تمثل القيمة الصفرية.
- هذه العملية هي ما نسميه : حساب التغيرات Calculus of Variations أي أنه يتم البحث عن تغيير صغير جدا يقربنا أكثر وأكثر من الحد الأدنى للمشتقة.
- وبتوضيح أكثر: في (a) نقوم بالتفاضل الأول ثم الثاني، فأن كانت قيمة المشتقة الثانية + فأن النقطة x_0 تمثل فعلا قيمة دنيا. وفي الجزء (b) نقوم بالتفاضل الثاني أيضا ونتوقع أن نحصل على قيمة – وهذا يدل كذلك على أن x_0 قيمة عظمى. أما في الجزء (c) فواضح أن التفاضل الثاني أيضا يساوي الصفر وبالتالي فلسنا متأكدين (رياضيا) أن النقطة x_0 تمثل قيمة دنيا أم عظمى. وهنا نحتاج لحساب التغيرات.

6.2- معادلات أولار ولاجرانج

- لو تأملنا في المعادلة (3) لوجدنا في داخل التكامل كلا من n وهي دالة في المتغير x وكذلك y' . وبالتالي من المناسب أن نكتب تعبيرا عاما لأية دالة تعتمد على كل من x والمشتقة y' كما يلي:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x]dx. \qquad (4)$$

- حيث ندرس هنا خطا منحنيا غير معلوم تمثله الدالة $y(x)$ لكنه يصل بين النقطتين x_1 و x_2



بما أننا لا نعلم ما هو الخط المناسب فنفترض وجود خطين كما هو في الشكل. أحدهما يمثل المسار المطلوب وهو$y(x)$ والثاني يمثل المسار الخاطئ وهو $Y(x)$. ونعبر عن الفرق بين المسارين باستخدام دالة ما هي: $\eta(x)$:

6.2- معادلات أولار ولاجرانج

$$Y(x) = y(x) + \eta(x) \qquad (5)$$

- بالتأمل نجد أن هناك عددا لا نهائيا من الدوال $\eta(x)$ كلها تعطي منحنيات خاطئة ولكن نفترض أن كل تلك المنحنيات أطول من المنحنى المطلوب.
- لاحظ أن كون جميع المنحنيات مهما كانت خاطئة فهى تبدأ وتنتهى بنفس النقاط فأن:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \qquad (6)$$

- من أجل مرونة أكثر نقوم بأدخال متغير آخر للمعادلة (5) وهو α ونعيد كتابتها:

$$Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x) \qquad (7)$$

نعيد الآن كتابة المعادلة (4) كما يلي:

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f[Y, Y'(x), x]dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f[y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta', x]dx. \qquad (8) \end{aligned}$$

6.2- معادلات أولار ولاجرانج

- ❑ المعادلة (8) سوف تساعدنا على تحديد المسار الأقل والذي يحقق: $dS/d\alpha = 0$ عندما تكون $\alpha = 0$.
- ❑ حتى نقوم بتفاضل التكامل في المعادلة (8) نحتاج لحساب التفاضل الجزئي $\partial S/\partial\alpha$ باستخدام قاعدة السلسلة Chain Rule :

$$\frac{\partial f(y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta', x)}{\partial\alpha} = \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}, \qquad (9)$$

$$\therefore \frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx = 0 \qquad (10)$$

- ❑ المعادلة (1) لديها حدين ونقوم الآن بتكامل الحد الثاني بالتجزيء كما يلي:

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta'\frac{\partial f}{\partial y'}dx = \left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx, \qquad (11)$$

ولكن الحد الأول عند التعويض يصبح = صفر لأن قيمة $\eta(x) = 0$ عند الطرفين

6.2- معادلات أولار ولاجرانج

- إذن معادلة (11) تصبح (وهي تمثل الحد الثاني في (1)):

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = -\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx, \qquad (12)$$

- بالتعويض من معادلة (12) في المعادلة (10) الأصلية نحصل على:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y} - \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx = 0 \qquad (13)$$

- معادلة (1) تساوي الصفر، وعندها أما $\eta(x) = 0$ أو القوس يساوي الصفر. ولكن $\eta(x)$ تساوي الصفر فقط عند النهايتين بحسب الافتراض وبالتالي:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad (14)$$

6.2- معادلات أولار ولاجرانج

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \qquad (14)$$

- هذه المعادلة تسمى: **معادلة أولار-لاجرانج Euler-Lagrange equation**
- هذه المعادلة صحيحة لجميع قيم x الواقعة في المدى $x_2 \geq x \geq x_1$
- معنى المعادلة: يمكننا الحصول على قيمة دنيا للمسار S لو استطعنا أن نجد دالة للمسار تحقق هذه المعادلة.
- أصبح حل المسائل يتم كما يلي: نبحث عن دالة $f[y(x), y'(x), x]$ بحيث تحقق المطلوب في المعادلة (4) السابقة. ثم نقوم بكتابة معادلة أولار-لاجرانج، ثم نقوم بحل تلك المعادلة لأيجاد الدالة المطلوبة y(x) التي تحقق شرط المسار الأقصر أو بشكل عام القيمة الدنيا (في بعض الأحيان القيمة القصوى أو العظمى).

شـكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 04

بعض الطرق الرياضية في حساب التغيرات 2

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

مثال 6.1 أقصر مسافة بين نقطتين

- كتبنا سابقا العلاقة التالية: $L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$
- الدالة المقصودة في داخل التكامل هي: $f(y, y', x) = \sqrt{1 + y'(x)^2}.$
- نطبق عليها معادلة (14) (معادلة أولار-لاجرانج) ونوجد الحدين التاليين:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \textbf{and} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

$$\therefore (14) \Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \Rightarrow y'^2 = c^2(1 + y'^2) = c^2 + c^2 y'^2$$

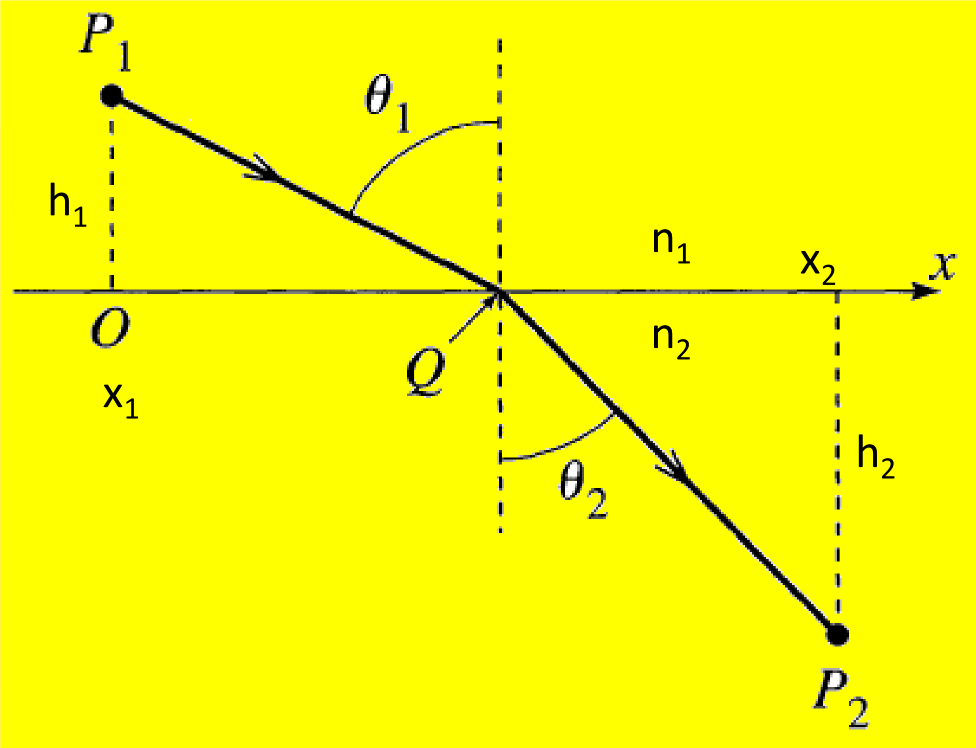
$$\Rightarrow y'^2(1 - c^2) = c^2 \Rightarrow y'^2 = \frac{c^2}{1 - c^2} \Rightarrow y' = c'$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = c' \Rightarrow dy = c'dx \Rightarrow y = c'x + c''$$

$$or: \mathbf{y} = \mathbf{ax} + \mathbf{b}$$

تمرين محلول

- A ray of light travels from point P_1 in a medium of refractive index n_1 to P_2 in a medium of index n_2, by way of the point Q on the plane interface between the two media, as in the figure. Show that Fermat's principle implies that, on the actual path followed, Q lies in the same vertical plane as P_1 and P_2 and obeys Snell's law, that $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$



تمرين محلول - الحل

$$t = \int_{P_1}^{P_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \frac{1}{c}\int_{P_1}^{P_2} n\,ds \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{let}\; P_1(x,y,z) = P_1(0,h_1,0) \\ &\textbf{let}\; P_2(x,y,z) = P_2(0,-h_2,0) \\ &\textbf{let}\; Q(x,y,z) = Q(x,0,z) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\because\; ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (3)$$

$$\therefore\; t = \int_{P_1}^{P_2} dt = \int_{P_1}^{Q_2} dt + \int_{Q}^{P_2} dt = \frac{n_1}{c}\int_{P_1}^{Q} ds + \frac{n_2}{c}\int_{Q}^{P_2} ds \qquad (4)$$

$$\therefore\; t = \frac{n_1}{c}\int_{0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx + \frac{n_2}{c}\int_{x}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (5)$$

تمرين محلول - الحل (متابعة)

- الآن لابد أن نعرف بأن كون معاملات الانكسار n_1, n_2 ثوابت فيؤدي ذلك إلى أن المسارات بين P_1 and Q و P_2 and Q يجب أن تكون مستقيمة:

$$let \quad d_1 = P_1Q = \sqrt{x^2 + h_1^2}$$

$$and \ d_2 = QP_2 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + h_2^2}$$

$$\therefore t = \frac{n_1}{c}\sqrt{x^2 + h_1^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(x_2 - x)^2 + h_2^2}$$

$$\rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{n_1}{c}\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{n_2}{c}\frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + h_2^2}} = 0$$

$$\rightarrow n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = n_2 \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + h_2^2}}$$

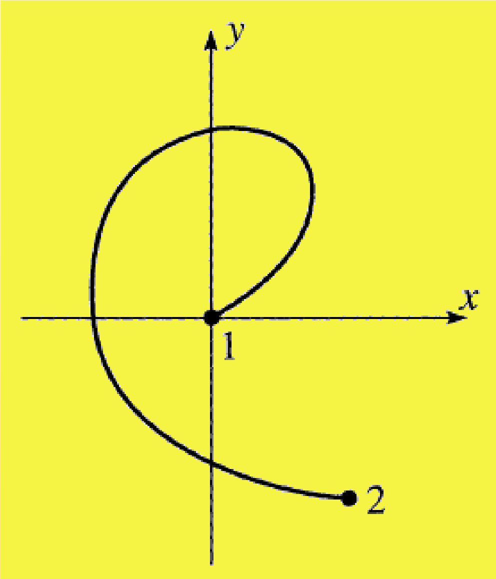
$$\because \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \sin\theta_1 \quad and \quad \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + h_2^2}} = \sin\theta_2$$

$$\therefore n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (6)$$

حساب التغيرات في ظل وجود أكثر من متغيرين

- هناك حالات يصعب فيها وصف الخط الموجود بين نقطتين بالعلاقة $y(x)$ كما فعلنا سابقا. أنظر الشكل المرفق كمثال على ذلك.
- نحتاج هنا أن نتصور مسارا يعتمد على متغير مستقل تماما ولنسميه u بحيث أن:

$$x = x(u), y = y(u)$$



- يصبح طول القطعة من المسار:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\,du \qquad (28)$$

- وبالتالي يصبح المسار كاملا بالصورة التالية:

$$L = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{x(u)^2 + y(u)^2}\,du. \qquad (29)$$

- أذن صار لدينا دالتان مجهولتان هما: $x(u), y(u)$
- وأصبحت المسألة المطلوب حلها هي:

$$S = \int_1^2 f[x(u), y(u), x'(u), y'(u), u]du. \qquad (30)$$

حساب التغيرات في ظل وجود أكثر من متغيرين

- قد يبدو الحل الآن أصعب من السابق بسبب وجود دالتين بدل دالة واحدة
- ولكن سوف نستخدم نفس التقنيات ونفترض وجود عدة مسارات خاطئة ومسار واحد صحيح (الأقصر) أي أن:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u) + \alpha\xi(u); \qquad \xi(u_1) = \xi(u_2) = 0. \\ y &= y(u) + \beta\eta(u); \qquad \eta(u_1) = \eta(u_2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

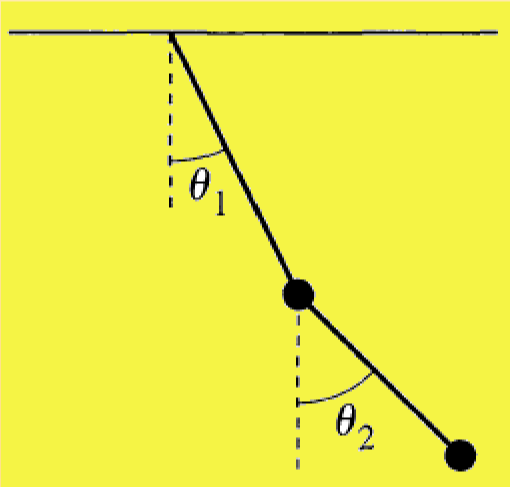
- وبهذا فالمسار المطلوب هو الذي يحقق الشرطين: $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0.$
- سوف لن نعيد نفس الخطوات التي أوصلتنا للمعادلة (14) في المحاضرة الماضية وأنما نكتفي حاليا بنتيجة مشابهة:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \qquad (32)$$

- في الباب السابع سوف تواجهنا مسائل ذات عدة متغيرات وبالتالي عدد من معادلات أولار-لاجرانج أي مثل معادلة (32). سوف يتبين لنا أن من أهم سمات معادلات لاجرانج سهولة استخدامها مع أية أحداثيات (كارتيزية وغير كارتيزية)

الأحداثيات المعممة

- استخدمنا حتى الآن أحداثيات كارتيزية، وقطبية ويبقى غيرها كذلك ولاحظنا أمكانية الحل باستخدام أي من تلك الأحداثيات. وبينا كذلك أن معادلات لاجرانج تجعل التعامل مع أية مجموعة من الأحداثيات أمرا سهلا.
- أذن بدلا من أن نكتب الأحداثيات (r, θ, ϕ) or (ρ, ϕ, z) ,(x, y, z) سوف نبدأ بكتابة الأحداثيات برموز عامة لا تشير إلى نوع أو آخر من الأحداثيات: أي بالصورة: $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$.
- تسمى هذه الأحداثيات: الأحداثيات المعممة generalized coordinates
- مثلا في الشكل المجاور نختار الأحداثيات المعممة التي تخدم المسألة ونجد أنها هنا: θ_1, θ_2 . يسمى النظام المجارو البندول المزدوج وحله صعب ألا بالطريقة المذكورة.



- الأحداثيات المعممة لا ترتبط بفضاء معين فمن الممكن أن تكون بعدد n من الأبعاد.

The Lagrangian اللاجرانجيان

- مع بداية الباب القادم (السابع) سوف نبدأ باستخدام مجموعة من المعادلات يطلق عليها معادلات لاجرانج.
- تقوم هذه المعادلات على اللاجرانجيان وهو يقوم على فكرة الأحداثيات المعممة كما يلي:

$$f[q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t] \qquad (33)$$

- لاحظ هنا كيف تم تعميم الدالة المطلوب دراستها بحيث تعتمد حاليا على مجموعة من الأحداثيات المعمة + مشتقاتها + الزمن (الاشتقاق حاليا هو بالنسبة للزمن وليس x).
- وبهذا يمكن كتابة اللاجرانجيان كما يلي:

$$\mathsf{L} = \mathsf{L}[q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t]. \qquad (34)$$

- أي أن الدالة التي في داخل التكامل صارت هي ببساطة اللاجرانجيان نفسه. فيكتب التكامل كما يلي:

$$S = \int \mathsf{L}[q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t]\, dt \qquad (35)$$

The Lagrangian اللاجرانجيان

- المطلوب من اللاجرانجيان L في داخل التكامل أن تحقق المعادلات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1};\ \frac{\partial L}{\partial q_2}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2};\cdots;\ \frac{\partial L}{\partial q_n}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \qquad (36)$$

- أذن هناك عدد n من المعادلات مقابل معادلتين هما أولار-لانجرانج السابقتين.
- إذا تحققت هذه المعادلات فأن التكامل في معادلة (35) يحقق المطلوب (أي يحدد القيمة الدنيا أو العظمى). والعكس صحيح فأذا كان التكامل المذكور يحقق المطلوب فأن هذه المعادلات صحيحة.
- قام لاجرانج بتطوير معادلات في نهاية القرن الثامن عشر
- تتميز هذه المعادلات بميزتين أساسيتين:

1. تأخذ معادلات لاجرانج نفس الشكل بغض النظر عن نظام الأحداثيات المستخدم وبالتالي فطريقة الحل هي نفسها في كل مرة وكل مسألة.
2. الميزة الثانية أنها لا تعتمد على القيود الخارجية على النظام مما جعل حلها أسهل حتى لو كان النظام يخضع لقوى من تلك القيود.

ميزة معادلات لاجرانج مقابل معادلات نيوتن

- قام لاجرانج بتطوير معادلات في نهاية القرن الثامن عشر
- تتميز هذه المعادلات بميزتين أساسيتين:
- تأخذ معادلات لاجرانج نفس الشكل بغض النظر عن نظام الأحداثيات المستخدم وبالتالي فطريقة الحل هي نفسها في كل مرة وكل مسألة.
- الميزة الثانية أنها لا تعتمد على القيود الخارجية على النظام مما جعل حلها أسهل حتى لو كان النظام يخضع لقوى من تلك القيود.

شكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 05

معادلات لاجرانج 1

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

7.1- معادلات لاجرانج للحركة غير المقيدة

- القطار يتحرك على سكة الحديد وبالتالي فحركته مقيدة، الخرزة التي تتحرك على سلك حركتها مقيدة حيث لا يمكنها مغادرة السلك. وأما الحركات غير المرتبطة بقوة ما تجربها على نوع من أنواع الحركة فهي الحركة غير المقيدة.
- نتذكر أولا الدالة f التي لعبت دورا أساسيا في معادلة أولار-لاجرانج في الباب السابق وتؤدي إلى:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad (1)$$

- سوف نستفيد من هذه الدالة والمعادلة ونفترض وجود دالة هي: $\mathcal{L} = T - U$ والتي سوف نسميها اللاجرانجيان بحيث لو تم استخدامها في المعادلة (1) أعلاه فأنها تعطينا معادلة الحركة للجسم equation of motion ونعرف الكميات كما يلي: T هي الطاقة الحركية للجسم وتكتب بالصورة التالية:

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad (2)$$

- والحد الثاني U يعبر عن طاقة الوضع للجسم ويكتب بالصورة:

$$U = U(\mathbf{r}) = U(x, y, z) \qquad (3)$$

7.1- معادلات لاجرانج للحركة غير المقيدة

- لاحظ أن $\mathcal{L}$ لا تعبر عن الطاقة الكلية أي $T + U$ وأنما الفرق بين طاقة الحركة وطاقة الوضع.
- إذن يعتمد حد الطاقة الحركية على السرعات $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ويعمتمد حد طاقة الوضع على الأحداثيات x, y, z وبالتالي فاللاجرانجيان نفسه $\mathcal{L}$ يعتمد على الأثنين معا

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t] \qquad (4)$$

- نطبق التفاضلات في المعادلة (1) على الدالة (4):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x. \qquad (5)$$

- لو قمنا بالتافضل مرة ثانية للجزء الثاني:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x} = \dot{p}_x = F_x \qquad (6)$$

- بمقارنة الجزء الأول في (5) و (6) نجد أن:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}.$$

أي أن معادلة لاجرانج صحيحة

7.1- معادلات لاجرانج للحركة غير المقيدة

- في ثلاثة أبعاد إذن نكتب المعادلات كما يلي:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}. \qquad (7)$$

- لو قمنا بمقارنة معادلات لاجرانج بمعادلات: أولار-لاجرانج في الباب السادس لوجدناها متطابقة.
- بما أن معادلات أولار-لاجرانج السابقة كانت عبارة عن حل للتكامل: $S=\int_{x_1}^{x_2} f dx$
- هنا الصورة مشابهة: $S=\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt$
- يسمى هذا التكامل: تكامل الأداء action integral، وعندما يكون بقيمته الأدنى فيسمى مبدأ الأداء الأدنى principle of least action
- وفي الحقيقة فأن المسار الفعلي للجسم الذي يتبعه بين النقطتين 1 و 2 خلال فترة زمنية بين t_1 و t_2 يسمى: مبدأ هاملتون Hamilton’s Principle

$$S=\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt \qquad (8)$$

الأحداثيات المعممة

- حتى هذه اللحظة تبين لنا أن العبارات التالية تعطي نفس النتيجة:
  1. **يمكن تحديد مسار الجسم باستخدام قانون نيوتن الثاني $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$**
  2. **يمكن تحديد المسار باستخدام معادلات لاجرانج**
  3. **يمكن تحديد المسار باستخدام مبدأ هاملتون**

- معادلات (7) كانت باستخدام الأحداثيات الكارتيزية، ولكن كما سبق فأن الأحداثيات الكارتيزية ما هي إلا أحد الخيارات ولذا فنود التعبير عن نفس المعادلات ولكن باستخدام الأحداثيات المعممة التي سبق الحديث عنها. فنعبر أولا عن اللاجرانجيان باستخدام تلك الأحداثيات، ثم نكتب معادلات لاجرانج:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]. \tag{9}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3}. \tag{10}$$

- وهي صالحة لجميع أنظمة الأحداثيات بشرط واحد فقط: أن يتم قياسها في أطار أسناد قصوري (مستقل زمنيا)

مثال 7.1

- For a single particle in two dimensions, in Cartesian coordinates, under some arbitrary potential energy U(x, y), the Lagrangian is

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y). \qquad (11)$$

- In this case, there are two Lagrange equations

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}. \qquad (12)$$

- The left side of each equation is just

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y. \qquad (13)$$

- The right side of each equation, in turn, is just

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}m\dot{x} = m\ddot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt}m\dot{y} = m\ddot{y}. \qquad (14)$$

- Equating these, we have Newton's second law

$$F_x = m\ddot{x}, \qquad F_y = m\ddot{y} \qquad \text{or} \qquad \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \qquad (15)$$

القوى والاندفاعات المعممة

- نلاحظ أن الجزء الأيسر من معادلات لاجرانج في الأحداثيات الكارتيزية يعطي:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y. \qquad (16)$$

- وهذه النتيجة هي للقوة. إذن بشكل عام، عندما نستخدم الأحداثيات المعمة ونقو بحساب هذا الجزء من معادلات لاجرانج فأننا نحصل على نتيجة ما تشبه القوة أو تقوم بعمل مشابه: نسميها بالقوة المعمة generalized force :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = (i\text{th component of generalized force}). \qquad (17)$$

- بنفس الطريقة الجزء الأيمن من المعادلات يعطي الاندفاعات المعممة generalize momentum

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = (i\text{th component of generalized momentum}). \qquad (18)$$

- بشكل مبسط ينظر إلى معادلة لاجرانج: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$ على أنها:

القوة المعممة = معدل تغير الاندفاع المعمم

generalized force = rate of change of generalized momentum

مثال 7.2

- Same as example 7.1, but in polar coordinates. In this case, the potential energy is $U(r, \phi)$, the kinetic energy: $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$.
- so the Lagrangian is just

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r,\varphi).$$

- In this case, there are two Lagrange equations

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$\rightarrow mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = m\ddot{r}, \qquad -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}$$

- الحد الأول هو حد القوة: $-\frac{\partial U}{\partial r} = F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right),$
- لفهم الحد الثاني نتذكر العلاقة الرياضية:
- أذن:

$$-\frac{\partial U}{\partial \phi} = rF_\phi = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right).$$

حيث استفدنا من العلاقة الرياضية:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

مثال 7.2

- ماذا تعني تلك العلاقة؟

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\rightarrow \nabla U = 0 + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\because F_\varphi = -\nabla U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

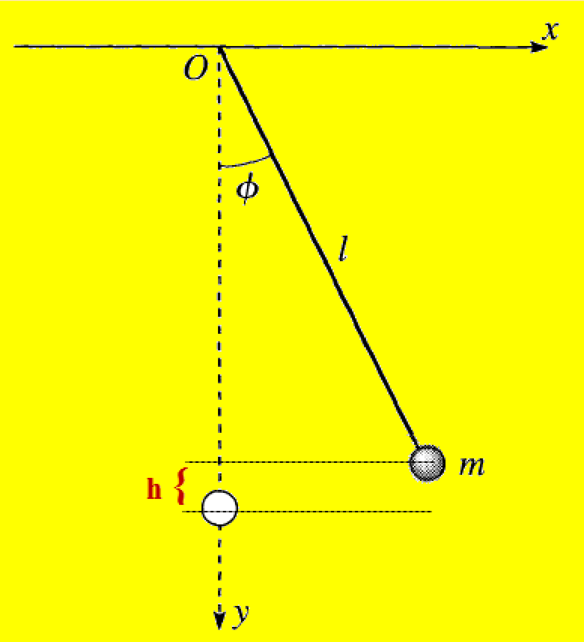
$$\therefore rF_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right)$$

- ماهي الحدود التي حصلنا عليها؟

الاندفاع الزاوي	$mr^2\dot{\varphi}$
التسارع المركزي	$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$
عزم اللي	rF_φ

7.2- مثال على نظام مقيد

- ذكرنا سابقا بأن ما يميز معادلات لاجرانج أنها متحررة من قيود (القيود).
- سوف نتحدث عن الموضوع بالتفصيل لاحقا ولكن نفص الموضوع في مثال يخضع للقيد. كتلة صغيرة معلقة بحبل يتدلى من سقف (الكتلة مرتبطة بقيد الحبل).
- كما هو واضح من الشكل، تتحرك الكتلة في بعدين تحت القيد التالي: $\ell = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- لحل المسألة يمكن التخلص من y والتعبير عنها بدلالة x أي $y = \sqrt{\ell^2 - x^2}$.
- ولكن أسهل من ذلك يمكن استخدام الأحداثي ϕ
- كالمعتاد نكتب أولا: $\mathcal{L} = T - U$ بدلالة ϕ
- نبحث بعد ذلك عن حد الجهد، وهو واضح من الرسم باعتبار أن أسفل الصورة يمثل فرق الجهد الصفري وبالتالي:



$$U = mgh = mgl(1 - \cos\phi).$$

نفس الشئ مع حد الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2$.

- نقوم أخيرا بتطبيق معادلة لاجرانج: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$,

ونحصل على النتيجة:

$$\boxed{-mg\ell\sin\varphi = m\ell^2\ddot{\varphi}. \qquad (\equiv I\alpha)}$$

7.2- مثال على نظام مقيد

- توضيح أكثر للمثال:
- أولا: لماذا اخترنا حد الطاقة الحركية بالصورة $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2.$
- ج: لأن السرعة $v = r\omega = r\dot{\varphi}$
- ثانيا: التفاضل في الحد الأيسر بالنسبة للأحداثي ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}U = \frac{\partial}{\partial \varphi}(mgh) = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[mgl(1-cos\phi)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[mgl - mglcos\phi\right] = 0 + mgl\sin\phi$$

- لاحظ وجود أشارة (-) قبل U في الدالة $\mathcal{L} = T - U$
- ثالثا: التفاضل في الحد الأيمن:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\tfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left[m\ell^2\dot{\varphi}\right] = m\ell^2\ddot{\varphi}$$

شـكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 06

معادلات لاجرانج 2

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

7.3- الأنظمة المقيدة بشكل عام

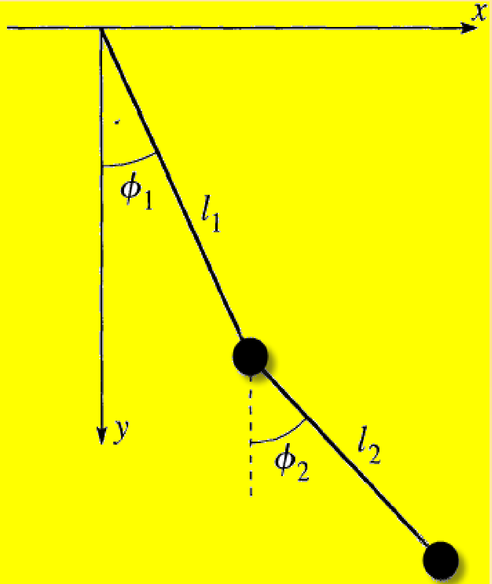
- لو كان لدينا نظام مكون من N من الأجسام وسميناها $\alpha = 1, \ldots, N$ وكانت مواقع هذه الأجسام هي $\mathbf{r}_\alpha$. كما سبق نسمى الأحداثيات $q_1, \ldots, q_n$ بالأحداثيات المعممة.
- يمكن التعبير عن المواقع بدلالة الأحداثيات كما يلي:

$$\mathbf{r}_\alpha = (q_1, \cdots, q_n, t) \qquad [\alpha = 1, \cdots, N], \qquad (34)$$

- بالمقابل يمكن التعبير العكسي التالي:

$$q_i = q_i(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N, t) \qquad [i = 1, \cdots, n]. \qquad (35)$$

- مثلا في نظام كارتيزي ثلاثي الأبعاد فعدد الأحداثيات المعممة لا يتجاوز 3N .
- مثال: البندول السابق (7.2) بالرغم من وجود أحداثيين هما (x, y) فأن هناك أحداثيا معمما واحدا هو ϕ حيث:



$$\mathbf{r} = (x, y) = (l \sin \phi, l \cos \phi).$$

- ومثال آخر في الشكل المجاور (بندول مزدوج):

$$\mathbf{r_1} = (l_1 \sin \phi_1, l_1 \cos \phi_1) = \mathbf{r_1}(\phi_1) \qquad (36)$$

$$\mathbf{r_2} = (l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2 , l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2) = \mathbf{r_2}(\phi_1, \phi_2) \qquad (37)$$

7.3- الأنظمة المقيدة بشكل عام (درجات الحرية)

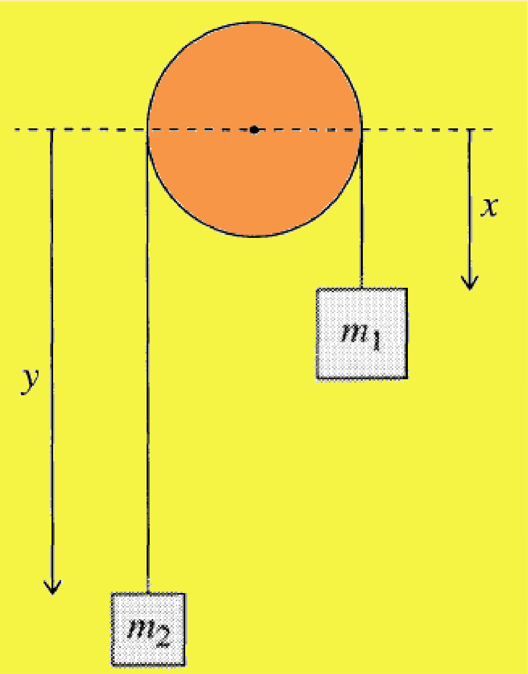
- عندما نتحدث عن نظام ما، فمن المناسب الحديث عن درجات الحرية المتاحة للنظام أي الاتجاهات التي يمكنه أن يتحرك بها بشكل حر ومستقل
- البندول البسيط لديه درجة حرية واحدة وهي الزاوية بين الحبل والرأسي، بينما البندول المزدوج لديه درجتان للحرية (زاوية الحبل الأول وزاوية الحبل الثاني)
- يمكننا أن نفهم القيود المفروضة على نظام ما كما يلي: إذا كان لدينا N من الأجسام وكانت درجات الحرية المتاحة هي أقل من $3N$ فأن النظام مقيد (في ثلاثة أبعاد)، أما في بعدين يصبح النظام مقيدا أذا كان عدد درجات الحرية أقل من $2N$
- الجسم الصلب الحر لديه 6 درجات حرية.
- الخرزة التي تتحرك على سلك لديها درجة حرية واحدة فقط.
- جسم يتحرك فقط على سطح مستوي: لديه درجتين للحرية
- بما أن عدد الأحداثيات المعممة = عدد درجات الحرية
- أذن هناك عدد من معادلات لاجرانج = عدد درجات الحرة (معادلة لكل درجة)
- أي نظام يحقق ما ذكر أعلاه يسمى « نظام هولونومي» *holonomic* والقيود أيضا تسمى : القيود الهولونومية.
- جميع مسائل هذا المقرر من هذا النوع لأن حلها أسهل

7.3- الأنظمة المقيدة بشكل عام (الأنظمة غير الهولونومية)

- دعنا نتصور كرة موجودة على سطح مستوي (بعدين).
- لو وضعنا الكرة في نقطة الأصل ورسمنا علامة في أعلا الكرة
- ثم حركنا الكرة بدورة كاملة على محور x فأن العلامة سوف تظهر مرة ثانية
- لو دحرجنا الكرة على محور y بدورة كاملة سوف تظهر العلامة أيضا
- ولكن لو دحرجنا الكرة وأعدناها لنقطة الأصل ولكن هذه المرة على طور الوتر فأن العلامة لن تظهر؟
- ومعنى ذلك أن الأحداثيين x و y غير كافيين لوصف الحركة بشكل دقيق
- إذن سوف نحتاج إلى عمليات دوران أضافية، وبالتحديد نحتاج إلى توفير ثلاث حركات دورانية لأتمام وصف الحركة
- إذن صار لدينا 5 أحداثيات بدل 2 هي الأصل
- مثل هذا النظام يسمى (غير هولونومي) *nonholonomic*

مثال 7.4 آلة أتوودز

- Consider the Atwood machine first met in Figure 4.15 and shown again in Figure , in which the two masses m_1 and m_2 are suspended by an inextensible string (length *l*) which passes over a massless pulley with frictionless bearings and radius *R*. Write down the Lagrangian , $\mathcal{L}$, using the distance *x* as generalized coordinate, find the Lagrange equation of motion, and solve it for the acceleration $\ddot{x}$ Compare your results with the Newtonian solution.



مثال 7.4 آلة أتوودز

نلاحظ أن طول الحبل l يحسب النظر إليه كما يلي.

$$x + y + \pi R = l \quad \text{------} \quad (1)$$

$$\rightarrow y = l - \pi R - x$$

$$= -x + (l - \pi R)$$

$$= -x + \text{const.} \quad \text{-----} \quad (2)$$

$\therefore$ use x as generalized coordinate

note $(2) \rightarrow \dot{y} = \dot{x}$

$$\therefore L = T - U$$

for $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, \dot{x}^2 \quad \text{---} \quad (3)$$

for U: taking $U = 0$ at center of polly

$$\rightarrow U = -m_1 g x - m_2 g y = -(m_1 - m_2) g x + C$$

نصف المحيط $= \pi R$

مثال 7.4 آلة أتوودز

$$\Rightarrow L = T - U$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + (m_1-m_2)gx \quad \text{---} (4)$$

$\because$ lagrange equation of motion is:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad \text{-- --- ---} (5)$$

$$L.H.S: \quad \frac{\partial L}{\partial x} = (m_1-m_2)g \quad \text{-----------} (6)$$

$$R.H.S: \because \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\ddot{x} \quad (7)$$

$$(6) \text{ and } (7) \rightarrow (m_1-m_2)g = (m_1+m_2)\ddot{x} \quad \text{-----} (8)$$

مثال 7.4 آلة أتوودز

$$\therefore \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad \text{-------} \ (9)$$

بالمقارنة مع طريقة نيوتن :

حيث يوجب لتتبع ~ m_1 , m_2 ← وجود معادلتين

m_1: $\quad m_1 g - F_t = m_1 \ddot{x}$ ...(a)

m_2: $\quad F_t - m_2 g = m_2 \ddot{x}$ ...(b)

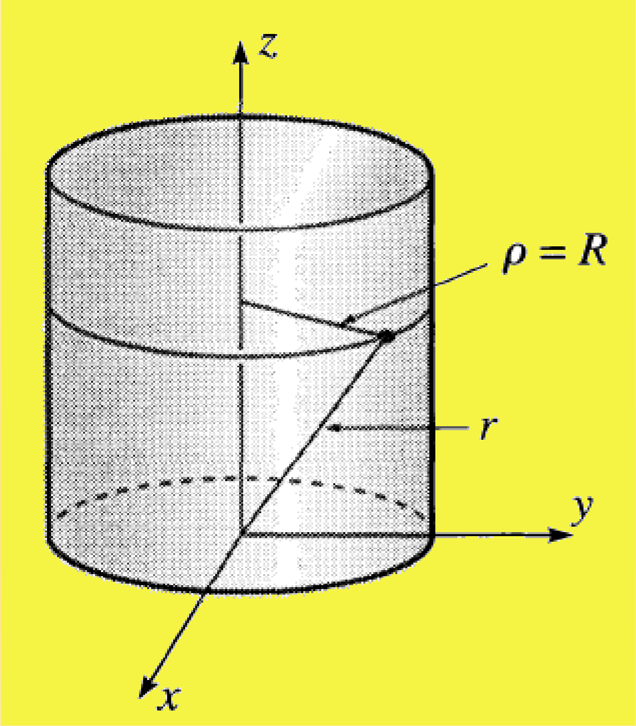
$\{ F_t \equiv T$ ، شد في الحبل

تمثل F_t القيد في المسألة

ومنها فإن الحل بطريقة لاجرانج لم يلحظ بالمرة لهذا القيد. كما أنه تم اعتماد معادلة واحدة فقط بدلاً من معادلتين.

لاحظ أن جمع المعادلتين (a) + (b) ← (9)

مثال 7.5 جسم يتحرك على سطح اسطواني

- Consider a particle of mass m constrained to move on a frictionless cylinder of radius R, given by the equation $\rho = R$ in cylindrical polar coordinates (ρ, ϕ, z). Besides the force of constraint (the normal force on the cylinder), the only force on the mass is a force $F = -k\mathbf{r}$ directed toward the origin. Using z and ϕ as generalized coordinates, find the Lagrangian $\mathcal{L}$. Write down and solve Lagrange's equations and describe the motion.
- 

مثال 7.5 جسم يتحرك على سطح اسطواني

$\because$ الجسم يتحرك على السطح $\leftarrow \rho = R$

$\therefore$ نستطيع إلغاء هذا الإحداثي

$\therefore$ only 2 coordi. (z, ϕ)

We have:

$$v_\rho = 0 \qquad v_z = \dot{z} \qquad v_\phi = R\dot{\phi}$$

$\therefore$ for T: $\quad T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$ ------ (1)

for U: $\quad \because \bar{F} = -k\bar{r}$

$\longrightarrow \quad U = \frac{1}{2} k r^2$ (by integration $\int$).

$\because r^2 = R^2 + z^2$ (من نظرية فيثاغورس)

$\therefore \quad U = \frac{1}{2} k (R^2 + z^2)$ ------- (2)

مثال 7.5 جسم يتحرك على سطح اسطواني

$$\therefore L = T - U = \tfrac{1}{2} m (R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \tfrac{1}{2} k (R^2 + z^2) \quad --- (3)$$

we have 2 eq. 1 for z + 1 for ϕ

$$z: \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) \rightarrow -kz = m\ddot{z} \quad ------ (4)$$

$$\phi: \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) \rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\phi}) \quad ---- (5)$$

بالنسبة لمعادلة (4) ← متذبذب توافقي في اتجاه z

" " (5) ← الاندفاع الزاوي Ang-momentum

محفوظ (ثابت زمنياً) حول المحور z.

" " m و R ثوابت ← السرعة الزاوية $\dot{\phi}$ ثابتة $\dot{\phi} = \text{const}$

∴ الجسم يدور بسرعة زاوية ثابتة ويتذبذب ↑ل توافقياً"

مثال 7.6 خرزة حرة على أطار يدور بسرعة زاوية ثابتة

- A bead of mass *m* is threaded on a frictionless circular wire hoop of radius *R.* The hoop lies in a vertical plane, which is forced to rotate about the hoop's vertical diameter with constant angular velocity $\dot{\phi} = \omega$, as shown in Figure . The bead's position on the hoop is specified by the angle *e* measured up from the vertical. Write down the Lagrangian for the system in terms of the generalized coordinate θ and find the equation of motion for the bead

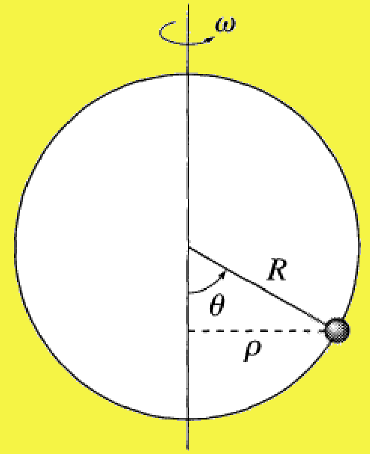


Figure 7.9 A bead is free to move around the frictionless wire hoop, which is spinning at a fixed rate ω about its vertical axis. The bead's position is specified by the angle θ; its distance from the axis of rotation is $\rho = R \sin\theta$.

مثال 7.6 خرزة حرة على أطار يدور بسرعة زاوية ثابتة

$\because L = T - U$

T: $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta)$ --- (1)

U: let $U = 0$ at the bottom

$\rightarrow U = mgR(1 - \cos\theta)$ ---- (2)

$\therefore L = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) - mgR(1 - \cos\theta)$ --- (3)

$\therefore$ only 1 degree of freedom, only one coordinate θ

Now: $\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) \rightarrow$ L.H.S: $mR^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta - mgR \sin\theta$
R.H.S: $mR^2 \ddot{\theta}$

$\rightarrow mR^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta - mgR \sin\theta = mR^2 \ddot{\theta}$ ------ (4)

مثال 7.6 خرزة حرة على أطار يدور بسرعة زاوية ثابتة

solving for $\ddot{\theta}$: تسارع زاوي

$$(4) \rightarrow \ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right) \sin\theta \quad \text{-----} (5)$$

Two Possibilities: (1) $\omega = 0$

$\rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin\theta$ بندول بسيط

(2): $\ddot{\theta} = 0$ (equilibrium اتزان)

$\rightarrow \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right) \cancel{\sin\theta} = 0$

$\rightarrow \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$

"θ_0" زاوية الاتزان

شكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 07

مبدأ ومعادلات هاملتون

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

13.1 مقدمة في الهاملتونيان

- سبق الحديث عن الأحداثيات المعممة في لاجرانج:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t) = T - U \qquad (1)$$

- ثم عبرنا عن معادلات لاجرانج كما يلي:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad [i = 1, ..., \mathrm{n}] \qquad (2)$$

- أيضا استحثنا ما يسمى بالاندفاع المعم وعرفناه كما يلي:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad (3)$$

- نشير هنا إلى أن الاندفاع في (3) يسمى أيضا: الاندفاع القانوني canonical momentum وأحيانا يسمى بالاندفاع المرافق للأحداثي q_{i} .

- تعرف دالة هاملتونيان، وتختصر بكلمة: هاملتونيان كما يلي:

$$\mathcal{L} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \qquad (4)$$

- في بعد واحد فقط يمكن تتابة الهاملتونيان كما يلي:

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = T + U \qquad (5)$$

13.2 معادلات هاملتون

- لأثبات المعادلة (5)

$$\because \mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = 2T - (T - U) = T + U \qquad (6)$$

- لاشتقاق معادلات هاملتون:

$$\because \mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q}(q,\mathrm{p}) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q,p))$$

$$\therefore \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right] = p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}$$

$$\because \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}} = p \Rightarrow \text{1st and last term cancel}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt}p = -\dot{p}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\dot{p} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q} \qquad (8)$$

13.2 معادلات هاملتون

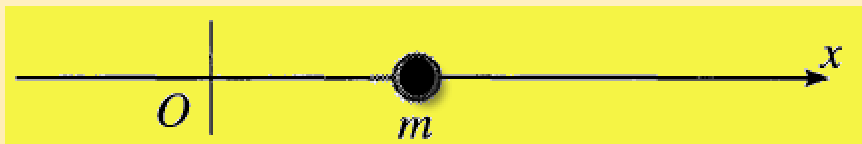
- إذن معادلات هاملتون:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \qquad and \qquad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \qquad (8)$$

- في معادلات لاجرانج كان هناك معادلة واحدة للحركة هي عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية في الأحداثي q (المقصود هو التسارع).
- في معادلات هاملتون هناك معادلتان كل منهما من الدرجة الأولى واحدة للأحداثي q والثانية للاندفاع p .

مثال 13.1 خرزة على سلك مستقيم

- Consider a bead sliding on a frictionless rigid straight wire lying along the x axis, as shown in Figure. The bead has mass m and is subject to a conservative force, with corresponding potential energy $U(x)$. Write down the Lagrangian and Lagrange's equation of motion. Find the Hamiltonian and Hamilton's equations, and compare the two approaches.



let x is our generalized coordinate

$$\therefore L(x,\dot{x}) = T - U$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x) \quad \text{-------} \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} = m\ddot{x} \quad \text{------} \quad (2)$$

(القوة) $F = -\frac{dU}{dx}$ $\because$

$\therefore$ (2) $\rightarrow$ $\boxed{F = ma}$

eq. of Motion [معادلة الحركة] وهذه نفس قانون نيوتن الثاني

مثال 13.1 خرزة على سلك مستقيم

للحل بطريقة هاملتون يلزمنا أولاً البحث عن

الاندفاع المعمم generalized momentum

$$\therefore\ p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \boxed{m\dot{x}} \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$\therefore\ H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \left[\frac{p^2}{2m} - U(x)\right]$$

$$= \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad \text{------} \quad (3)$$

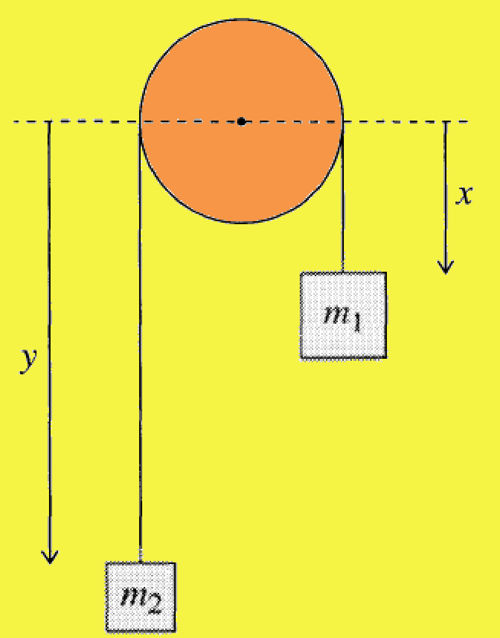
$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

$$(3) \rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (4) \text{ and } \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dU}{dx} \quad (5)$$

$$(4) \rightarrow p = m\dot{x} \checkmark \qquad (5) \rightarrow m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} = F$$

مثال 13.2 آلة أتوودز

- Set up the *Hamiltonian formalism* for the Atwood machine, as shown in the Figure.



Step # 1: what is H ?

سبق في الباب 7 دراسة مثال :

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 \quad --- (1)$$

$$U = -(m_1 - m_2) g x \quad --- (2)$$

$$\rightarrow H = T + U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - (m_1 - m_2) g x \quad (3)$$

step # 2: use p for x :

$$\therefore H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 - m_2) g x \quad - (4)$$

Step # 3: find $\frac{\partial H}{\partial p}$ and $-\frac{\partial H}{\partial x}$

مثال 13.2 آلة أتوودز

$$\therefore \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_1 + m_2} \quad \text{------} \quad (5)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = (m_1 - m_2) g \quad \text{------} \quad (6)$$

step # 4 : use p in (5) for $\dot{p}$ in (6) :

$$(5) \rightarrow \dot{p} = (m_1 + m_2) \ddot{x} \quad \text{------} \quad (7)$$

$$\therefore \quad (6) \rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{x} = (m_1 - m_2) g$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad \text{------} \quad (8)$$

تسارع الجسمين وهو نفس معادلات لاجرانج

Acceleration of m_1 and m_2

13.3- معادلات هاملتون في فضاء متعدد الأبعاد

- نعود لمادلة (4) السابقة:

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \qquad (4)$$

- ونكتبها بشكل مفصل أكثر:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \sum_i p_i \dot{q}_i(\mathbf{q},\mathbf{p},t) - \mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)) \qquad (9)$$

- باتباع خطوات مشابهة في بعد واحد نحصل على معادلات هاملتون التالية:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad and \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (i = 1,\ldots,\mathrm{n}) \qquad (10)$$

- إذن لو كان لدينا نظام لديه عدد n من درجات الحرية فيكون بالمقابل 2n من المعادلات كلها من الدرجة الأولى تمثل معادلات هاملتون. في لاجرانج كان لدينا n من المعادلات ولكن من الدرجة الثانية.

مثال 13.3 معادلات هاملتلون لجسم تحت تأثير قوة مركزية

- Set up Hamilton's equations for a particle of mass m subject to a conservative central force field with potential energy $U(r)$, using as generalized coordinates the usual polar coordinates r and ϕ.
- بالرغم من أن الجسم بالأساس مسموح له أن يتحرك في ثلاثة أبعاد تحت تأثير القوة المركزية U(r) إلا أنه لا يوجد سبب يجعله يتحرك في فضاء ثلاثي حيث أن القوة المركزية المذكورة غاية ما تسبب للجسم أن يدور في مستوى.
- ولذلك فأننا نختار r , ϕ كأحداثيات معممة.
- Step #1: Choose generalized coordinates: r , ϕ
- Step #2: Write down the T:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \qquad (1)$$

- Step #3: Find the generalized momenta:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \text{and} \qquad p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \qquad (2)$$

- الاندفاع الأول p_r ويسمى مرافق r هو عبارة عن الاندفاع الخطي العادي mv باتجاه r. أما الاندفاع الثاني p_ϕ ويسمى مرافق ϕ فهو عبارة عن الاندفاع الزاوي *angular momentum*.

مثال 13.3 معادلات هاملتلون لجسم تحت تأثير قوة مركزية

- Step #4: Solve for $\dot{r}$ *and* $\dot{\phi}$:

$$(2) \rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \qquad \text{and} \qquad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \qquad (3)$$

- Step #5: Write down H as function of r, ϕ, p_r, p_ϕ

$$\mathcal{H} = T + U = \left[\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} \right] + U(r) \qquad (4)$$

- Step #6: write down the 4 Hamilton equations:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \qquad (5)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr} \qquad (6)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \qquad (7)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0 \qquad (8)$$

مثال 13.3 معادلات هاملتلون لجسم تحت تأثير قوة مركزية

- Step #7: Explain the results:
  - نتيجة معادلة (5) هي الاندفاع الخطي العادي وهو نفس ما ذكر سابقا.
  - نتيجة المعادلة (6): نقوم باستخدام pr من معادلة (5) بعد تفاضله وتعويضه في (6):

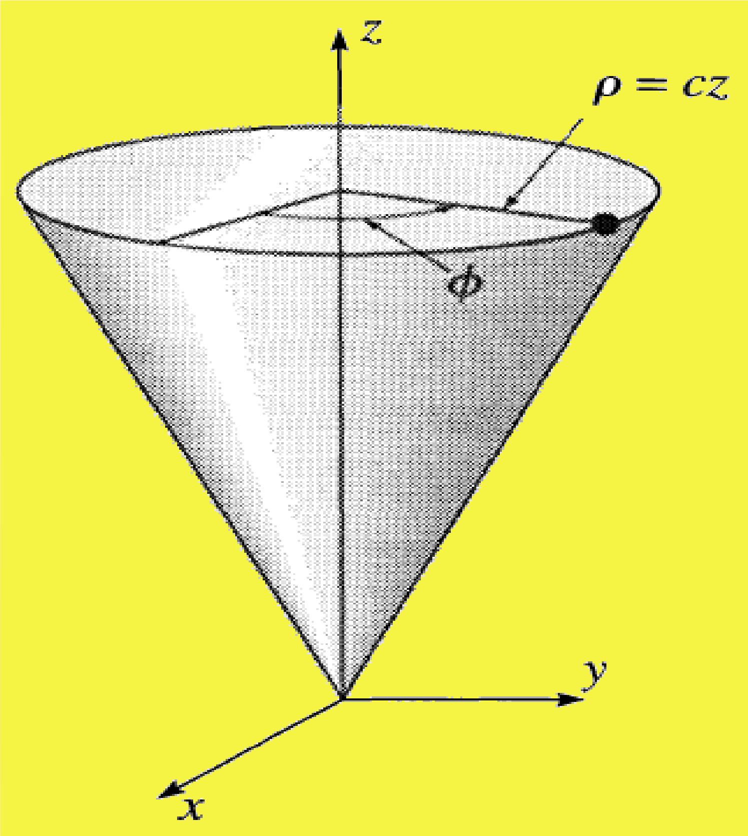
$$\rightarrow m\ddot{r} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr} \qquad (9)$$

وهو يتكون من حدين: الأول يمثل القوة الطاردة المركزية والثاني يمثل القوة المركزية الأصلية.

- نتيجة معادلة (7) هي عبارة عن الاندفاع الزاوي بشكل مباشر بعد ترتيب الحدود
- نيتجة معادلة (8) بكل بساطة تكرر نفس فرضيتنا ومعلومتنا الأصلية وهي أن الاندفاع الزاوي محفوظ (تفاضله = 0 بالنسبة للزمن).

مثال 13.4 معادلات هاملتلون لجسم يتحرك على سطح قمع

- Consider a mass m which is constrained to move on the frictionless surface of a vertical cone $\rho = cz$ in a uniform gravitational field g vertically down. Set up Hamilton's equations using z and ϕ as generalized coordinates.



مثال 13.4 معادلات هاملتون لجسم يتحرك على سطح قمع

الخطوة #1: اختيار الإحداثيات المعممة: z, ϕ

الخطوة #2: كتابة T :

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 \right] \quad \text{------} (1)$$

الحركة الأفقية ($\dot{\rho}^2$) — الحركة الرأسية ($\dot{z}^2$) — الحركة الدورانية ($\rho^2 \dot{\phi}^2$)

$\because \rho = c z$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} m \left[c^2 \dot{z}^2 + \dot{z}^2 + c^2 z^2 \dot{\phi}^2 \right]$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m \left[(c^2 + 1) \dot{z}^2 + (c z \dot{\phi})^2 \right] \quad \text{------} (2)$$

مثال 13.4 معادلات هاملتلون لجسم يتحرك على سطح قمع

Saving screenshot...

الخطوة # 3: البحث عن الاندفاعات المعممة:

$$P_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m(c^2+1)\dot{z} \qquad P_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mc^2 z^2 \dot{\phi} \quad \text{--- (3)}$$

الخطوة رقم # 4: نقوم بالحل لإيجاد $\dot{z}$ و $\dot{\phi}$ بدلالة الاندفاع

$$\rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m(c^2+1)} \quad \text{and} \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mc^2 z^2} \quad \text{--- --- --- (4)}$$

الخطوة # 5: نكتب الهاملتونيان:

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} + U = \frac{1}{2m}\left[\frac{p_z^2}{(c^2+1)} + \frac{p_\phi^2}{c^2 z^2}\right] \; gz \quad \text{-- (5)}$$

Paste

U

13/15

مثال 13.4 معادلات هاملتون لجسم يتحرك على سطح قمع

الخطوة رقم 6: نستخرج 4 معادلات هاملتون (معادلتين لكل إحداثي)

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m(c^2+1)} \quad ----(6)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{p_\phi^2}{m c^2 z^3} - mg \quad ----(7)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m c^2 z^2} \quad ----(8)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad ----(9)$$

$\longrightarrow$ p_ϕ is conserved

الزخم الزاوي محفوظ.

شكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 08

مسألة القوة المركزية

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

8.1 – مقدمة في القوة المركزية

- تعرضنا للقوة المركزية أكثر من مرة في الأبواب السابقة.
- سوف نتعرض للقوة المركزية بشئ من التفصيل ومنها مسألة الجسمين 2-Body Problem .
- سوف نناقش القوة المركزية التي تعود لقوة الجاذبية الكونية.
- نفترض وجود جسمين m_1 and m_2 موجودين عند الموقعين $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$
- نعبر عن طاقة الوضع بين الجسمين باستخدام العلاقة الكونية التالية:

$$U(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}. \qquad (1)$$

- لاحظ أن هذه الدالة لا تعتمد على متجهي الموقعين وأنما فقط على مقدار الفرق بينهما أي على $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$
- يفضل استحداث متجه $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ عبارة عن نسبة الجسم الثاني للأول ونقوم باستخدام هذا المتجه. وتصبح الدالة

$$U = U(r). \qquad (2)$$

8.1 – مقدمة في القوة المركزية

- إذن باستخدام اللاجرانجيان يكون لدينا اللاجرانجيان التالي:

$$\mathcal{L} = T - U = \tfrac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(r). \qquad (3)$$

- حيث يمثل الحد الأول الطاقة الحركة للجسم الأول في حين يمثل الحد الثاني الطاقة الحركية للجسم الثاني وأما الحد الثالث هو كما سبق يمثل طاقة الجهد أو الوضع بين الجسمين وهي طاقة جذب كوني تخضع لأنظمة القوى المركزية.

8.2 – مركز الكتلة والكتلة المختزلة

- سبق في عدة مقررات تعريف مركز الكتلة (أو مركز الثقل) وهو يمثل النقطة التي تتوزع الكتلة حولها بالتساوي وتعرف رياضيا كما يلي:

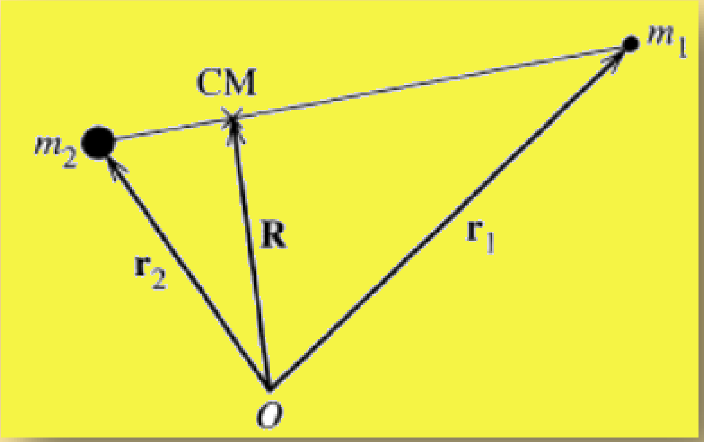
$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i. \tag{4}$$

- عندما يكون لدينا كتلتان فقط فأن المعادلة (4) تصبح بالصورة التالية:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}. \tag{5}$$

- ربما من المناسب التذكير بأن الاندفاع الكلي لنظام مكون من عدة أجسام هو عبارة عن الكتلة الكلية للأجسام مضروبة في سرعة مركز الكتلة أي:

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} \tag{6}$$



8.2 – مركز الكتلة والكتلة المختزلة

- الأن يمكننا استخدام العلاقتين التاليتين لموقعي الجسمين:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r} \qquad (7)$$

- أثبات صحة العلاقتين في معادلة (7):

$$\because \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{M}$$

$$\rightarrow M\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r} = (m_1 + m_2)\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}$$

$$\therefore \mathbf{r}_1 = \frac{M\mathbf{R} + m_2\mathbf{r}}{m_1 + m_2} = \frac{M\mathbf{R} + m_2\mathbf{r}}{M} = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}$$

$$\text{for } \mathbf{r}_2 : \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}_2) + m_2\mathbf{r}_2}{M}$$

$$\rightarrow M\mathbf{R} = m_1\mathbf{r} + m_1\mathbf{r}_2 + m_2\mathbf{r}_2$$

$$\rightarrow \mathbf{r}_2 = \frac{M\mathbf{R} - m_1\mathbf{r}}{M} = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}$$

8.2 – مركز الكتلة والكتلة المختزلة

- الأن نعود لمعادلة (3) ونستخدم معادلتي (7) في حد الطاقة الحركية:

$$T=\tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2+\tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2=\tfrac{1}{2}m_1\left[\dot{\mathbf{R}}+\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right]^2+\tfrac{1}{2}m_2\left[\dot{\mathbf{R}}-\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right]^2$$

$$=\tfrac{1}{2}m_1\left[\dot{\mathbf{R}}^2+\left(\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2+2\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{R}}.\dot{\mathbf{r}}\right]+\tfrac{1}{2}m_2\left[\dot{\mathbf{R}}^2+\left(\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2-2\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{R}}.\dot{\mathbf{r}}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{R}}^2+\tfrac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2+m_1\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{R}}.\dot{\mathbf{r}}+\tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{R}}^2+\tfrac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2-m_2\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{R}}.\dot{\mathbf{r}}$$

$$=\tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{R}}^2+\tfrac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2+\tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{R}}^2+\tfrac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2$$

$$=\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\mathbf{R}}^2+\tfrac{1}{2}\frac{m_1m_2^2+m_2m_1^2}{M^2}\dot{\mathbf{r}}^2$$

$$=\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\mathbf{R}}^2+\tfrac{1}{2}\frac{(m_1+m_2)(m_1m_2)}{M^2}\dot{\mathbf{r}}^2$$

$$=\tfrac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2+\tfrac{1}{2}\frac{(m_1m_2)}{M}\dot{\mathbf{r}}^2$$

$$\therefore T=\tfrac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2+\tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 \qquad (8)$$

8.2 – مركز الكتلة والكتلة المختزلة

- في معادلة (8) استخدمنا الكتلة المختزلة وهي:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (9)$$

$$or:$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad (10)$$

- ملاحظات على الكتلة المختزلة:

✓ تصبح تقريبا تساوي m_1 عندما $m_2 \rightarrow \infty$

✓ تصبح تقريبا تساوي m_2 عندما $m_1 \rightarrow \infty$

✓ تصبح تساوي $\frac{1}{2}m$ عندما $m_1 = m_2 = m$

✓ هذه الكتلة المختزلة لها وحدات dimensions نفس وحدات الكتلة kg

✓ الكلتة المختزلة لنظام الأرض والشمس = تقريبا كتلة الأرض !!

✓ بشكل عام الكتلة المختزلة لكتلتين واحدة كبيرة جدا والأخرى صغيرة تساوي تقريبا للكتلة الصغيرة.

8.2 – مركز الكتلة والكتلة المختزلة

- أذن حد الطاقة الحركية في اللاجرانجيان هو:

$$
\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{2} M\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 \\
\therefore \mathcal{L} &= T - U = \tfrac{1}{2} M\dot{\mathbf{R}}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)\right) \\
&= \mathcal{L}_{\text{CM}} + \mathcal{L}_{\text{rel}}
\end{aligned} \tag{11}
$$

- يمثل الحد الأول لاجرانجيان لمركز الكتلة والثاني اللاجرنجيان للأحداثي النسبي.
- بمعنى آخر فقد استخدمنا موقع مركز الكتلة $\mathbf{R}$ والموقع النسبي إي نسبة أحد الجسمين للأخر r كأحداثيات معممة Generalized Coordinates
- بحسب معادلة (11) يمكننا الحل على مرحلتين واحدة خاصة بحركة مركز الكتلة ومستقلة تماما عن أي اعتبارات أخرى والمعادلة الأخرى خاصة بالحركة النسبية بين الجسمين.

8.3– معادلات الحركة

- من المعادلة (11) يمكننا الحصول بالطريقة المعتادة على المعادلات من لاجرانجيان: (الجزء الأول):

$$\because \mathcal{L} = T - U = \tfrac{1}{2} M\dot{\mathbf{R}}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)\right)$$

$$\therefore \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{R}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \rightarrow 0 = M\ddot{\mathbf{R}} \rightarrow (\dot{\mathbf{R}} = \text{constant}) \qquad (12)$$

- يمكن النظر إلى هذه النتيجة من زاويتين: الأولى أنه لا توجد قوى خارجية تؤثر على مركز الكتلة، وهو أمر مفروغ منه حيث أن الجسمين يمثلان نظاما معزولا من الأساس. والثانية أن الاندفاع الكلي المرتبط بمركز الكتلة محفوظ.

- المعادلة الثانية (الجزء الثاني):

$$\because L = T - U = \tfrac{1}{2} M\dot{\mathbf{R}}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)\right)$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \rightarrow -\nabla U(r) = \mu\ddot{\mathbf{r}} \qquad (13)$$

- يمكن فهم هذه المعادلة كما لو كان هناك جسم كتلته μ يتعرض لجهد مركزي $U(r)$ وهذه معادلة حركته. لاحظ أن أزواج النجوم يدور كل منها حول مركز كتلة النجمين. بمعنى آخر هي معادلة أي من الجسمين لأمكانية تثبيت أي منهما.

8.4– حفظ الاندفاع الزاوي

- نعيد النظر في اللاجرنجيان (الجزء الثاني) $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2-U(r),$ ولكن هذه المرة من زاوة الأحداثيات القطبية:
- تذكر من الباب الأول عندما قمنا بالتفاضل التالي:

$$\dot{\mathbf{r}}=\frac{d}{dt}r\hat{\mathbf{r}}=\dot{r}\hat{\mathbf{r}}+r\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (14)$$

- أذن يمكن التعبير عن اللاجرنجيان كما يلي:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right)-U(r) \qquad (15)$$

- باستخدام معادلات لاجرانج على المتغير ϕ (أحداثي الدوران فقط) نجد ما يلي:

$$\therefore \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\rightarrow\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\phi})=0$$

$$\therefore \quad \mu r^2\dot{\phi}=\text{constant} \qquad (13)$$

- والحد الناتج يعبر عن الاندفاع الزاوي وهو محفوظ. ولكن هذا بافترضا الكتلة المختزلة فقط.
- ماذا لو ناقشنا الجسمين في نفس الوقت؟

8.4– حفظ الاندفاع الزاوي

- ❑ الاندفاع الزاوي يعرف بالعلاقة: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
- ❑ أذن الاندفاع الكلي للجسمين هو:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 \qquad (14)$$

$$\because \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} = \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \qquad (\mathbf{R} = 0) \qquad (15)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r} = -\frac{m_1}{M}\mathbf{r} \qquad (16)$$

(15) & (16) in (14):

$$\mathbf{L} = \frac{m_1 m_2}{M^2}(m_2 \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} + m_1 \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$$

$$= \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} \qquad (17)$$

- ❑ ملاحظة مهمة على هذه المعادلة (17) حيث أن الاندفاع الزاوي الكلي $\boldsymbol{L}$ هو نفسه كما لو كان هناك جسم واحد فقط كتله μ يدول على بعد $\mathbf{r}$
- ❑ وملاحظة أخرى حيث أن الاندفاع محفوظ فأن الكمية $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ نفسها ثابتة بما في ذلك الاتجاه. وحيث أن نتيجة هذا الضرب الاتجاهي عمودية عليه، وهي تظل ثابتة فإذن نظام الجسمين يدور في مستوى ثابت، مثلا مدار القمر حول الأرض في مستوى.

8.4– معادلتين للحركة

- عرفنا قبل قليل أن اللاجرانجيان باستخدام الأحداثي ϕ هي:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - U(r) \qquad (18)$$

- إذن معادلة لاجرانج هي:

$$\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} = \text{const} = l \quad \text{(angular momentum)} \qquad (19)$$

- معادلة الأحداثي r هي:

$$\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial r} = \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{dU}{dr} = \mu \ddot{r} \qquad (20)$$

$$(19) \rightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{\mu r^2} \qquad (21)$$

$$\therefore (20) \rightarrow \mu \ddot{r} = \mu r \left(\frac{l}{\mu r^2}\right)^2 - \frac{dU}{dr} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{dU}{dr} \qquad (22)$$

- الحد على اليسار هو قوة، وبالتالي الحدين الآخرين أيضا قوة. الحد الأول على اليمين هو حد القوة الطاردة المركزية أما الحد الثاني فهو حد القوة المركزية (قوة جاذبة). معادلة (20) تسمى المعادلة القطرية radial equation

8.5– مقابل مسألة القوة المركزية في بعد واحد

- نعود أولا للمعادلة (22):

$$\mu\ddot{r}=\mu r\left(\frac{l}{\mu r^{2}}\right)^{2}-\frac{dU}{dr}=\frac{l^{2}}{\mu r^{3}}-\frac{dU}{dr} \qquad (22)$$

- نعيد كتابة هذه المعادلة بالصورة:

$$\mu\ddot{r}=-\frac{d}{dr}U_{\text{cf}}-\frac{dU}{dr} \qquad (23)$$

$$\text{where}: F_{\text{cf}}=-\nabla U_{\text{cf}}=\frac{l^{2}}{\mu r^{3}}=-\frac{d}{dr}U_{\text{cf}} \quad \Rightarrow \quad U_{\text{cf}}=\frac{l^{2}}{2\mu r^{2}} \qquad (24)$$

- حيث F_{cf} هي القوة الطاردة المركزية.
- نستطيع أن نعبر الآن عن القوة الكلية المؤثرة:

$$\mu\ddot{r}=-\frac{dU}{dr}-\frac{dU_{\text{cf}}}{dr}=-\frac{d}{dr}\left[U(r)+U_{\text{cf}}(r)\right]=-\frac{d}{dr}U_{\text{eff}}(r) \qquad (25)$$

- حيث U_{eff} هو الجهد الفعال أي مجموع الجهدين المركزي والطارد المركزي:

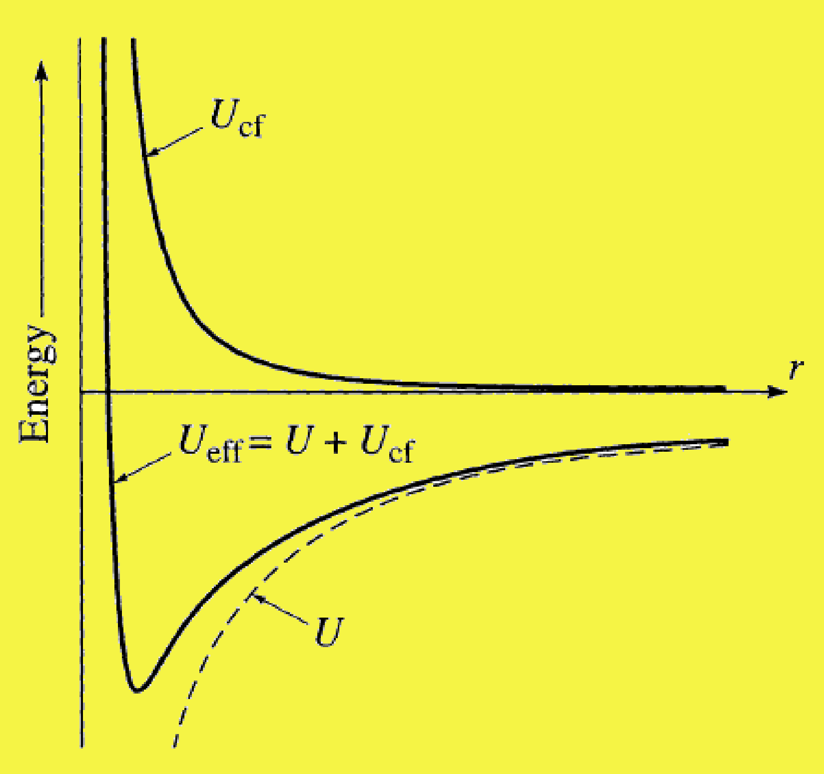
$$U_{\text{eff}}=U(r)+\frac{l^{2}}{2\mu r^{2}} \qquad (26)$$

8.5– مقابل مسألة القوة المركزية في بعد واحد

- المعادلة (26) يمكن كتابتها في حالة قوى الجذب الكوني (مثلا مذنب يدور حول الشمس) بالصورة:

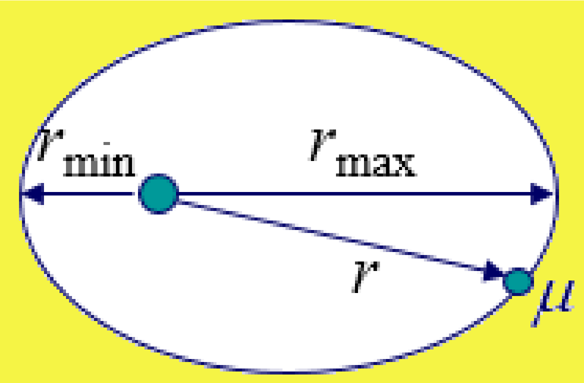
$$U_{\text{eff}} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \qquad (27)$$

- أذن الجهد الذي يتحكم بحركة المذنب حول الشمس هو عبارة عن حدين الأول سالب وهو تجاذبي وسببه التجاذب بين الجسم والشمس. والحد الثاني يمثل جهد القوة الطاردة المركزية.



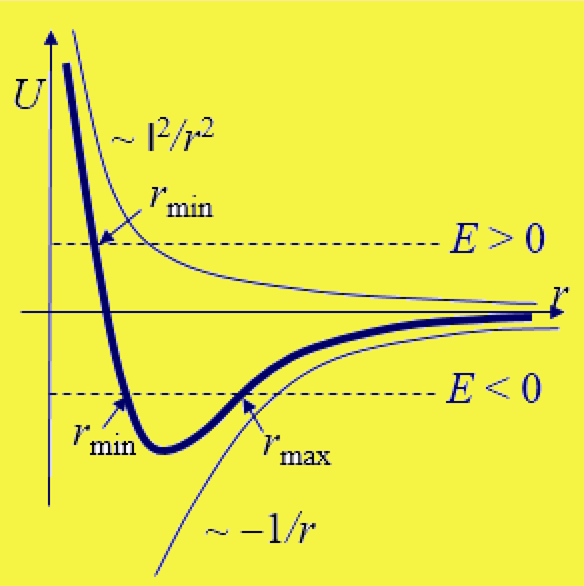
- لاحظ أن الحد الأول يعتمد خطيا على مقلوب المسافة r في حين يعتمد الثاني على مقلوب مربع المسافة. والنتيجة أن قوة التجاذب تصبح أقوى كلما ابتعد المذنب عن الشمس، وكلما اقترب المذنب من الشمس تغلبت قوة التنافر حيث تصبح أكبر فيبتعد المذنب عن الشمس. والنتيجة أنه يصبح في أفضل مدار يحبقق التوازن بين القوتين

8.5– مقابل مسألة القوة المركزية في بعد واحد



- عندما تصبح الطاقة الكلية أقل من الصفر (سالبه) فيكون لدى المذنب أو أي جرم يدور حول الشمس نقطتين تغيير اتجاه turning points
- بحسب الصورة على اليسار وتوضيحها في الأسفل هاتان النقطتان هما عند المسافة الدنيا rmin و المسافة القصوى rmax .
- نتيجة ذلك أن المذنب يدور في مسار يشبه القطاع الناقص.
- أدنى نقطة للشمس يمكن للمذنب الوصول إليها هي rmin
- أن ما يحكم العملية كلها هو مبدأ: حفظ الطاقة الكلية لنظام الشمس و المذنب في نفس الوقت. نعيد النظر في معادلة (25):

$$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr}U_{\text{eff}}(r) \qquad (25)$$



- لو أثرنا على الطرفين بالكمية dr/dt:

$$\mu\dot{r}\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2\right) = -\frac{dr}{dt}\frac{d}{dr}U_{\text{eff}}(r) = -\frac{d}{dt}U_{\text{eff}}(r) \qquad (26)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)\right] = 0$$

$$\therefore \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{constant} \qquad (27)$$

شـكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 09

مسألة القوة المركزية 2

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

8.5– حفظ الطاقة الكلية

- معادلة (27) تتكون من حدين: الأول يثمل الطاقة الحركة والثاني يمثل طاقة الوضع الفعالة Effective Potential Energy . ومجموعهما يمثل كمية ثابتة (محفوظة) مع الزمن.
- ربما من المناسب أن نعيد الحدود الأصلية في طاقة الوضع الفعالة (ارجع لمعادلة 26)، ثم نعيد كتابة المعادلة (27) ونحصل على التالي:

$$\tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}\mu r^2\dot{\phi}^2 + U(r) = E \qquad (28)$$

- وبهذا فقد عبرنا معادلة الحركة الأساسية لنظام مكون من جسمين ولكن فقط باستخدام الحركة النصف قطرية ونقصد بها في البعد r فقط، أي أن لدينا الآن معادلة حركة في بعد واحد فقط 1-d .
- أهم ما تشير إليه معالدة (28) أن الطاقة الكلية للنظام E هي طاقة محفوظة أي لا تتغير قيمتها مع الزمن ولكنها لا تقول بأن كل حد ثابت مع الزمن، وأنما المجموع كله هو الذي يظل محفوظا.

8.5– معادلة (المدار) الفلك equation of orbit

- قمنا حتى الآن باشتقاق معادلات الحركة وهي دوال في المسافة r والزمن.
- وللبحث عن معادلة الفلك (مدار المذنب أو أي كوكب آخر) لابد من التعبير عن r بدلالة ϕ
- نعود لمعادلة (22) ونعبر عنها بشكل صريح باستخدام حدود القوة:

$$\mu\ddot{r} = F_r + \frac{l^2}{\mu r^3} \qquad (29)$$

- الآن نحتاج إلى تغيير الأحداثيات كما يلي:

$$u = \frac{1}{r} \qquad or \qquad u = \frac{1}{r} \qquad (30)$$

$$and$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi} = \dot{\phi}\frac{d}{d\phi} = \frac{\ell}{\mu r^2}\frac{d}{d\phi} = \frac{\ell u^2}{\mu}\frac{d}{d\phi} \qquad (31)$$

$$\rightarrow \dot{r} = \frac{d}{dt}(r) = \frac{\ell u^2}{\mu}\frac{d}{d\phi}\frac{1}{u} = -\frac{\ell}{\mu}\frac{du}{d\phi}$$

$$\therefore \ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{\ell u^2}{\mu}\frac{d}{d\phi}\left(-\frac{\ell}{\mu}\frac{du}{d\phi}\right) = -\frac{\ell^2 u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\phi^2} \qquad (32)$$

8.5– معادلة (المدار) الفلك equation of orbit

- ❑ أذن تصبح المعادلة القطرية radial equation (معادلة 20) بالصورة التالية:

$$-\mu\frac{\ell^2u^2}{\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=F(r)+\frac{\ell^2u^3}{\mu}$$

$$\therefore -\frac{\ell^2u^2}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=F(r)+\frac{\ell^2u^3}{\mu}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=-\frac{\mu}{\ell^2u^2}F(r)-\frac{\mu}{\ell^2u^2}\frac{\ell^2u^3}{\mu} \qquad (33)$$

or

$$u''(\phi)=-u(\phi)-\frac{\mu}{\ell^2u(\phi)^2}F(r) \qquad (34)$$

- ❑ هذه المعادلة (34) هي معادلة المدار (الفلك) لأي جسم يدور تحت تأثير قوة مركزية، والمطلوب حلها لكل نظام بحسب القوة المؤثرة وطاقة الجهد المتعلقة بالنظام.

شـكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 10

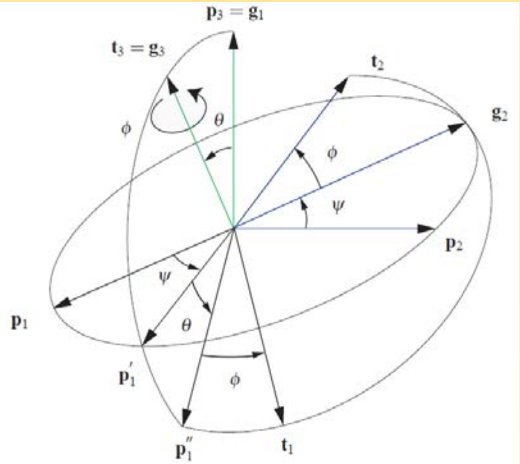
الحركة الدورانية للأجسام الصلبة

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

مقدمة عامة

- ينظر للجسم الصلب على أنه مجموعة كبيرة N من الجسيمات التي تكون جسما لا يتغير شكله.
- المسافة بين أي مكونين للجسم الصلب ثابتة لا تتغير كذلك
- لو قارنا نظاما عاما يتكون من N من الجسيمات ولكنه غير صلب فيلزما عدد 3N من الأحداثيات أي 3 أحداثيات لكل جسيم حتى يتم وصف النظام بشكل كامل.
- أما عندما يكون هذا النظام هو جسم صلب فكل ما يلزم هو 6 أحداثيات فقط، منها ثلاثة أحداثيات لوصف موقع مركز ثقله CM وثلاثة أخرى لوصف حركات الدوران للجسم حول ذلك المركز.
- من ناحية ثانية: تقسم حركة الجسم الصلب إلى قسمين رئيسيين: الحركة الانتقالية لمركز الثقل translational motion of the center of mass والدوران حول ذلك المركز rotation of the body around the CM
- في هذا الباب سوف نتوسع في مفهوم حركة الجسم الصب والتي بدأناها في الباب رقم 8 السابق



10.1- خصائص مركز الكتلة Properties of CM

- نتصور جسما صلبا يتكون من N من الجسيمات نرمز لها بالرموز $\alpha = 1,\ldots, N$ كتلة كل منها هي m_α وموقعه هو $\mathbf{r}_\alpha$ بالنسبة لنقطة الأصل.

- أذن كما سبق نعرف مركز الكتلة (الثقل) كما يلي بالصيغتين الجمع و التكامل:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \qquad or \qquad \mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm \qquad (1)$$

- حيث ترمز M إلى الكتلة الكلية.

- وعلى ذلك فيعبر عن الاندفاع الكلي للنظام كما يلي:

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_\alpha = \sum_{\alpha} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha = M\dot{\mathbf{R}} \qquad (2)$$

- أي أن الاندفاع الكلي لنظام من الأجسام هو نفسه لجسم واحد من حيث الشكل باعتبار أن سرعة النظام تختزل في سرعة مركز الكتلة.

- معادلة (2) لو تم تفاضلها بالنسبة للزمن نحصل على القوة الخارجية المؤثرة:

$$\mathbf{F}^{ext} = M\ddot{\mathbf{R}} \qquad (3)$$

10.1- خصائص مركز الكتلة Properties of CM

❑ الاندفاع الزاوي الكلي للنظام ينظر إليه بنفس الطريقه. لو اعتبرنا أن مركز الكتلة عند $\mathbf{R}$ والجسيم α عند $\mathbf{r}_\alpha$ فأن ذلك الجسم بالنسبة لمركز الكتلة يوجد عند $\mathbf{r}'_\alpha$

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_\alpha \qquad (4)$$

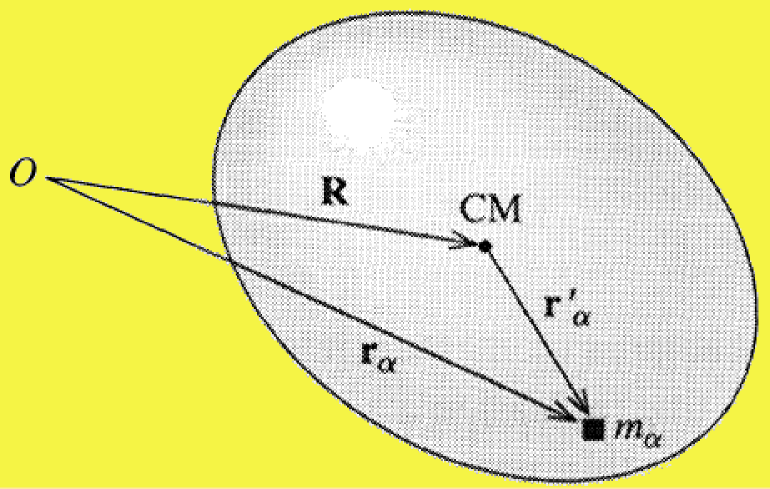
$$\therefore \ell_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \qquad (5)$$

total angular momentum:

$$\mathbf{L} = \sum \ell_\alpha = \sum \mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \qquad (6)$$

❑ لو قمنا باستخدما (4) في معادلة (6) نحصل على 4 حدود كما يلي:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{R} \times m_\alpha \dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{R} \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \qquad (7)$$



❑ الشكل المجاور يبين موقع مركز ثقل الجسم الصلب بالنسبة لنقطة الأصل وكذلك موقع جسيم تم اختياره m_α وموقعه سواء بالنسبة لنقطة الأصل أو نسبة لمركز الكتلة

10.1- خصائص مركز الكتلة Properties of CM

- في المعادلة (7) نقوم بعزل الحدود التي لا تعتمد على α مع الأخذ بالاعتبار أن $\sum m_\alpha = M$:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum \mathbf{R}\times m_\alpha \dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{R}\times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \\ &= \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}\sum m_\alpha + \mathbf{R}\times\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \left(\sum \mathbf{r}'_\alpha m_\alpha\right)\times\dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \\ &= \mathbf{R}\times M\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R}\times\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \left(\sum \mathbf{r}'_\alpha m_\alpha\right)\times\dot{\mathbf{R}} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \qquad (8)\end{aligned}$$

- في المعادلة (8) يمكن بسهولة أثبات أن الحد الثالث = 0 (بالتعويض من معادلة 4 السابقة عن $\mathbf{r}'_\alpha$) حيث تحصل على حدين، وبالقسمة على M نحصل على حدين متساويين فيلغي بعضهما بعضا.

$$\sum \mathbf{r}'_\alpha m_\alpha = 0 \qquad (9)$$

- بنفس الطريقة واستخدام نفس التعويض عندما نفاضل الحد الثاني فنحصل على صفر أيضا. أذن يتبقى لدينا ما يلي:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}\times\mathbf{P} + \sum \mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \qquad (10)$$

- حيث يمثل الحد الأول الاندفاع الزاوي الكلية لمركز الثقل بالنسبة لنقطة الأصل، في حيث يمثل الحد الثاني الاندفاع الزاوي الكلي للحركة بالنسبة لمركز الثقل نفسه.

10.1- خصائص مركز الكتلة Properties of CM

- يمكن أعادة كتابة المعادلة (10) بشكل أوضح كما يلي:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\text{motion of CM}) + \mathbf{L}(\text{motion relative to CM}) \qquad (11)$$

- لو طبقنا هذه العلاقة على كوكب يدور حول الشمس فنحصل على حدين هما: الحد الأول يمثل الاندفاع المرتبط بالحركة المدارية لمركز الكتلة حول الشمس، والحد الثاني الاندفاع الزاوي للكوكب بسبب دورانهحول مركز كتلته، أي أن:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{orb} + \mathbf{L}_{spin} \qquad (12)$$

- بالنسبة للطاقة الحركية لنظام جسم صلب: نعبر عن الطاقة الحركية الكلية للنظام كما يلي:

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 \qquad (13)$$

$$(4) \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 = \left(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_\alpha\right)^2 = \dot{\mathbf{R}}^2 + \dot{\mathbf{r}}'^2_\alpha + 2\dot{\mathbf{R}}.\dot{\mathbf{r}}'_\alpha$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'^2_\alpha + \dot{\mathbf{R}}.\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \qquad (14)$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}'^2_\alpha \qquad (15)$$

- حيث الحد الثالث في (14) يساوي صفر كما سبق

10.1- خصائص مركز الكتلة Properties of CM

- يمكن أعادة كتابة المعادلة (15) بشكل أوضح كما يلي:

$$T = T(\text{motion of CM}) + T(\text{motion relative to CM}) \qquad (16)$$

- الحركة الوحيدة الممكنة للجسم الصلب أن يقوم بها حول مركز الكتلة هي الدوران: أذن

$$T = T(\text{motion of CM}) + T(\text{rotation about CM}) \qquad (17)$$

- كمثال على ذلك تصور عجلة السيارة: تدور حول نفسها لتعطي الحد الثاني وتتحرك في نفس الوقت إلى الأمام لتعطي الحد الأول.

- هناك ملاحظة مهمة على المعادلة (14) للطاقة الحركية حيث أننا أثناء الاشتقاق لم نصرح بأن R هو موقع مركز الكتلة ولذا فيمكن اعتباره موقعا لأية نقطة. ولنفترض أننا اخترنا نقطة على طرق الجسم الصلب في حالة سكون لحظي (مثلا تصور عجلة سيارة تتحرك وتدور وتصور نقطة في الأطار الخارجي وكأن العجلة لحظيا تدور بكاملها حول تلك النقطة). في هذه الحالة الحد الأول والأخير في المعادلة تساوي أصفارا ولا يبقى لدينا إلا الحد الثاني ولذا تصبح الطاقة الحركية كما يلي:

$$\therefore T = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha'^2 \qquad (18)$$

- ومعنى ذلك أنه يمكن النظر لحد الطاقة الحركة كله كحد دوراني فقط أو خطي فقط (تذكر 210 فيز)

Rotation about a fixed axis الدوران حول محور ثابت -10.2

- في هذا الجزء سوف نناقش الدوران حول محور ثابت، مثلا قطعة خشب تدور حول عمود يمر من مركز ثقلها. ونعتبر أن محور الدوران هو محور z.

- نعتبر أن السرعة الزاوية للدوران هي $\boldsymbol{\omega}$ ، ونريد حساب الاندفاع الزاوي الكلي $\mathbf{L}$. سوف نتصور أن قالب اللوح مكون من جزئيات كتلة كل جزئ منها m_α ولذا فيصبح الاندفاع الزاوي الكلي هو:

$$\mathbf{L} = \sum \boldsymbol{\ell}_\alpha = \sum \mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \qquad (21)$$
$$\text{where}: \mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha.$$

- حيث أن الدوران هو حول محور z فقط فنكتب مركبات السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$ و المتجه $\mathbf{r}$ كما يلي:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ -y_\alpha & x_\alpha & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{x}(0 - x_\alpha z_\alpha) - \hat{y}(0 + z_\alpha y_\alpha) + \hat{z}(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)$$
$$= [-x_\alpha z_\alpha, -z_\alpha y_\alpha, x_\alpha^2 + y_\alpha^2]$$

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha).$$
$$\text{so} \quad \mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha = (-\omega y_\alpha, \omega x_\alpha, 0)$$
$$\rightarrow$$
$$\boldsymbol{\ell}_\alpha = m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha = m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)$$
$$= m_\alpha \omega(-z_\alpha x_\alpha, -z_\alpha y_\alpha, x_\alpha^2 + y_\alpha^2). \qquad (22)$$

- انظر للصورة المرفقة لكيفية الوصول لهذه النتيجة.

Rotation about a fixed axis الدوران حول محور ثابت -10.2

- من المعادلة السابقة نحصل على المركبة الرأسية فقط للاندفاع الزاوي z كما يلي:

$$L_z = \sum m_\alpha \omega (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) = \sum m_\alpha \omega \rho_\alpha^2 = I_z \omega \qquad (24)$$

where: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ is the distance of any point from the axis

$$I_z = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \qquad (25)$$

- المعادلة الأخيرة تمثل عزم القصور حول محور z moment of inertia about the z axis
- علاقة الطاقة الحركية (18) ممكن أن تكتب بعد استخدام العلاقة المعروفة: $v_\alpha = \rho_\alpha \omega$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha'^2 = \frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad (26)$$

- وهي علاقة معروفة في الفيزياء لجسم يدور حول محوره الرأسي (راجع مقرر 210 فيز).
- نبحث الآن في المركبتين الأخريين x و y للاندفاع الزاوي:

$$L_x = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \omega \qquad \text{and} \qquad L_y = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \omega \qquad (27)$$

- هاتين النتجتان للاندفاع الزاوي تعنيان أنه بالرغم من كون الدوران حول محور z الرأسي وبالتالي فاتجاه السرعة الزاوية ω يكون في نفس الاتجاه، فأن كون الحدين في (27) غير مساويين للصفر أحيانا على الأقل يدل على أن الاندفاع $\boldsymbol{L}$ ليس بالضرورة دائما في الاتجاه z وبالتالي ربما عدم دقة العلاقة $L = I\omega$

شكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 11

الحركة الدورانية للأجسام الصلبة-II

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

- للتذكير بآخر المعادلات التي حصلنا عليها في المحاضرة السابقة:

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha).$$

$$\text{so} \quad \mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha = (-\omega y_\alpha, \omega x_\alpha, 0)$$

$$\rightarrow$$

$$\boldsymbol{\ell}_\alpha = m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha = m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)$$

$$= m_\alpha \omega(-z_\alpha x_\alpha, -z_\alpha y_\alpha, x_\alpha^2 + y_\alpha^2). \qquad (22)$$

$$L_z = \sum m_\alpha \omega (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) = \sum m_\alpha \omega \rho_\alpha^2 = I_z \omega \qquad (24)$$

where: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ is the distance of any point from the axis

$$I_z = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \qquad (25)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha'^{\,2} = \frac{1}{2} \sum m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad (26)$$

$$L_x = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \omega \quad \text{and} \quad L_y = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \omega \qquad (27)$$

مضروبات العزوم

- وللتذكير أيضا، تسمى الكمية I بشكل عام بعزم القصور moment of inertia ويضاف له تذييله تشير إلى نسبة هذا العزم إلى أحد المحاور فمثلا: I_x عزم القصور حول محور x وهناك كذلك I_y وI_z
- بحسب المحاضرة السابقة فقد توصلنا إلى العلاقة (24) لعزم القصور I_z وأما معادلة (27) فيمكن ملاحظة أن كلا من L_x و L_y تتناسبان طرديا مع السرعة الزاوية ω وثابت التناسب سوف نسميه I_{xz} و I_{yz} على الترتيب أي أن:

$$L_x = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \omega \quad \text{and} \quad L_y = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \omega \qquad (27)$$

$$\rightarrow$$

$$L_x = \left(-\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha\right)\omega \quad \text{and} \quad L_y = \left(-\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha\right)\omega$$

$$\therefore L_x = I_{xz}\omega \quad \text{and} \quad L_y = I_{yz}\omega \qquad (28)$$

$$where: I_{xz} = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \quad \text{and} \quad I_{yz} = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \qquad (29)$$

- نسمي الكميتين في معادلة (29) مضروبات عزوم القصور الذاتي للجسم (أحيانا مضروبات العطالة). لاحظ أن كلا منها مذيل بالحرف z أضافة إلى حرف آخر أما x أو y أي أنها ترمز لعزوم القصور للدوران حول محور z. وحتى تكتمل منظومة عزوم القصور نحتاج إلى:

$$I_{zz} = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \qquad (30)$$

وهو نفسه في معادلة (24) ولكن فقط حتى يتوافق ترميزيا مع زملائه

مضروبات العزوم

- إذن يمكن كتابة الاندفاع الزاوي بشكل كامل للجسم الذي يدور حول محور z كما يلي:

$$\mathbf{L} = \left(I_{xz}\omega, I_{yz}\omega, I_{zz}\omega \right) \qquad (30)$$

- حتى يمكننا حل هذه المعادلة وحساب الاندفاع نحتاج إلى حساب تلك المضاريب (I_{xz}, I_{yz}, I_{zz}) لكل جسم بحسب شكله وأبعاده.
- في الشريحة التالية نقوم بحل مثال للتوضيح.

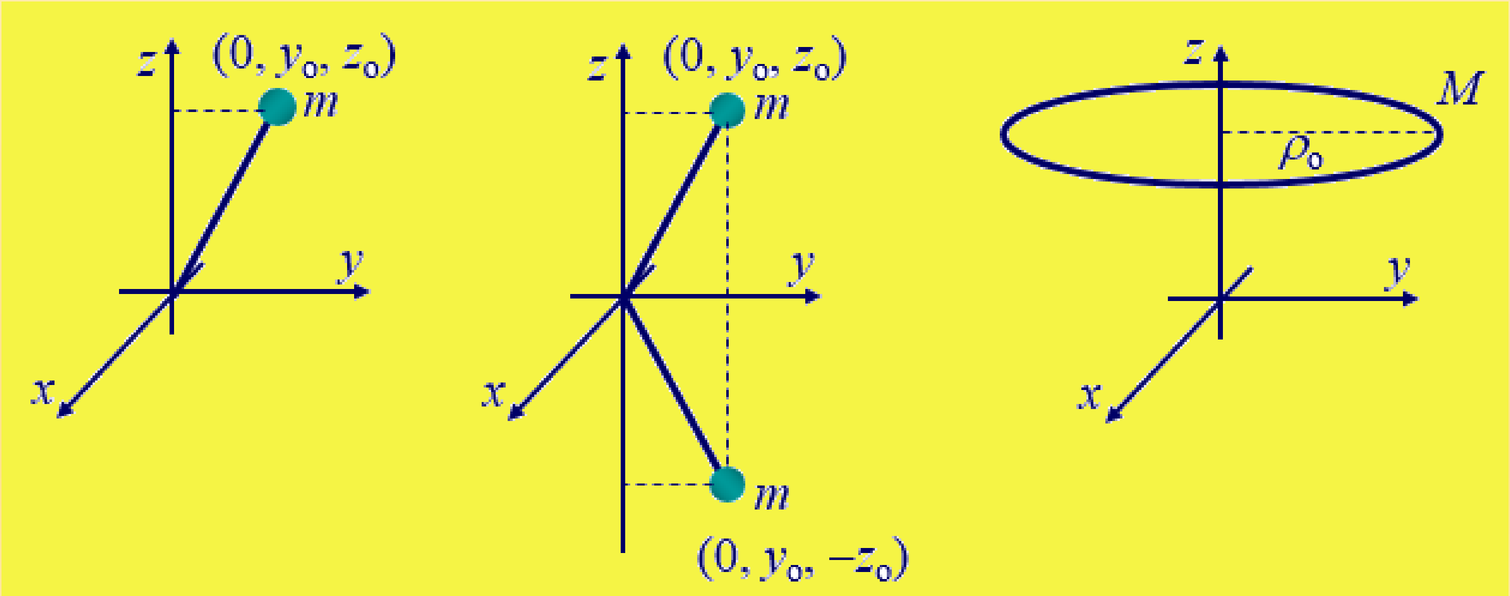
مثال 10.1 حساب مضروبات عزوم القصور

- Calculate the (simple) moments and products of inertia for rotation about the z axis of the following rigid bodies:

(a) A single mass m located at the position $(0, y_o, z_o)$ as shown in the figure below left.

(b) The same as in part (a), but with a second equal mass placed symmetrically below the xy plane (below middle).

(c) A uniform ring of mass M and radius ρ_o centered on the z axis and parallel to the xy plane (below right)



مثال 10.1 حسبا مضروبات عزوم القصور (الحل)

- (a) The products we have to calculate are:

$$I_{xz} = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha; \qquad I_{yz} = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha; \qquad I_{zz} = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2).$$

  Since $x = 0$, these reduce to

$$I_{xz} = 0; \qquad I_{yz} = -m y_o z_o; \qquad I_{zz} = m y_o^2$$

  This confirms that $\mathbf{L}$ is not along the rotation axis (this one is going to wobble).

- (b) For the two mass system, we have to calculate sums:

$$I_{xz} = 0; \qquad I_{yz} = -m[y_o z_o + y_o(-z_o)) = 0; \qquad I_{zz} = 2m y_o^2$$

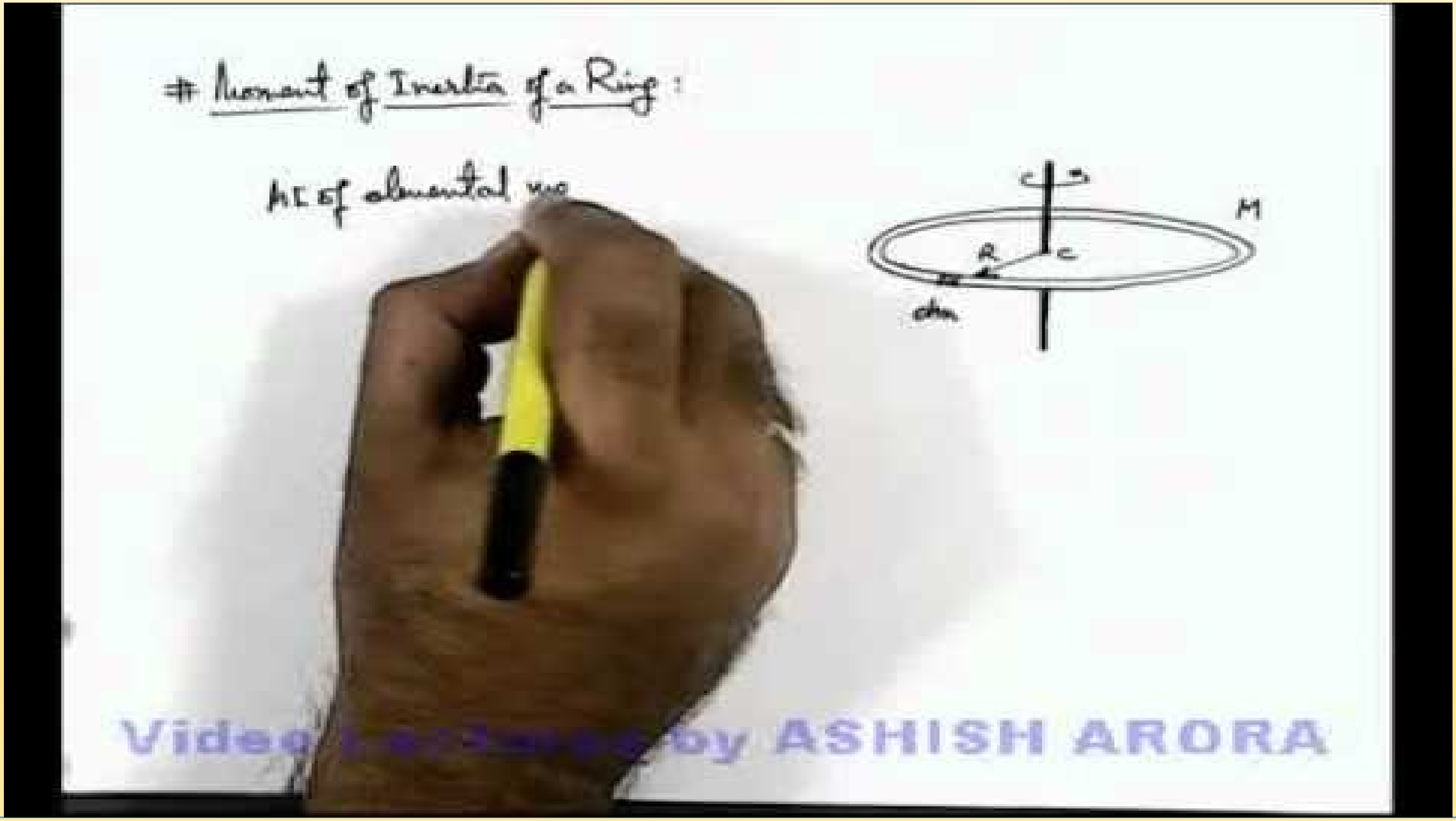
  This illustrates that when symmetries occur (like the one about the y axis in this case), the product of inertia for that axis can become zero. In this case, there is reflection symmetry about the y axis. Because both I_{xz} and I_{yz} are zero, $\mathbf{L}$ is along the rotation axis. Note that both rods experience a torque, but they balance.

- (c) For the ring, we would normally have to do an integration, but due to the symmetry we can do this without a formal mathematical integration. You can easily see that $I_{xz} = 0$, since the x coordinate for each element of mass can be paired with another with negative x coordinate. Likewise for I_{yz}. Since $(x^2 + y^2) = \rho_o^2 = \text{constant}$, I_{zz} is just

$$I_{zz} = \left(\sum m_\alpha\right)\rho_o^2 = M\rho_o^2.$$

مثال 10.1 حسبا مضروبات عزوم القصور (الحل)

- هناك ملاحظة مهمة في هذا المثال الجزء (c) حيث أن مضروبات العزوم تساوي الصفر عدا I_{zz} الذي كان ببساطة يساوي الكتلة في مربع نصف القطر كما هو متوقع.
- الفائدة المهمة التي نستفيدها أنه عندما يكون النظام متناسقا حول محور z مثل عجلة تدور حول ذلك المحور بحيث تكون كتلة العجلة متناسقة تماما حول المحور فأن جميع المضاريب تساوي صفرا عدا I_{zz} .



مثال 10.2 حساب مضروبات عزوم القصور لعمود يدور

- *(a) A thin uniform rod of mass M and length L lies on the x axis with one end at the origin. Find its moment of inertia for rotation about the z axis.*
- *(b) What if the rod's center is at the origin?*

(a) Because the rod is uniform, it has a uniform density that we can characterize as a linear mass density $\mu = M/L$.: We want to find the products of inertia I_{xz}, I_{yz} and I_{zz}. Because this is a thin rod (i.e. we are not supposed to worry about the thickness), we need to take $y = z = 0$, so I_{xz} and I_{yz} are identically zero. The remaining sum,

$$I_{zz} = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) = \sum m_\alpha x_\alpha^2$$

is to be converted to an integral over the length by considering an element of mass $dm = \mu\, dx$:

$$I_{zz} = \int_0^L \mu x^2 dx.$$

Because $\mu = \text{constant}$, we have the solution

$$I_{zz} = \int_0^L \mu x^2 dx = \mu \frac{L^3}{3} = \tfrac{1}{3} ML^2.$$

(b) To calculate it for rotation about the rod center, we simply integrate from $-L/2$ to $L/2$:

$$I_{zz} = \int_{-L/2}^{L/2} \mu x^2 dx = \mu \left[\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3} \right] = \tfrac{1}{12} ML^2.$$

10.3- ممتدة عزم القصور The Inertia Tensor

- بشكل عام كان نقاشنا حتى الآن عن الدوران حول محور ثابت وسميناه z ولكن هذا لا يحصل دائما وأنما توجد حالات يتم فيها الدوران الحر مثلا لو تخيلت صندوقا يسقط سقوطا حرا في الفضاء ويتقلب في كل الاتجاهات.
- أذن هناك عدة محاور يمكن أن يتم حولها الدوران. ولكن عندما يكون المحور يسمح باندفاع زاوي $\boldsymbol{L}$ يكون اتجاهه هو نفس اتجاه السرعة الزاوية ω ففي هذه الحالة نسمي المحور: المحور الرئيسي Principal Axes
- أذن في ثلاثة أبعاد حرة نكتب السرعة الزاوية كما يلي: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.
- وبالتالي نعبر عن الاندفاع الزاوي بالعلاقة (انظر معادلة 22):

$$L = \sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha = \sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha\right) \qquad (31)$$

- لأي متجه $\mathbf{r} = (x, y, z)$ الحدود من المضروب: $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ يمكن كتابته كما يلي:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right) = [&(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z, \\ &- yx\omega_x + (z^2 + x^2)\omega_y - yz\omega_z, \\ &- zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z] \end{aligned} \qquad (32)$$

- انظر الشريحة التالية لطريقة الفك أو يمكن استخدام العلاقة: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

$\bar{\omega} \times \bar{r}$:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{x}(\omega_y z - \omega_z y) - \hat{y}(\omega_x z - \omega_z x) + \hat{z}(\omega_x y - \omega_y x) \quad \text{--- } (1)$$

next.. $\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ (\omega_y z - \omega_z y) & -(\omega_x z - \omega_z x) & (\omega_x y - \omega_y x) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}\left[\omega_x y^2 - \omega_y y x + \omega_x z^2 - \omega_z x z\right] - \hat{y}\left[\omega_x y x - \omega_y x^2 - \omega_y z^2 + \omega_z y z\right]$$

$$+ \hat{z}\left[-\omega_x x z + \omega_z x^2 - \omega_y y z + \omega_z y^2\right]$$

10.3- ممتدة عزم القصور The Inertia Tensor

- ومنها يمكننا كتابة الصورة العامة لمركبات الاندفاع الزاوي كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

- حيث:

$$\begin{array}{lll} I_{xx} = \sum m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2) & I_{yx} = -\sum m_\alpha y_\alpha x_\alpha & I_{zx} = -\sum m_\alpha z_\alpha x_\alpha \\ I_{xy} = -\sum m_\alpha x_\alpha y_\alpha & I_{yy} = \sum m_\alpha (z_\alpha^2 + x_\alpha^2) & I_{zy} = -\sum m_\alpha z_\alpha y_\alpha \\ I_{xz} = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha & I_{yz} = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha & I_{zz} = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \end{array}$$

- نقوم بعد ذلك بتسهيل كتابة هذه المعادلات بصورة ممتدة من أجل بساطة التعامل معها خاصة خلال أجراء العمليات الرياضية المختلفة.

- سوف نعبر عن الاندفاع الزاوي بالطريقة التالي عوضا عن معادلات (33):

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j \quad \text{or} \quad L_i = I_{ij}\omega_j \qquad (34)$$

10.3- ممتدة عزم القصور The Inertia Tensor

- ويمكننا كتابتها بصورة مصفوفات: $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} \qquad (35)$$

- في معادلة (35) الكمية $\mathbf{I}$ تسمى ممتدة عزم القصور moment of inertia tensor
- الفرق الجوهري بين المصفوفة والممتدة tensor أن الأخيرة هي في الحقيقة بشكل متجهي أي أن الكمية $\mathbf{I}$ هي كمية متجهه وبالتالي ناتج المصفوفة هو كمية متجهة كذلك.
- بعض مميزات هذه الممتدة:
- أولا: التناسق: $I_{ij} = I_{ji}$
- ثانيا: منقول المصفوفة transpose: لا تتغير هذه المصفوفة تحت عمليات النقل. $\mathbf{I} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}}$

مثال 10.2 ممتدة العزوم لجسم بشكل مكعب

- لدينا مكعب نفترض بأن كتلته الكلية هي M وطول حرفه a ويدور حول ركنه السفلي عند نقطة الأصل كما في الشكل. وهذا ليس معناه أننا حددنا محور الدوران فممكن يكون على أي من المحاور الثلاثة.

- بما أن المكعب منتظم الشكل فعلينا تحويل عمليات الجمع Σ إلى عمليات تكامل.

$$I_{xx} = \sum m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2) \Rightarrow$$

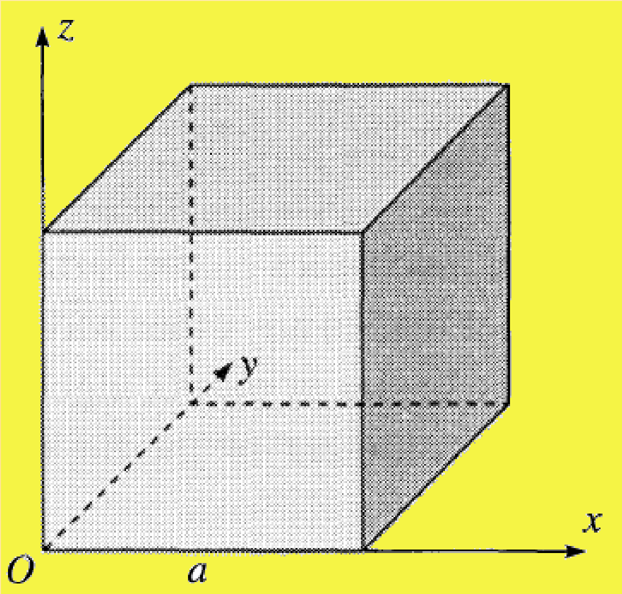
$$I_{xx} = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz \rho (y^2 + z^2)$$

$$\rho = M / a^3$$

- بحسب المعادلات (33) علينا أن نقوم بإجراء 9 تكاملات.

ولكن كما هو واضح من الشكل فأن $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ وبالتالي لهذه الثلاثة عزوم نفس النتيجة. كذلك العزوم المختلطة لها نفس النتيجة.

إذن نحتاج فقط إلى تكاملين.



- يمكن كتابة التكامل السابق كما يلي:

$$I_{xx} = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz \rho (y^2 + z^2)$$

$$= \rho \left(\int_0^a dx \int_0^a y^2 dy \int_0^a dz + \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z^2 dz \right) = \tfrac{2}{3} \rho a^5 = \tfrac{2}{3} M a^2$$

مثال 10.2 ممتدة العزوم لجسم بشكل مكعب

- أما التكاملات المختلطة:

$$I_{xy} = -\sum m_\alpha x_\alpha y_\alpha \;\Rightarrow$$

$$I_{xy} = -\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz \rho xy = -\rho \int_0^a x dx \int_0^a y dy \int_0^a dz = -\tfrac{1}{4}\rho a^5 = -\tfrac{1}{4} M a^2$$

- أذن مصفوفة **I** في معادلة (35) تصبح:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \tfrac{2}{3}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 \\ -\tfrac{1}{4}Ma^2 & \tfrac{2}{3}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 \\ -\tfrac{1}{4}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 & \tfrac{2}{3}Ma^2 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{12}\begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{[about a corner]}$$

- لو أردنا مثلا حساب الاندفاع الزاوي **L** حول محور x:

$$\because \boldsymbol{\omega} = (\omega,\ 0,\ 0)$$

$$\therefore \mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{Ma^2}{12}\begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{12}\begin{bmatrix} 8\omega \\ -3\omega \\ -3\omega \end{bmatrix} \qquad (36)$$

$$or: \quad \mathbf{L} = Ma^2\omega\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

مثال 10.2 ممتدة العزوم لجسم بشكل مكعب

❑ نكرر نفس المثال السابق ولكن في هذه المرة نفترض بأن نقطة الأصل واقعة في مركز المكعب: سوف نلاحظ أن التكاملات للعزوم $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ هي نفسها السابقة مع تغيير حدود التكامل:

$$I_{xx} = \rho\left(\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} dz + \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} z^2 dz\right) = 2\tfrac{2}{3}\rho a^2 (a/2)^3 = \tfrac{1}{6} M a^2$$

and :

$$I_{xy} = -\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dz \rho xy, = -\rho \int_{-a/2}^{a/2} x dx \int_{-a/2}^{a/2} y dy \int_{-a/2}^{a/2} dz = 0$$

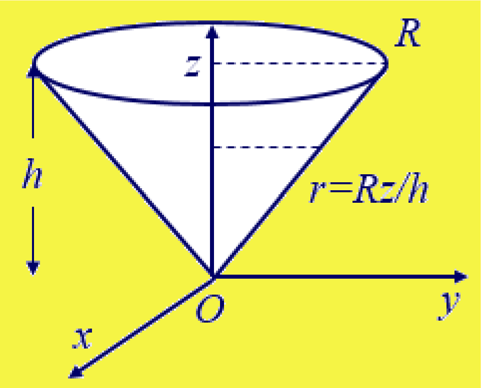
❑

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}Ma^2 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{6}\mathbf{1}\,[\text{about CM}] \qquad (37)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{Ma^2}{6}\boldsymbol{\omega} \qquad (38)$$

مثال 10.3 ممتدة العزوم لجسم بشكل مخروط

- Let's do one more example—Find the moment of inertia tensor $\mathbf{I}$ for a spinning top that is a uniform solid cone (mass M, height h, and base radius R) spinning about its tips. Choose the z axis along the axis of symmetry of the cone, as shown in the figure. For an arbitrary angular velocity $\boldsymbol{\omega}$, what is the top's angular momentum $\mathbf{L}$?



- The I_{zz} element is given by the integral:

$$I_{zz} = \int_V dV \rho (x^2 + y^2),$$

where the volume density is

$$\rho = M/V = 3M/\left(\pi R^2 h\right).$$

- This is most easily solved in cylindrical polar coordinates,

(ρ, ϕ, z), where $\rho^2 = (x^2 + y^2)$. NB: The two rho's are different! Then

$$I_{zz} = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{Rz/h} \rho d\rho\, \rho^2$$

$$= 2\pi\rho \int_0^h dz \int_0^{Rz/h} \rho^3 d\rho = \frac{\pi\rho}{2}\left(\frac{R}{h}\right)^4 \int_0^h z^4 dz = \frac{3}{10} MR^2$$

- The I_{xx} and I_{yy} elements are equal, and are

$$I_{xx} = \rho \int_V dV (y^2 + z^2) = \tfrac{3}{20} M (R^2 + 4h^2).$$

مثال 10.3 ممتدة العزوم لجسم بشكل مخروط

- All of the off-diagonal elements are zero. Note that symmetry about any two axes guarantees that all of the off-diagonal elements are zero. Then, the moment of inertia tensor is:

$$\mathbf{I} = \frac{3}{20}M\begin{bmatrix} R^2+4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2+4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

- The last form is just for further discussion. A matrix with all zero off-diagonal elements is, as we said, called a diagonal matrix. We can then write

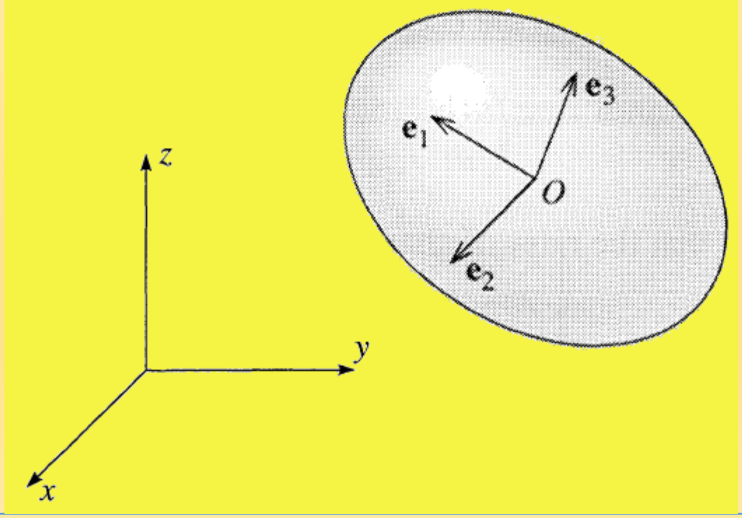
$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = (\lambda_1\omega_x, \lambda_2\omega_y, \lambda_3\omega_z).$$

- What this means is that whenever $\boldsymbol{\omega}$ points along one of the three coordinate axes, $\mathbf{L}$ and $\boldsymbol{\omega}$ are parallel. This brings us (finally) to the concept of principal axes of inertia.
- While this may not look remarkable, notice that if the angular velocity w points along one of the coordinate axes, then the same is true of the angular momentum $\mathbf{L}$. For example, if w points along the x axis, then $\omega_y = \omega_z = 0$, hence:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = (\lambda_1\omega_x, 0, 0)$$

10.7- معادلات أولار Euler's Equations

- تعرفنا حتى الآن إلى أن جميع الأجسام الصلبة لها 3 محاور رئيسية principal axes كما عرفنا كيف نشكل ممتدة العزوم بحيث تكون العزوم المنسوبة للمحاور الرئيسية واقعة في المحور القطري المائل للممتدة.
- لذلك عبرنا عن متجه الاندفاع الزاوي بالصورة: $\mathbf{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3)$.
- سبق كذلك في أول الفصل الدراسي الحديث عن أطر الأسناد، ومنها ذلك الأطار الأسنادي المرتبط بالنظام نفسه، أي يتحرك مع النظام وبالتالي يعتبر ثابتا بالنسبة للنظام حتى لو كان النظام نفسه يتحرك أو يدور.
- إذن بالإمكان تصور أطار أسنادي هو الذي يصف حركة الجسم الصلب body frame وأطارا آخر مرتبط بالجسم الصلب بحيث يتحرك معه تماما ويعتبر مستقرا أو ثابتا بالنسبة له. ونسمي الأول أطار الجسم والثاني الأطار الفضائي space frame. سوف نعتبر أن أحدثيات هذا الأطار هي x, y, z ونستخدم وحدات متجهات هي $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ضمن عملياتنا على نظام الأحداثيات.



10.7- معادلات أولار Eulers Equations

- تذكر العلاقة بين تفاضل الاندفاع بالنسبة للزمن والقوة في حالة الاندفاع الخطي وبين الاندفاع الزاوي وعزم اللي في حالة الدوران. لذلك لدينا العلاقة التالية:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{space}} = \boldsymbol{\tau} \qquad (28)$$

- يرتبط النظامان بالعلاقة التالية:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{body}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L} \qquad (28)$$

- ومن هذه العلاقة نصل إلى ما يسمى: معادلات أولار **Euler's equation**

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} \qquad (29)$$

- **باستخدام العلاقة المذكورة قبل قليل** $\mathbf{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3)$. نستطيع أن نفك هذه المعادلة إلى ثلاث معادلات مختلفة نسميها معادلات أولار

Euler's Equations معادلات أولار -10.7

- يمكننا إذن الحصول على معادلات أولار بالصورة:

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} \qquad (29)$$

$$\because \mathbf{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3)$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{L}} = (\lambda_1\dot{\omega}_1, \lambda_2\dot{\omega}_2, \lambda_3\dot{\omega}_3)$$

$$\therefore (29) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lambda_1\dot{\omega}_1 - (\lambda_2 - \lambda_3)\omega_2\omega_3 &= \tau_1 \\ \lambda_2\dot{\omega}_2 - (\lambda_3 - \lambda_1)\omega_1\omega_3 &= \tau_2 \qquad (30) \\ \lambda_3\dot{\omega}_3 - (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1\omega_2 &= \tau_3 \end{aligned}$$

- تعطي هذه المعادلات الكمية w بالنسبة لاطار الجسم. ويتعبر حلها صعبا بعض الشئ بسبب الحاجة لمعرفة قيم عزوم اللي المعطاة.
- تصبح هذه المعادلات أسهل لو كانت قيم عزوم اللي تساوي الصفر.

شـكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة