سهولة تصحيح

جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم – قسم الرياضيات	الاختبار الشهري الأول للمقرر 111 ريض للفصل الثاني 1437-1438 هـ
	الإسم: .... الرقم الجامعي:.................................. أستاذ المقرر:....................................	الزمن: ساعة ونصف. الدرجة:

ملاحظات : 1. عدد الورقات 4 2. ممنوع استخدام الالة الحاسبة.

السؤال الأول (8 درجات):

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_1^2 (6-2x)\,dx$. (3 درجات)

1 $\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$

$a=1\ ;\ b=2\ ;\ f(x)=6-2x$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}\ ;\ x_k = a+k\left(\frac{b-a}{n}\right) = 1+\frac{k}{n}$

$f(x_k) = 6-2\left(1+\frac{k}{n}\right) = 4-2\frac{k}{n}$

1 $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n}\left(4-2\frac{k}{n}\right) = 4(n+1) - \frac{2}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)$

$\displaystyle = 4(n+1) - \frac{2}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} = 3(n+1)$

1 $\displaystyle \int_1^2 (6-2x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,3(n+1) = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 3$

check : $\displaystyle \int_1^2 (6-2x)\,dx = \left[6x-x^2\right]_1^2 = 8-5 = 3$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3x^2+1$ على الفترة $[0,2]$. (3 درجات)

f متصلة على $[0,2]$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة للتكامل يوجد $c\in(0,2)$ بحيث

$\displaystyle \int_0^2 f(x)\,dx = (2-0)\,f(c)$

1 $\displaystyle \int_0^2 (3x^2+1)\,dx = 2(3c^2+1)$

$\left[x^3+x\right]_0^2 = 2(3c^2+1)$

1 $10 = 2(3c^2+1)$

$3c^2+1 = 5 \Rightarrow 3c^2 = 4 \Rightarrow c^2 = 4/3 \Rightarrow c = \pm\frac{2}{\sqrt3}$

1 $c = 2/\sqrt3$ وبالتالي قيمة c هي لأن $c\in(0,2)$

Scanned by CamScanner

(درجتان) (3) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x)=\int_{\tan x}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{2+t^4}}$.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$$

وبالتالي $h(x)=\tan x$; $g(x)=x^2$; $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2+t^4}}$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2+(x^2)^4}}\cdot 2x - \frac{1}{\sqrt{2+(\tan x)^4}}\cdot \sec^2 x$$

$$F'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2+x^8}} - \frac{\sec^2 x}{\sqrt{2+\tan^4 x}}.$$

1 1

السؤال الثاني (5 درجات): احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(درجتان) (1) $y=(\cot x)(\ln\sqrt{x})$, $x>0$

$$y = \frac{1}{2}(\cot x)(\ln x)$$

$$x>0,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\csc^2 x}{2}\ln x + \frac{\cot x}{2x}$$

1 1

(3 درجات) (2) $y=\frac{x^x\sqrt[3]{1+4x}}{\sin^{-1}x}$, $0<x<1$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{x^x\sqrt[3]{1+4x}}{\sin^{-1}x}\right|$$

$$\ln|y| = \ln|x^x(1+4x)^{1/3}| - \ln|\sin^{-1}x|$$

1 $$\ln|y| = x\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|1+4x| - \ln|\sin^{-1}x|$$

باشتقاق طرفي المعادلة :

1,5 $$\frac{dy/dx}{y} = \ln|x| + 1 + \frac{1}{3}\frac{4}{1+4x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin^{-1}x}$$

وبالتالي

0,5 $$\frac{dy}{dx} = \left[1+\ln|x| + \frac{4}{3}\frac{1}{1+4x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x}\right]\frac{x^x\sqrt[3]{1+4x}}{\sin^{-1}x}.$$

السؤال الثالث (12 درجة): احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ (درجتان)

$$\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int (x-1)\,x^{-2/3}\,dx$$

$$= \int \left[x^{1/3} - x^{-2/3}\right] dx$$

$$= \frac{3}{4}x^{4/3} - 3x^{1/3} + c\,,\ c \in \mathbb{R}$$

1 1

(2) $\int \sqrt{1+\sin x}\,\cos x\,dx$ (درجتان)

$$I = \int \sqrt{1+\sin x}\,\cos x\,dx =$$

$$I = \int (1+\sin x)^{1/2}\cos x\,dx = \int (1+u)^{1/2}\,du$$

$$= \frac{2}{3}(1+u)^{3/2} + cst$$

1 $u = \sin x$

$du = \cos x\,dx$

1 $I = 2/3\,(1+\sin x)^{3/2} + cst$

(3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}}$ (درجتان)

$$J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2)^2-3^2}}$$

نضع $u = x^2$ فإن $du = 2x\,dx$

$= 2x^2\,\frac{dx}{x}$

1 $\frac{dx}{x} = \frac{du}{2u} \Leftarrow du = 2u\,\frac{dx}{x}$

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-3^2}} = \frac{1}{6}\sec^{-1}\left(\frac{u}{3}\right) + cst$$

1

$$= \frac{1}{6}\sec^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right) + cst$$

(درجتان)

(4) $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$

$$K=\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2\cos x}{x^2+2\sin x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2\sin x| + cst$$

2

(درجتان)

(5) $\int \frac{e^{3\ln x}}{x^4}dx$

$$L=\int \frac{e^{3\ln x}}{x^4}dx = \int \frac{e^{\ln(x^3)}}{x^4}dx = \int \frac{x^3}{x^4}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + cst$$

2

(درجتان)

(6) $\int \frac{3^x}{4+3^{2x}}dx$

$$M=\int \frac{3^x}{4+3^{2x}}dx = \int \frac{3^x}{2^2+(3^x)^2}dx$$

نضع $u=3^x$ إذاً $du=\ln 3 \cdot 3^x dx$

1

$$M=\frac{1}{\ln 3}\int \frac{du}{2^2+u^2} = \frac{1}{2\ln 3}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)+cst$$

$$= \frac{1}{2\ln 3}\tan^{-1}\left(\frac{3^x}{2}\right)+cst$$

1