جامعـــــة الملك سعـــــود كليــة العلـــوم قســـم الريــاضيـــــــات

الفصل الثاني 1433-1434 هـــ / 487-ريض / الاختبار النهائي / الزمن: 3 ساعات

الجزء الأوّل (22 درجة) (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

1) أوجد قيمة : أ) $\sqrt[3]{-1}$ ب) $\log\left(\sqrt{i}\right)$.

2) حل المعادلة (في $\mathbb{C}$) التالية $z^2=3+4i$ ثم استنتج جذور المعادلة $\left(1+i\right)z^2+iz-1=0$.

3) لتكن $Q(x,y)=\left(x\sin y-y\cos y\right)e^{-x}$. أوجد دالة كلية $f\left(z\right)$ ***بحيث جزؤها التخيلي*** $\Im m f=Q$.

4) لتكن f دالة كلية بحيث $\left|f\left(z\right)\right|\le\sqrt{|z|}$ لكل $z\in\mathbb{C}$. بيّن أن $f\equiv 0$ على $\mathbb{C}$.

5) أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f\left(z\right)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ على الطوق $1<|z|<2$ ثم استنتج قيمة التكامل $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} f\left(z\right)dz$.

6) لتكن $f\left(z\right)$ دالة تحليلية عند $z=0$ بحيث لكل $n\in\mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{n^2-3n+1}{n^2}$, أوجد صيغة $f\left(z\right)$.

الجزء الثاني (6 درجات):

لتكن Γ المسار الممثل وسيطيا كما يلي:
$$z\left(t\right)=\begin{cases} t & ,0\le t\le 1 \\ e^{\frac{3\pi}{2}i\left(t-1\right)} & ,1\le t\le 2 \\ i\left(t-3\right) & ,2\le t\le 3\end{cases}.$$

1) ارسم هذا المسار موضحا التوجيه.

2) أوجد طول المسار Γ (يمكن حسابه دون اللجوء إلى التكامل).

3) احسب التكامل $\dfrac{1}{2i}\oint_{\Gamma}\bar{z}\,dz$.

الجزء الثالث (12 درجة): (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

1) على ماذا تنصّ نظرية الرواسب ؟

2) استخدم طريقة الرواسب (معللاً كل خطوات الحل) لإثبات أن:

(أ) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ لكل $-1<a<1$.

(ب) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

(ج) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-a}$ لكل $a\ge 0$.

و الله ولي التوفيـــــــق

د. برهان

لا يكتب في هذا الهامش

إصلاح الاختبار النهائي للفصل الثاني ١٤٣٣-١٤٣٤هـ
٤٨٧ ريض

الجزء الأول (22 درجة)

1

$$z = \sqrt[3]{-1} \iff z^3 = -1$$

$$z^3 = e^{i(\pi + 2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = re^{i\theta} \quad , \quad z^3 = r^3 e^{i3\theta} \quad , \quad r > 0$$

إذن

2

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = (1+2k)\pi \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta_k = \dfrac{(1+2k)\pi}{3} \\ 0 \le k \le 2 \end{cases}$$

$$z \in \left\{ e^{i\pi/3} \; ; \; e^{i\pi} = -1 \; ; \; e^{i5\pi/3} \right\}$$

$$i = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

1

$$\sqrt{i} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)}$$

1

$$\log \sqrt{i} = i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

2

$$z^2 = 3 + 4i$$

نضع $z = x + iy$, $x = \operatorname{Re} z \, ; \, y = \operatorname{Im} z$

$$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

إذن

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

بما أن

$$|z^2| = |z|^2 = |3+4i| = 5$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

فإن لدينا

1.5

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{ 2+i \; ; \; -(2+i) \}$$

المعادلة $(1+i)z^2 + iz - 1 = 0$ هي من درجة الثانية

$$a = (1+i) \; ; \; b = i \; ; \; c = -1$$

لا يكتب في هذا الهامش

المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = (i)^2 - 4(1+i)(-1)$

$\Delta = -1 + 4(1+i) = 4 - 1 + 4i = 3 + 4i$

$\Delta = (2+i)^2$

الجذور للمعادلة هم:

1,5

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-i-(2+i)}{2(1+i)} = \frac{-2-2i}{2(1+i)} = \frac{-(1+i)}{(1+i)} = -1$$

$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-i+(2+i)}{2(1+i)} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ -1 \; ; \; \frac{1-i}{2} \right\}$$

3

الدالة ناعمة على $\mathbb{R}^2$ $\quad Q(x,y) = (x \sin y - y \cos y)\, e^{-x}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = (\sin y)\, e^{-x} - (x \sin y - y \cos y)\, e^{-x}$$
$$= [(1-x)\sin y + y \cos y]\, e^{-x}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x,y) = -\sin y\, e^{-x} - [(1-x)\sin y + y \cos y]\, e^{-x}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x,y) = [(x-2)\sin y - y \cos y]\, e^{-x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = (x \cos y - \cos y + y \sin y)\, e^{-x}$$

2

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = ((x-1)\cos y + y \sin y)\, e^{-x}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x,y) = ((1-x)\sin y + \sin y + y \cos y)\, e^{-x}$$
$$= [(2-x)\sin y + y \cos y]\, e^{-x}$$

$$\Delta Q(x,y) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x,y)$$
$$= [(x-2)\sin y - y \cos y + (2-x)\sin y + y \cos y]\, e^{-x}$$
$$= 0$$

إذا Q هي دالة توافقية على $\mathbb{R}^2$

بما أن Q توافقية على $\mathbb{R}^2$ فإن لها مرافق توافقي P

حيث $f = P + iQ$ تكون تحليلية على $\mathbb{C}$.

($\operatorname{Im} f = Q$)

باستخدام معادلتي كوشي ريمان

$$\begin{cases} (1) & \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \left[(x-1)\cos y + y\sin y\right]e^{-x} \\ (2) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \left[(x-1)\sin y - y\cos y\right]e^{-x} \end{cases}$$

بتكامل طرفي المعادلة (1) بالنسبة لـ x

$$P(x,y) = \int \left[(x-1)\cos y + y\sin y\right]e^{-x}\,dx$$

$$= (\cos y)\int (x-1)e^{-x}\,dx + y\sin y \int e^{-x}\,dx + \alpha(y)$$

$$\circ \int (x-1)e^{-x}\,dx = (1-x)e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = (1-x)e^{-x} - e^{-x} + c$$

$$= -xe^{-x} + c$$

$u(x) = x-1$, $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$

$$P(x,y) = -x\cos y\, e^{-x} - y\sin y\, e^{-x} + \alpha(y)$$

$$P(x,y) = -(y\sin y + x\cos y)e^{-x} + \alpha(y)$$

بالاشتقاق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -(\sin y + y\cos y - x\sin y)e^{-x} + \alpha'(y)$$

$$= \left((x-1)\sin y - y\cos y\right)e^{-x} + \alpha'(y)$$

بالمقارنة مع (2) نجد أن $\alpha'(y) = 0$ إذن $\alpha(y) \equiv \underset{cst}{\alpha}$

$$P(x,y) = -(y\sin y + x\cos y)e^{-x} + \alpha$$

(حيث $\alpha \in \mathbb{R}$)

لا يكتب في هذا الهامش

(2) $$f(x+iy) = \left[-(y\sin y + x\cos y)e^{-x} + \alpha\right] + i\left[(x\sin y - y\cos y)e^{-x}\right]$$

$$y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \quad , \quad x = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad ; \quad z = x+iy$$

$$e^{-z} = e^{-(x+iy)} = e^{-x-iy} = e^{-x}\cdot e^{-iy}$$

$$e^{-z} = e^{-x}\left[\cos y - i\sin y\right] \quad (\text{صيغة أويلر})$$

$$z e^{-z} = (x+iy)(\cos y - i\sin y)\, e^{-x}$$

$$= \left[(x\cos y + y\sin y) + i(y\cos y - x\sin y)\right] e^{-x}.$$

(1) فنستنتج أن $\boxed{f(z) = -z e^{-z} + \alpha}$

لكل $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Im} f \equiv \alpha$$

(4) نستخدم متباينة كوشي :

بما أن f تحليلي على $\mathbb{C}$. نأخذ دائرة مركزها $z=0$

ونصف قطرها r .

على الدائرة : $|f(z)| \le \sqrt{|z|} = \sqrt{r}$ فإن

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le \frac{\sqrt{r}\cdot n!}{r^n} \quad ; \quad n = 0, 1, \dots,$$

(3)

$$|f'(0)| \le \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$|f''(0)| \le \frac{2}{r^{3/2}} \quad , \quad \dots$$

* ~~عند r ⟶ ∞~~ نستنتج أن

$|f^{(n)}(0)| \le 0$ لكل $n \ge 1$

يعني $f^{(n)}(0) = 0$ لكل $n \ge 1$ وبما أن $f(0) = 0$ ؛

فنستنتج أن $f \equiv 0$ على $\mathbb{C}$.

لا يكتب في هذا الهامش

5) الدالة $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$

إذن تحليلية على الطوق $A=\{z \,/\, 1<|z|<2\}$

لكل $z\neq 1, z\neq 2$: $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}$

$$A=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z}{z-2}=-1$$

$$B=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z}{z-1}=2$$

1

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}+\frac{2}{z-2}=\frac{1}{1-z}+\frac{2}{z-2}$$

بما أن $|z|>1$ فإن $\left|\frac{1}{z}\right|<1$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z\left[\frac{1}{z}-1\right]}=\frac{-1}{z\left[1-1/z\right]}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

1

بما أن $|z|<2$ فإن $\left|\frac{z}{2}\right|<1$

$$\frac{2}{z-2}=\frac{2}{2(z/2-1)}=\frac{-1}{1-z/2}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z/2)^n$$

فنستنتج أن لكل $1<|z|<2$ ،

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n/2^n$$

1

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^n}z^n$$

$$f(z)=\cdots+\frac{1}{z^2}+\frac{-1}{z}-1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}z^2+\cdots$$

فإن متسلسلة لوران هي $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n z^n$ لكل $1<|z|<2$

حيث
$$c_n=\begin{cases}(-1)^n & ; n<0\\ \frac{-1}{2^n} & ; n\geq 0\end{cases}$$

$$\oint_{|z|=3/2} f(z)\,dz = \oint_{|z|=3/2} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n\Big)\,dz = \oint_{|z|=3/2} -\frac{1}{z}\,dz$$ 1

$$\oint_{|z|=3/2} f(z)\,dz = -2\pi i \,.$$ لأن $\left(\oint_{|z|=3/2} z^{l}\,dz = \begin{cases} 0\,; & l\neq -1 \\ 2\pi i\,; & l=-1 \end{cases}\right)$

(6) نأخذ $F(z) = f(z) - (1-3z+z^2)$ ، F تحليلي في جوار الصفر

$u_n = 1/n$ ، $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ فإن $\{\frac{1}{n}\}$ موجودة في جوار الصفر عندما $n>N$ 3

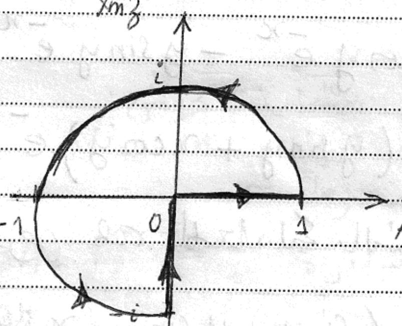
لكل $n>N$ $\quad F(u_n) = f(\frac{1}{n}) - (1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}) = 0$

باستخدام مبدأ الامتداد التحليلي، نستنتج أن $F(z)\equiv 0$ في جوار الصفر

يعني $f(z) = 1-3z+z^2$ في جوار الصفر

الجزء الثاني (6 درجات)

(1) 4



Γ متكون من $3/4$ دائرة وضلعين 1.5

(2) بما أن Γ متكون من $3/4$ دائرة الوحدة وضلعين

فإن طوله يساوي $L(\Gamma) = \frac{3}{4}\times 2\pi + 2$ 1.5

$= \frac{3}{2}\pi + 2$

③ باستخدام نظرية غرين (صيغة المركبة) فإن

التكامل $I=\frac{1}{2i}\oint_{\Gamma}\bar{z}\,dz$ تمثل مساحة المنطقة المحصورة

بالمنحنى Γ ، إذن $I=\frac{1}{2i}\oint_{\Gamma}\bar{z}\,dz=\frac{3}{4}\pi$

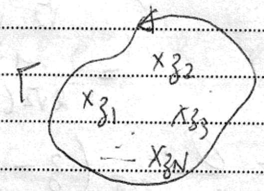
3

الجزء الثالث (13 درجة)

① لتكن f تحليلية على نطاق D حاوية Γ (مغلق وبسيط وموجه موجبا) ماعدا عدد منتهي من النقاط $\{z_1,\dots,z_N\}$ في D فإن

1

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{N} Res(f, z_k)$$



② (أ) نأخذ $-1<a<1$ ، $I(a)=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta}$

نعلم أن $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ لكل $0\le\theta\le 2\pi$ ،

نضع $z=e^{i\theta}$ فإن $dz=i e^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta$

يعني $d\theta=\frac{dz}{iz}$ و z موجودة على دائرة الوحدة

فإن

$$I(a)=\oint_{|z|=1}\frac{1}{1+a\left(\frac{z+1/z}{2}\right)}\,\frac{dz}{iz}$$

2

$$I(a)=-i\int_{|z|=1}\frac{dz}{z+a\left(\frac{z^2+1}{2}\right)}=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{az^2+2z+a}$$

$$I(a)=-2i\times 2\pi i\sum_{|z_k|<1}Res\left(\frac{1}{az^2+2z+a}, z_k\right)$$

حيث z_k النقاط الشاذة لـ $f(z)=\frac{1}{az^2+2z+a}$

$$f(z) = \frac{1}{az^2+2z+a}$$

$$\Delta = 4-4a^2 = \left(2\sqrt{1-a^2}\right)^2$$ 1

$$z_1 = \frac{-2-2\sqrt{1-a^2}}{2a} = -\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$$

$$z_2 = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a} \quad ; \quad z_2 - z_1 = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a}$$

بما أن $|z_1 z_2| = \frac{a}{a} = 1$ و $|z_1|>1$ فان $|z_2|<1$.

z_1 و z_2 هما قطبان بسيطان للدالة f

$$Res(f, z_2) = \lim_{z\to z_2} (z-z_2) f(z)$$

$$Res(f, z_2) = \lim_{z\to z_2} \cancel{(z-z_2)} \cdot \frac{1}{a(z-z_1)\cancel{(z-z_2)}}$$

$$Res(f, z_2) = \frac{1}{a(z_2-z_1)} = \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}$$ 1

ونستنتج أن $I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta} = \frac{4\pi}{2\sqrt{1-a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$

لكل $-1<a<1$

(ب) $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

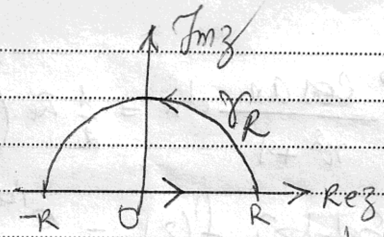
$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

حيث $P(x)=1$ و $Q(x)=x^4+1$ 1

بما أن $\deg Q \geq \deg P+2$ و Q ليس له جذور حقيقية

فان J موجود.

نأخذ الدالة $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ و Γ_R المسار المتكون



$\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$

حيث γ_R نصف الدائرة العلوية مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها R.

باستخدام نظرية الرواسب

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Im\, z_k > 0} Res(f, z_k)$$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\, d\theta = 2\pi i \sum_{Im\, z_k \geq 0} Res(f, z_k)$$

عندما $R \to +\infty$ ، باستخدام نظرية جوردان

$$\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\, d\theta \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

1 إذن $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{Im\, z_k \geq 0} Res(f, z_k)$$

$f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ مستمرة على $\mathbb{C} \setminus \{z / z^4+1=0\}$

$$z^4 = -1 \iff z^4 + 1 = 0$$

نضع $z = re^{i\theta}$

$$\begin{cases} r = 1 \\ 4\theta_k = (1+2k)\pi \end{cases} \Leftarrow r^4 e^{i4\theta} = e^{i(\pi + 2k\pi)}$$

$$\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta_k = \dfrac{(1+2k)\pi}{4} \end{cases} \quad 0 \leq k \leq 3$$

جذور المعادلة $z^4+1=0$ هم أقطاب بسيطة

1 $$\left\{ z_0 = e^{i\pi/4} ;\ z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} ;\ z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} ;\ z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}$$

$$\mathrm{Res}\left(f, e^{i\pi/4}\right) = \lim_{z\to e^{i\pi/4}} \left(z-e^{i\pi/4}\right) f(z)$$

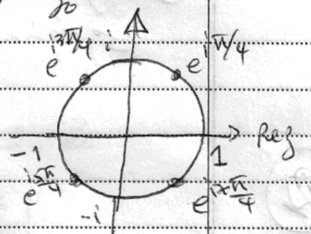
$$\mathrm{Res}\left(f, e^{i\pi/4}\right) = \lim_{z\to e^{i\pi/4}} \left(z-\cancel{e^{i\pi/4}}\right) \frac{1}{\cancel{(z-e^{i\pi/4})}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

$$\mathrm{Res}\left(f, e^{i\pi/4}\right) = \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)}$$

1

$$z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad ; \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \overline{z_1}$$

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \quad ; \quad z_3 = e^{i7\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(+1-i) = \overline{z_0}$$



$$z_0 - z_1 = \sqrt{2} \;;\; z_0 - z_2 = \sqrt{2}(1+i)$$

$$z_0 - z_3 = \sqrt{2}\, i$$

$$\mathrm{Res}\left(f, e^{i\pi/4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(1+i)\cdot\sqrt{2}\, i}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)}$$

$$\mathrm{Res}\left(f, e^{i3\pi/4}\right) = \lim_{z\to e^{i\frac{3\pi}{4}}} \left(z-\cancel{e^{i3\pi/4}}\right) \frac{1}{(z-e^{i\pi/4})\cancel{(z-e^{3i\pi/4})}(z-e^{5i\pi/4})(z-e^{i\frac{7\pi}{4}})}$$

$$= \frac{1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)} = \frac{1}{-\sqrt{2}\,(\sqrt{2}\, i)(-\sqrt{2})(1-i)}$$

$$z_1 - z_0 = -\sqrt{2} \quad ; \quad z_1 - z_2 = z_1 - \overline{z_1} = 2i\, \mathrm{Im}\, z_1 = \sqrt{2}\, i \;;\; z_1 - z_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$$

$$\mathrm{Res}\left(f, e^{i3\pi/4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/4}) + \mathrm{Res}(f, e^{i\frac{3\pi}{4}})\right)$$

1

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, i \left(\frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, i \left(\frac{i+\cancel{1}+i-\cancel{1}}{i^2-1^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$ فنستنتج أن

(ج) نأخذ $a>0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx\right)$$

(متقارب لأن $\deg P = 0$ و $\deg Q = 2$ و Q ليس له جذور حقيقية)

لتكن $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{z^2+1}$ تحليلية

على $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ 1

$\{\pm i\}$ هي أقطاب بسيطة لـ f.

نأخذ $R>0$ و Γ_R المسار المغلق البسيط الموجه موجب المتكون من $[-R,R]$ و نصف الدائرة العلوي مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها،

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

يمكن إثبات أن:

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iaRe^{i\theta}}}{(Re^{i\theta})^2+1}\, iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

باستخدام نظرية الرواسب نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, i) \quad 1$$

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)}\, \frac{e^{iaz}}{\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{e^{-a}}{2i}$$

إذاً،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \cancel{2}\pi \cancel{i}\, \frac{e^{-a}}{\cancel{2i}}$$

$$\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a} \quad 1$$

ونستنتج أن

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$$