جامعـــــة الملك سعــــود كليـــة العلـــوم قســـم الريـــاضيــــــات
الفصل الأول 1434-1435 هـ / 487-ريض / الاختبار النهائي / الزمن: 3 ساعات

الجزء الأوّل (19 درجة) (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

1) لتكن $u(x,y)=-8x^3y+8xy^3$. بين أن $u(x,y)$ توافقية على $\mathbb{R}^2$ ثم أوجد مرافقة توافقية $v(x,y)$ لـ u و استنتج وجود دالة كلية $f(z)$ جزؤها الحقيقي u .

2) إذا كانت f تحليلية على الطوق المغلق $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1\le|z|\le2\}$ وكانت $|f(z)|\le3$ على دائرة الوحدة $|z|=1$ و $|f(z)|\le12$ على الدائرة $|z|=2$ فبرهن على أن $|f(z)|\le3|z|^2$ لكل $z\in A$

(إرشاد: اعتبر الدالة $\dfrac{f(z)}{3z^2}$).

3) أثبت باستخدام المتسلسلات أن : $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$ لكل $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ (إرشاد: اعتبر الدوال $f(z)=e^{z_1z},g(z)=e^{z_2z}$).

4) أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ على الطوق المفتوح $1<|z-2|<2$.

5) أثبت أنه لا توجد دالة تحليلية على القرص المفتوح $D(O,2)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<2\}$ تحقق الشرط التالي:

$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{(-1)^n}{n}$ لكل عدد صحيح $n\ge1$.

الجزء الثاني (7 درجات):

لتكن Γ المسار الممثل وسيطيا كما يلي:
$$\begin{cases}1+e^{i\pi t}\ ;0\le t\le1\\(1-t)i\ ;1\le t\le2\\e^{-\frac{\pi}{2}(t-1)i}\ ;2\le t\le3\\3t-10\ ;3\le t\le4\end{cases}.$$

1) ارسم هذا المسار موضحا التوجيه.

2) أوجد طول المسار Γ (يمكن حسابه دون اللجوء إلى التكامل).

3) احسب التكامل $\int_\Gamma y\ dz$ حيث $z=x+iy$, هل هذه النتيجة تتناقض مع نظرية كوشي ؟

الجزء الثالث (14 درجة): (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

1) على ماذا تنصّ نظرية الرواسب ؟

2) احسب التكاملات التالية بطريقة الرواسب, معللا كل خطوات الحل :

(أ) $I=\oint_{|z-1|=2}\dfrac{dz}{z\left(z^2-4\right)e^z}$ (ب) $J=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2+3}{x^4+5x^2+4}dx$ (ج) $K=\int_0^{\infty}\dfrac{\cos3x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

و الله ولي التوفيـــــــق

لا يكتب في هذا الهامش

د. برهان

إصلاح الاختبار النهائي ٤٨٧ ريض
للفصل الأول ١٤٣٠-٣٤ هـ

الجزء الأول: (19 درجة)

① نحسب المشتقات الجزئية لـ $u(x,y)$ ونتحقق من معادلة لابلاس $\Delta u \equiv 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -24x^2y + 8y^3 \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -8x^3 + 24xy^2$$

2 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = -48xy \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 48x$$

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

وبالتالي u توافقية على $\mathbb{R}^2$

حتى تكون $v(x,y)$ مرافقة توافقية لـ u يجب أن يكون:

1 معادلتي كوشي ريمان
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -24x^2y + 8y^3 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -8x^3 + 24xy^2 \end{cases}$$

إذاً
$$\begin{cases} (1) \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 8x^3 - 24xy^2 \\ (2) \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -24x^2y + 8y^3 \end{cases}$$

بمكاملة (1) بالنسبة لـ x نجد أن

$$v(x,y) = 2x^4 - 12x^2y^2 + \alpha(y)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ y
$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -24x^2y + \alpha'(y)$$

بالمقارنة مع (2) نجد أن $\alpha'(y) = 8y^3$

إذاً $\alpha(y) = 2y^4 + c$

لا يكتب في هذا الهامش

(2)

يعني $v(x,y) = 2x^4 - 12x^2y^2 + 2y^4 + c$

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$= (-8x^3y + 8xy^3) + i(2x^4 - 12x^2y^2 + 2y^4 + c)$$

دالة كلية.

$$f(z) = 2i\left[x^4 + 4x^3(iy) + 6x^2(iy)^2 + 4x(iy)^3 + (iy)^4 + a\right]$$

(+1) قاعدة ذو الحدين $(n=4)$

$$f(z) = 2i\,[x+iy]^4 + 2ia = 2i(z^4 + a)$$

(2) بما أن f تحليلي على الطوق $A=\{z \mid 1\le |z| \le 2\}$

فإن $g(z) = \dfrac{f(z)}{3z^2}$ تحليلي على الطوق المغلق

1 المحدود A باستخدام مبدأ القيمة العظمى

للقياس g.

$$\max_{A} |g(z)| = \max_{\substack{|z|=1\\|z|=2}} \left|\frac{f(z)}{3z^2}\right|$$

1 $$\max_{|z|=1} \left|\frac{f(z)}{3z^2}\right| = \max_{|z|=1} \frac{|f(z)|}{3} \le 1$$

(لأن $|f(z)| \le 3$ على دائرة الوحدة)

$$\max_{|z|=2} \left|\frac{f(z)}{3z^2}\right| = \max_{|z|=2} \frac{|f(z)|}{3\times 2^2} \le 1$$

1 (لأن $|f(z)| \le 12$ على دائرة مركزها 0 ونصف قطرها 2)

لذا $\max\limits_{A} |g(z)| \le 1$ يعني أن لكل $z \in A$

$$\left|\frac{f(z)}{3z^2}\right| \le 1 \iff |f(z)| \le 3|z|^2 \text{ على } A.$$

لا يكتب في هذا الهامش

③

لكل $z\in\mathbb{C}$ $\quad f(z)=e^{z_1 z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$

① حيث $\quad a_n=\frac{z_1^n}{n!}$

لكل $z\in\mathbb{C}$ $\quad g(z)=e^{z_2 z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$

① حيث $\quad b_n=\frac{z_2^n}{n!}$

$$f(z)\,g(z)=e^{z_1 z}\cdot e^{z_2 z}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}z^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$

باستخدام نظرية ضرب كوشي للمتسلسلات

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!}\,\frac{z_2^k}{k!}$$

① $$=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}z_2^k z_1^{n-k}$$

$$=\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$$

الآن نضع $z=1$, نحصل أن

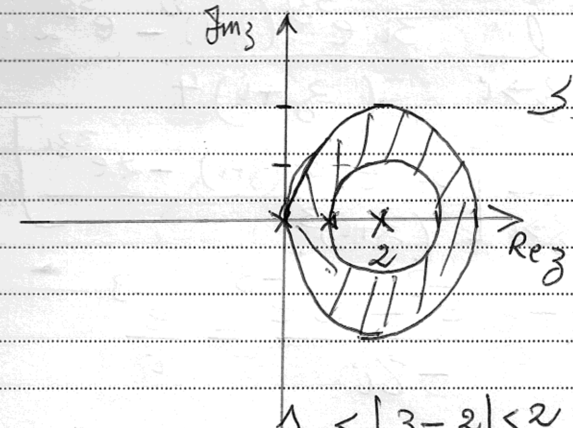
① $$f(1)\,g(1)=e^{z_1}\cdot e^{z_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=e^{z_1+z_2}$$

④ السؤال الرابع $\quad f(z)=\frac{z}{(z-1)(2-z)}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$

لا يكتب في هذا الهامش

بما أن $\{1,2\} \notin A = \{z \,/\, 1<|z-2|<2\}$ فإن f دالة تحليلية على A

إذن f لها منشور لوران



1

لكل z بحيث $1<|z-2|<2$ ،

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-2)^n$$

فلنبحث عن قيم a_n :

على A
$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

1

$$A = \lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z}{2-z} = 1$$

$$B = \lim_{z\to 2} (z-2) f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{-z}{z-1} = -2$$

يعني

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-2}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2+1} = \frac{1}{(z-2)\left[1+\frac{1}{z-2}\right]}$$

1

بما أن $|z-2|>1$ فإن $\left|\frac{1}{z-2}\right|<1$ هذا يؤدي إلى أن

$$\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = \sum_{n\geq 0} \left(-\frac{1}{z-2}\right)^n$$

لكل $z \in A$,

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^n}\right) - \frac{2}{z-2}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} - \frac{2}{z-2}$$

$$= \left[\frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-2)^3} - \frac{1}{(z-2)^4} \cdots\cdots\right] - \frac{2}{z-2}$$

$$= -\frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-2)^3} - \frac{1}{(z-2)^4} + \frac{1}{(z-2)^5} \cdots$$

1

$$a_n = \begin{cases} 0 \ ; & n \geq 0 \\ -1 \ ; & n = -1 \\ (-1)^{n+1} ; & n < -1 \end{cases}$$

5

إذا وجدت تلك الدالة فان $F(z) = z - f(z)$

دالة ليست ثابتة وتحليلية وتحقق

$$F\left(\frac{1}{2m}\right) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

3

وبالتالي يكون $z=0$ صفرًا للدالة $F(z)$ ولكنه

صفر غير معزول وهذا يناقض أن أصفار

الدالة التحليلية تكون معزولة

الجزء الثاني (7 درجات)

① * $1+e^{i\pi t}$ حيث $0 \le t \le 1$ تمثل نصف الدائرة

العلوية مركزها 1 ونصف قطرها 1 موجهة موجبًا

1

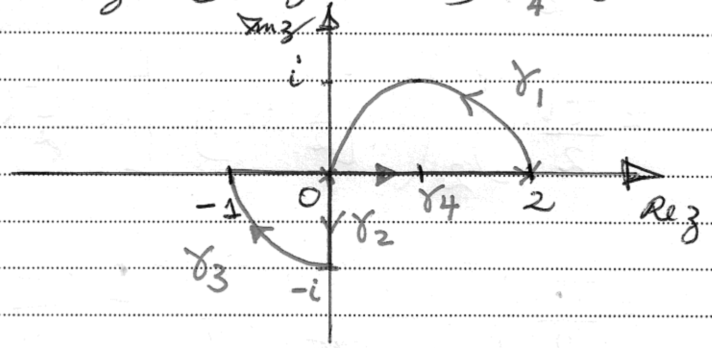
لا يكتب في هذا الهامش

* $(1-t)i$ حيث $1 \le t \le 2$ هي قطعة مستقيمة γ_2 تربط $z=0$ بـ $z=-i$

* $e^{-\frac{\pi}{2}(t-1)i}$ حيث $2 \le t \le 3$ هي ربع دائرة γ_3 مركزها O ونصف قطرها 1 موجهة سالبا (من $-i$ إلى -1)

* $(3t-10)$ حيث $3 \le t \le 4$ تمثل قطعة مستقيم γ_4 تربط $z=-1$ إلى $z=2$.

1,5



$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{4} \gamma_j$$

② طول γ_1 هو π
طول γ_2 هو 1
طول γ_3 هو $\frac{\pi}{2}$
طول γ_4 هو 3

1,5

فإن طول المسار Γ هو

$$L(\Gamma) = \pi + 1 + \frac{\pi}{2} + 3 = \frac{3\pi}{2} + 4$$

③
$$I = \int_\Gamma y\,dz = \int_{\gamma_1} y\,dz + \int_{\gamma_2} y\,dz + \int_{\gamma_3} y\,dz + \int_{\gamma_4} y\,dz$$

1

$$\int_{\gamma_1} y\,dz = \int_0^1 (\sin(\pi t))\, i\pi\, e^{i\pi t}\,dt$$

$$= i\pi \int_0^1 \sin(\pi t)\left[\cos \pi t + i \sin \pi t\right] dt$$

$$= i\pi \left[\frac{\sin^2(\pi t)}{2\pi} + i\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\pi t}{4\pi}\right)\right]_0^1$$

$$= -\pi/2$$

لا يكتب في هذا الهامش

$$\int_{\gamma_2} y\,dz = \int_1^2 (1-t)(-i)\,dt = i/2 \qquad 1$$

$$\int_{\gamma_3} y\,dz = \int_2^3 \left(-\sin\frac{(t-1)\pi}{2}\right)\left(-\frac{\pi i}{2}\, e^{-\frac{\pi}{2}(t-1)i}\right)dt$$

$$= \frac{\pi i}{2}\int_2^3 \left(\sin\left[\frac{\pi}{2}(t-1)\right]\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(t-1)\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}(t-1)\right)\right]dt$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left[\frac{\sin^2(\pi/2\,(t-1))}{\pi} - i\frac{t}{2} + \frac{i}{2\pi}\sin(\pi(t-1))\right]_2^3 \qquad 1$$

$$= \frac{\pi}{4} - i/2$$

$$\int_{\gamma_4} y\,dz = \int_{\gamma_4} 0\,dz = 0 \qquad 1$$

فنستنتج أن

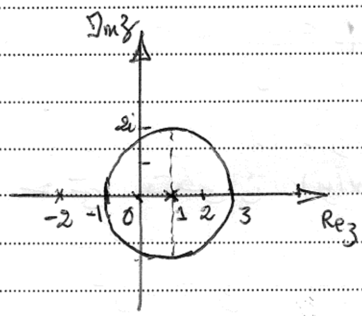
$$I = \oint_{\Gamma} y\,dz = -\pi/2 + \frac{i}{2} + \frac{\pi}{4} - i/2 + 0 = -\frac{\pi}{4}$$

وهذا لا يتناقض مع نظرية كوشي لأن الدالة $y = \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ ليست تحليلية $\quad +1$

الجزء الثالث (14 درجة)

(1) تنص نظرية الرواسب على أنه إذا كان Γ مسار بسيط مغلق وموجه موجبا وكانت f تحليلية داخل وعلى Γ ماعدا ربما عند النقاط $z_1, \dots, z_n$ (داخل Γ) فإن: (2)

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$



$|z-1| = 2$

(2) (أ)

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2-4)e^z}$$ (1)

f لديها قطبين بسيطين داخل الدائرة مركزها 1 ونصف قطرها 2

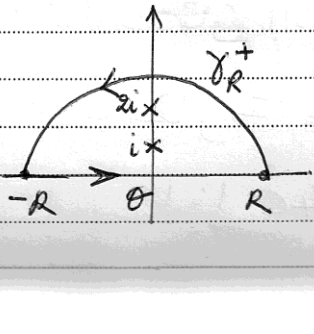
$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0} \cancel{z}\frac{1}{\cancel{z}(z^2-4)e^z} = \frac{-1}{4}$$ (2)

$$Res(f,2) = \lim_{z\to 2} \cancel{(z-2)}\frac{1}{z\cancel{(z-2)}(z+2)e^z} = \frac{1}{8e^2}$$

$$I = \oint_{|z-1|=2} \frac{dz}{z(z^2-4)e^z} = 2\pi i\left[Res(f,0) + Res(f,2)\right].$$ (1)

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{8e^2} - \frac{1}{4}\right].$$

(ب) نأخذ



$$f(z) = \frac{z^2+3}{z^4+5z^2+4}$$

$$\gamma_{R^+} = \tfrac{1}{2}\,\mathcal{C}_{(0,R)} \cup [-R,R]$$ (1)

لا يكتب في هذا الهامش

$$z^4+5z^2+4=(z^2+1)(z^2+4)$$
$$=(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)$$

f لديها أقطاب بسيطة داخل γ_R^+
هم i و $2i$. $(R\gg 2)$

بما أن درجة المقام $\geq$ درجة البسط + 2 فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{2}\mathcal{C}_R^+} f(z)\,dz=0$$

و
$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

باستخدام نظرية الرواسب لدينا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,i)+\operatorname{Res}(f,2i)\right]$$ 1

$$\operatorname{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\cancel{(z-i)}\frac{z^2+3}{\cancel{(z-i)}(z+i)(z^2+4)}$$
$$=\frac{-1+3}{2i\times(-3)}=\frac{-2}{-6i}=\frac{1}{3i}$$ 1

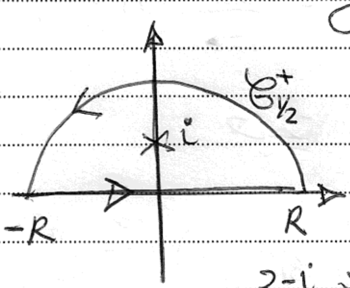
$$\operatorname{Res}(f,2i)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)=\lim_{z\to 2i}\cancel{(z-2i)}\frac{z^2+3}{(z^2+1)\cancel{(z-2i)}(z+2i)}$$
$$=\frac{-4+3}{-3\times 4i}=\frac{1}{12i}$$ 1

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+3}{x^4+5x^2+4}\,dx=2\pi i\left(\frac{1}{3i}+\frac{1}{12i}\right)=\frac{5\pi}{6}$$

ج) بما أن $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{(1+x^2)^2}$ هي زوجية فإن

$$K=\int_0^{\infty}\frac{\cos 3x}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{(1+x^2)^2}\,dx$$ 1

نأخذ الآن $$g(z)=\frac{e^{3zi}}{(1+z^2)^2}$$



$$\gamma_R^+=\mathcal{C}^+_{1/2}\cup[-R,R]$$

g لديها قطب مضاعف عند $z=i$

(نظرية الرواسب) $$\oint_{\gamma_R^+} g(z)\,dz=2\pi i\,Res(g,i)$$ 1

بما أن درجة المقام أكبر من الدرجة البسط $+1$ فإنه
حسب نظرية جوردان

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{2}\mathcal{C}_R^+} g(z)\,dz=0$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{3xi}}{(1+x^2)^2}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3x}}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{(1+x^2)^2}\,dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 3x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{(1+x^2)^2}\,dx=Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3xi}}{(1+x^2)^2}\,dx\right)$$

$$=R\left[2\pi\left(Res(g,i)\right)\right]$$

$$Res(g,i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\,\frac{e^{3zi}}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{3i\, e^{3zi}(z+i)^2 - e^{3zi}\, 2(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$= \lim_{z \to i} \left[\frac{3i\, e^{3zi}(z+i) - 2e^{3zi}}{(z+i)^3}\right]$$ 2

$$= \frac{+6e^{-3} + 2e^{-3}}{+8i} = \frac{e^{-3}}{i}$$

نستنتج أن

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x}{(1+x^2)^2}\, dx = \pi e^{-3}$$