د/ برهان

جامعة الملك سعود King Saud University كلية العلوم - قسم الرياضيات	الإختبار النهائي لمقرر111 ريض
الإسم / .... الرقم الجامعي / .... أستاذ المقرر /	الفصل الثاني 1437 / 1438 هـ الزمن: 3 ساعات الدرجة: ___ / 40

ملاحظات : 1. عدد الورقات 6   2. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال 1(3 درجات)	السؤال 2(4 درجات)	السؤال 3(21 درجة)	السؤال 4(6 درجات)	السؤال 5 (3درجات)	السؤال 6(3 درجات)

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{x+2}$ على الفترة $[-1,2]$. (3 درجات)

- باستخدام نظرية القيمة المتوسطة الدالة f متصلة على فترة محدودة ومغلقة إذن يوجد عدد $c\in(-1,2)$ الذي يحقق

1 $$\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}\,dx=(2-(-1))\,f(c)$$

0,5 $$\frac{2}{3}\left[(x+2)^{3/2}\right]_{-1}^{2}=3\sqrt{c+2}$$

0,5 $$\frac{2}{3}\left[2^3-1\right]=3\sqrt{c+2}$$

1 $$\frac{14}{3}=3\sqrt{c+2}\Rightarrow\sqrt{c+2}=\frac{14}{9}\Rightarrow c+2=\left(\frac{14}{9}\right)^2$$

$$\Rightarrow c=\left(\frac{14}{9}\right)^2-2=\frac{34}{81}$$

السؤال الثاني: احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y=\sinh\left(1+\sqrt{x}\right)$. (درجتان)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sinh(1+\sqrt{x})=\cosh(1+\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

1   1

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cosh(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

(2) $y = \frac{1}{x}\sinh^{-1}(x)$. (درجتان)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\sinh^{-1}x\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\sinh^{-1}x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

1 1

السؤال الثالث : احسب التكاملات التالية :

(1) $\int 2^x\, 5^{2^x}\, dx$ (درجتان)

نضع $u = 2^x$ فإن $du = \ln 2 \cdot 2^x dx$ 1

$$\int 2^x 5^{2^x} dx = \int \frac{5^u}{\ln 2} du = \frac{1}{\ln 2}\int 5^u du$$ 0,5

$$= \frac{1}{\ln 2 \ln 5} 5^u + c = \frac{1}{\ln 2 \ln 5} 5^{2^x} + c,\ c \in \mathbb{R}$$ 0,5

(2) $\int \frac{\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad , x > 0$ (درجتان)

نضع $u = \sqrt{x}$ فإن $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ 0,5

$$\int \frac{\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2\int \cosh u\, du$$ 0,5

$$\int \frac{\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2\sinh u + c,\ c \in \mathbb{R}$$ 1

$$= 2\sinh(\sqrt{x}) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

(3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^8}}$ (درجتان)

نضع $u = x^4$ فإن $du = 4x^3 dx$

$$du = 4x^4 \frac{dx}{x} = 4u\frac{dx}{x}$$ 1

وبالتالي $\frac{dx}{x} = \frac{du}{4u}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^8}} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{1}{4}\,\text{csch}^{-1}(u)+c$$

(1)

$$= -\frac{1}{4}\,\text{csch}^{-1}(x^4)+c,\ c\in\mathbb{R}$$

(درجتان) $\int x\sin x\,dx$ (4)

نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة

(1) $u(x) = x \quad v'(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = 1 \quad v(x) = -\cos x$

(0,5) $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$

(0,5) $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + c,\ c\in\mathbb{R}$

(درجتان) $\int \sin^3 x\ \cos^2 x\,dx$ (5)

$$\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = \int \sin^2 x\cos^2 x\,\sin x\,dx$$

(0,5) $= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,\sin x\,dx$

(0,5) نضع $u = \cos x$ فإن $du = -\sin x\,dx$

$$\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = -\int (1-u^2)u^2\,du$$

(1) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = \int (u^4-u^2)\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} + c,\ c\in\mathbb{R}.$$

(درجتان) $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$: مع العلم أن $\int \sin(7x)\cos(5x)\,dx$ (6)

نأخذ $a = 7x$ و $b = 5x$ فإن

(1) $\sin(7x)\cos(5x) = \frac{1}{2}[\sin(2x)+\sin(12x)]$

$$\int \sin(7x)\cos(5x)\,dx = \frac{1}{2}\int [\sin(2x)+\sin(12x)]\,dx$$

(1) $\int \sin(7x)\cos(5x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(12x)}{12}\right] + c,\ c\in\mathbb{R}$

(7) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}}$ (3 درجات)

ـ نستخدم التعويض التالي : $x = 3\tan\theta$ فإن $dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$

1

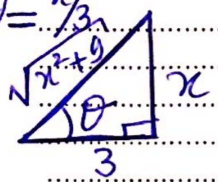
$$(x^2+9)^{3/2} = (9\tan^2\theta + 9)^{3/2} = (9(\tan^2\theta+1))^{3/2} = (9\sec^2\theta)^{3/2}$$
$$= 3^3 \sec^3\theta$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{3^3\sec^3\theta} = \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\sec\theta}$$

1

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}} = \frac{1}{9}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{9}\sin\theta + C$$

$\tan\theta = x/3$



$$= \frac{1}{9}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

1

(8) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$ (3 درجات)

1 $$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} = \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}\right] dx$$

1 $$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} = A\ln|x-1| - \frac{B}{x-1} + C\ln|x+1| + cst$$

. نحسب الثوابت A , B و C :

$x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$ إذا $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$.

$$\bullet\ B = \lim_{x\to 1}(x-1)^2 f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

1 $$\bullet\ C = \lim_{x\to -1}(x+1)f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet\ f(0) = 1 = -A + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \Rightarrow A = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - 1 = -\tfrac{1}{4}$$

وبالتالي $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} = -\tfrac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + cst$

(9) $\int \frac{x^{1/2}}{x^{1/2}-x^{1/3}}\,dx$ (3 درجات)

نضع $u = x^{1/6}$ فإن $u^6 = x$ وبالتالي $dx = 6u^5 du$ (1)

$x^{1/3} = (u^6)^{1/3} = u^2$, $x^{1/2} = (u^6)^{1/2} = u^3$

$$I = \int \frac{x^{1/2}}{x^{1/2}-x^{1/3}}\,dx = 6\int \frac{u^3}{u^3-u^2}\cdot u^5\,du = 6\int \frac{u^8}{u^3-u^2}\,du$$ (1)

$$I = 6\int \frac{u^8}{u^2(u-1)}\,du = 6\int \frac{u^6}{u-1}\,du$$

القسمة المطولة

$$\begin{array}{l|l} u^6 & u-1 \\ -u^6+u^5 & u^5+u^4+u^3+u^2+u+1 \\ u^5 & \\ -u^5+u^4 & \\ u^4 & \\ -u^4+u^3 & \\ u^3 & \\ -u^3+u^2 & \\ u^2 & \\ -u^2+u & \\ u & \\ -u+1 & \\ 1 & \end{array}$$

$$I = 6\int\left[u^5+u^4+u^3+u^2+u+1+\frac{1}{u-1}\right]du$$ (1)

$$I = 6\left[\frac{u^6}{6}+\frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{4}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}+u+\ln|u-1|\right]+cst$$

$$I = x+\frac{6}{5}x^{5/6}+\frac{3}{2}x^{2/3}+2\sqrt{x}+3x^{1/3}+6x^{1/6}+6\ln|x^{1/6}-1|+c$$

السؤال الرابع:

(أ) احسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\,\ln x}{x+\ln x}$. (3 درجتان)

(0,5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\,\ln x}{x+\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ صيغة عدم تعيين

(0,5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\,\ln x}{x+\ln x} \overset{\text{قاعدة لوبيتال}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x\right)+\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}}$

(0,5) $= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}\ln x}{2}+\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\infty}{\infty}$

(1,5) قاعدة لوبيتال $= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\right]+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{4\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{4\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 0$

(ب) بيّن فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب). (3 درجات)

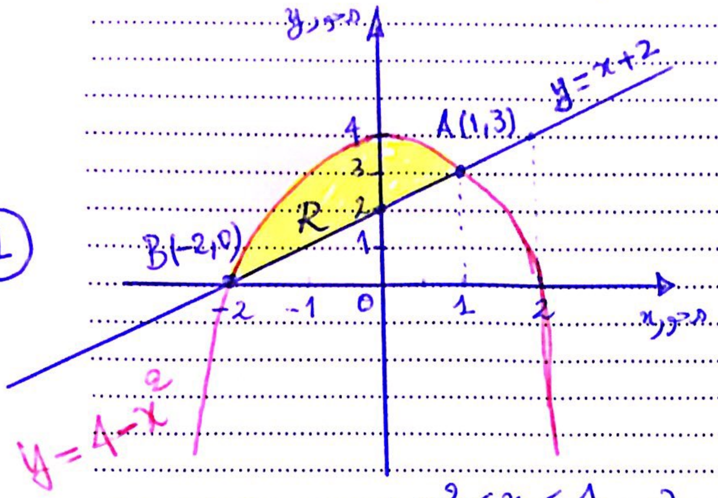
بما أن $\lim_{x\to4^-}\frac{1}{\sqrt{4-x}} = +\infty$ فإن

(0,5) $$\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{t\to4^-}\left(\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{4-x}}\right)$$

(1,5) $$\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{4-x}} = -2\left[\sqrt{4-x}\right]_0^t = -2\left(\sqrt{4-t}-2\right)$$
$$= 4-2\sqrt{4-t}$$

(1) بما أن $\lim_{t\to4^-}\left[4-2\sqrt{4-t}\right] = 4$ فإن $\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ متقارب ومجموعه يساوي 4.

السؤال الخامس : ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$ وجد مساحتها. (3 درجات)



نقاط التقاطع :

$y = 4 - x^2 = x + 2$

$x^2 + x + 2 - 4 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$ (0,5)

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

(1)

$R = \left\{ (x,y) \,/\, \begin{matrix} -2 \le x \le 1 \\ x+2 \le y \le 4 - x^2 \end{matrix} \right\}$ المنطقة R هي

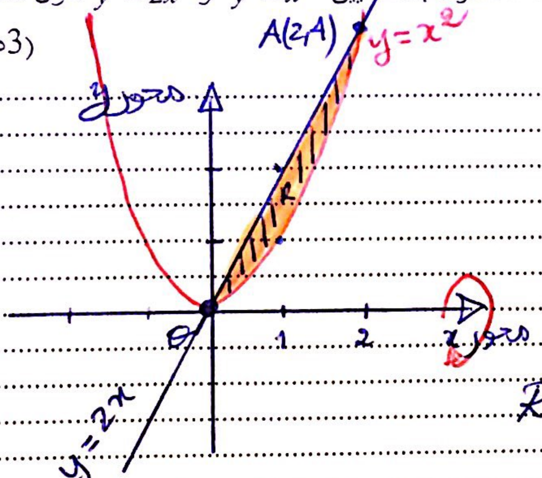
ومساحتها

$A(R) = \int_{-2}^{1} [(4-x^2) - (x+2)]\, dx$

(1,5)

$A(R) = \int_{-2}^{1} [2 - x^2 - x]\, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{1} = (2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}) - (-4 + \tfrac{8}{3} - 2) = \frac{9}{2}$

السؤال السادس: احسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول المحور (Ox). (3درجات)



نقاط التقاطع :

$y = x^2 = 2x$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$ (0,5)

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

المنطقة المحدودة $R = \left\{ (x,y) \,/\, \begin{matrix} 0 \le x \le 2 \\ x^2 \le y \le 2x \end{matrix} \right\}$

فإن حجم الجسم الناشئ من دوران R حول المحور x باستخدام الورد :

(1,5) $\vartheta(S) = \pi \int_{0}^{2} [(2x)^2 - (x^2)^2]\, dx$

$\vartheta(S) = \pi \int_{0}^{2} (4x^2 - x^4)\, dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{0}^{2} = \pi \left[\frac{4 \cdot 2^3}{3} - \frac{2^5}{5} \right]$

(1) $\vartheta(S) = 2^5 \pi \left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} \right] = \frac{2^6 \pi}{15} = \frac{64}{15}\pi$