السؤال الأول:(10 درجات)

(أ) اثبت أن: $3+3.4+3.4^2+...+3.4^{n-1}=4^n-1$ لكل عدد صحيح $n\geq 1$. (3 درجات)

(ب) لتكن R العلاقة المعرفة على $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ كما يلي : $m\ R\ n \Leftrightarrow (m+n)$ عدد فردي.
بيّن فيما إذا كانت R انعكاسية, تناظرية, تخالفية, متعدية. (4 درجات)

(ج) لتكن $P=\{(a,a);(a,d);(b,b);(c,c);(c,d);(d,d);(e,a);(e,d);(e,e)\}$ علاقة ترتيب جزئي على المجموعة $E=\{a,b,c,d,e\}$.
(i) مثّل العلاقة P بشكل هاس. (درجتان)
(ii) هل P علاقة ترتيب كلي ؟ (برّر إجابتك) (درجة)

السؤال الثاني:(8 درجات)

(أ) لتكن S العلاقة المعرفة على $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ كما يلي : $x\ S\ y \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$ عدد صحيح .
(i) اثبت أن S علاقة تكافؤ. (3 درجات)
(ii) هل $25\in[49]$ ؟ (برّر إجابتك) (درجة)

(ب) لتكن $T=\{(1,1);(1,3);(2,1);(3,2)\}$ علاقة على $A=\{1,2,3\}$. أوجد الإغلاق الانعكاسي , الإغلاق التناظري و الإغلاق المتعدي. (4 درجات)

السؤال الثالث:(15 درجة)

(أ) ليكن B جبرا بوليا, و ليكن $a,b,c\in B$ بحيث $c=a+b'+a'b$. أثبت أنّ $ac=a$ و كذلك $bc=b$. (درجتان)

(ب) أكتب الدالة البولية $f(x,y,z)=xy+x'y'+xy'z$ على شكل CSP ثم اكتبها على شكل CPS. (4 درجات)

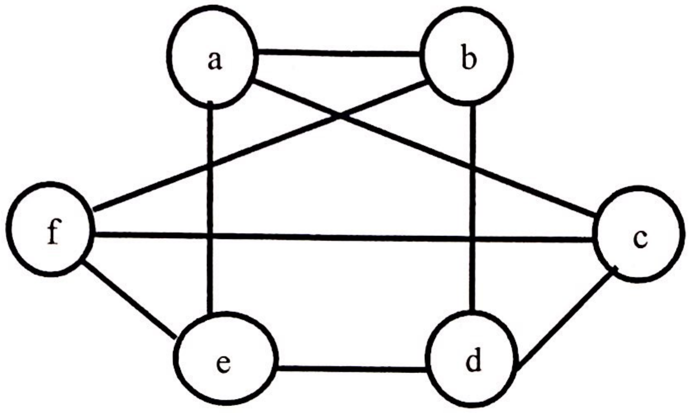
(ج) لتكن $g(x,y,z)=xy+x'y'+x'z+yz$
(i) أوجد شكل كارنو للدالة g . (درجتان)
(ii) أكتب g على شكل MSP . (درجتان)
(iii) أكتب g على شكل MPS . (درجتان)
(iv) صمم شبكة عطف و فصل أصغرية مخرجها $g(x,y,z)$. (درجة)
(v) صمم شبكة مخرجها $g(x,y,z)$ باستخدام بوابات نفي العطف فقط. (درجة)
(vi) صمم شبكة مخرجها $g(x,y,z)$ باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة)

السؤال الرابع:(7 درجات)

(أ) هل يوجد رسم عدد أضلاعه 13 و درجات رؤوسه هي $0,1,1,2,3,4,4,6,7$ ؟ (برّر إجابتك) (درجة)

(ب) إذا علمت بأن عدد رؤوس K_{m,m^2} يساوي 42 , فجد عدد أضلاعه. (درجتان)

(ج) بيّن فيما إذا كان الرسم المقابل ثنائي التجزئة, و إذا كان ثنائي التجزئة, فجد تمثيلا ثنائي التجزئة له. (درجتان)



(د) ليكن G الرسم الممثّل بمصفوفة التجاور المقابلة :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) مثّل الرسم G . (درجة)

(ii) هل G رسم منتظم ؟ (برّر إجابتك) (درجة)

د/ برهان

تصحيح الاختبار النهائي ١٥١ ريض

للفصل الثاني ١٤٣٨/٣٧ هـ

السؤال الأول: (١٠ درجات)

(أ) الطريقة الأولى: (الاستقراء الرياضي)

0,5 نضع $P(n):\ 3+3\times4+3\times4^2+\dots+3\times4^{n-1}=4^n-1$

• خطوة الأساس: $n=1$ ؛ $3 \overset{?}{=} 4^1-1$ صح فإن $P(1)$ صادقة

0,5 • خطوة الاستقراء: نأخذ $k\geq 1$. نفترض أن $P(k)$ صادقة

(يعني لدينا $3+3\times4+3\times4^2+\dots+3\times4^{k-1}=4^k-1$) فلنثبت

صحة $P(k+1)$ ($3+3\times4+\dots+3\times4^{k-1}+3\times4^k \overset{?}{=} 4^{k+1}-1$)

2

$$\underbrace{3+3\times4+\dots+3\times4^{k-1}}_{4^k-1}+3\times4^k = 4^k-1+3\times4^k = 4\times4^k-1=4^{k+1}-1$$

فبالتالي لكل $n\geq1$ لدينا $3+3\times4+\dots+3\times4^{n-1}=4^n-1$

طريقة ثانية (مباشرة) نأخذ $n\geq1$ عدد صحيح فإن

$$S_n = 3+3\times4+\dots+3\times4^{n-1}$$

$$S_n = 3(\underbrace{1+4+\dots+4^{n-1}}_{L_n}) = 3(1+4(1+\dots+4^{n-2}))$$

$$S_n = 3(1+4(L_n-4^{n-1})) = 3\left(\frac{4^n-1}{3}\right)=4^n-1$$

$$L_n = 1+4+\dots+4^{n-1} = 1+4(L_n-4^{n-1})$$

$$\Rightarrow L_n = 1+4L_n-4^n$$

$$3L_n = 4^n-1 \Rightarrow L_n=\frac{4^n-1}{3}$$

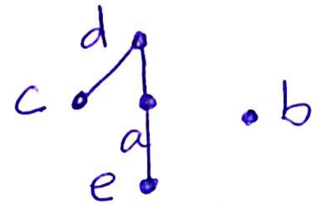
(ب) • R ليست انعكاسية على $\mathbb{N}$ لأن $(1,1)\notin R$ ($(1+1)=2$ ليس فردي) 1

• R تناظرية لأن عملية الجمع إبدالية إذا كان mRn فإن nRm 1

• R ليست تخالفية لأن $1R2$ و $2R1$ لكن $1\neq2$. 1

• R ليست متعدية لأن $1R2$ و $2R3$ لكن $1 \not R 3$. 1

2 (i)



(ii) إن العلاقة P غير كلية لأنها لا تتمتع بخاصية المقارنة

1 مثلا $a \not P b$ و $b \not P a$.

السؤال الثاني (8 درجات)

(أ) (i) • S انعكاسية على N لأن عندما نأخذ $x\in N$ فإن xSx

1 لأن $\sqrt{x}-\sqrt{x}$ = صفر وهو عدد صحيح .

• S تناظرية على N لأن عندما نأخذ $x,y\in N$ ونفترض أن

1 xSy فإن $(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ هو عدد صحيح وبالتالي $(\sqrt{y}-\sqrt{x})$

هو أيضا عدد صحيح إذن ySx .

• S متعدية على N لأن عندما نأخذ $x,y,z\in N$ ونفترض

1 أن xSy و ySz فإن $\sqrt{x}-\sqrt{y}=k$ و $\sqrt{y}-\sqrt{z}=k'$ حيث

k و k' أعداد صحيحة فبالجمع نحصل $\sqrt{x}-\sqrt{z}=k+k'$ هو

أيضا عدد صحيح وبالتالي xSz .

بما أن S انعكاسية، تناظرية ومتعدية على N فهي علاقة تكافؤ على N.

(ii) $25\in[49]$ لأن $(\sqrt{25}-\sqrt{49})=5-7=-2$ هو عدد صحيح (يعني $25S49$)

1

(ب) $\rho(T)=T\cup I_A$ الإغلاق الانعكاسي

1 $\rho(T)=\{(1,1);(1,3);(2,1);(3,2);(2,2);(3,3)\}$

$\sigma(T)=T\cup T^{-1}$ الإغلاق التناظري

1 $\sigma(T)=\{(1,1);(1,3);(2,1);(3,2);(3,1);(1,2);(2,3)\}$

$\tau(T)=T\cup T^2\cup T^3$ الإغلاق المتعدي

$T=\{(1,1);(1,3);(2,1);(3,2)\}$

1 $T^2=\{(1,1);(1,3);(1,2);(2,1);(2,3);(3,1)\}$

$T^3=T^2\circ T=\{(1,1);(1,2);(1,3);(2,1);(2,3);(2,2);(3,1);(3,3)\}$

$\tau(T) = \{ (1,1) ; (1,3) ; (2,1) ; (3,2) ; (1,2) , (2,3) ; (3,1) ; (2,2) ; (3,3) \} = A \times A$

1

السؤال الثالث (15 درجة)

أ) لدينا $c = a + b' + a'b$ فان

$aa = a$
$aa' = 0$

$$ac = a(a + b' + a'b)$$

1

$$ac = a + ab'$$
$$ac = a(1+b') = a \cdot 1 = a$$

كذلك لدينا $c = a + b' + a'b$ فان

$$bc = b(a + b' + a'b)$$

1

$$bc = ba + 0 + a'b$$
$$bc = ba + ba' = b(\underbrace{a+a'}_{1}) = b$$

ب) $f = xy + x'y' + xy'z$

$$= xy(z+z') + x'y'(z+z') + xy'z$$

2

$$\boxed{csp\, f = xyz + xyz' + x'y'z + x'y'z' + xy'z}$$

نعلم أن $cps\, f = (csp(f'))'$

$$f' = (xy + x'y' + xy'z)'$$
$$= (x'+y') \cdot (x+y) \cdot (x'+y+z')$$
$$= (x'y + xy')(x'+y+z')$$
$$f' = x'y + x'y + x'yz' + xy'z'$$
$$= x'y(z+z') + x'y(z+z') + x'yz' + xy'z'$$
$$f' = x'yz + x'yz' + \cancel{x'yz} + \cancel{x'yz'} + \cancel{x'yz'} + xy'z'$$

وبالتالي $csp\, f' = x'yz + x'yz' + xy'z'$

2

$$\boxed{cps(f) = (x+y'+z') \cdot (x+y'+z) \cdot (x'+y+z)}$$

(ج)

$$g = xy + x'y' + x'z + yz$$

$$= xy(z+z') + x'y'(z+z') + x'(y+y')z + (x+x')yz$$

$$= xyz + xyz' + \underline{x'y'z} + x'y'z' + x'yz + \underline{x'y'z} + \cancel{xyz} + \cancel{x'yz}$$

$$\boxed{CSP\, g = xyz + xyz' + x'y'z + x'y'z' + x'yz}$$

2

(شكل كارنوف)

(i)

	yz	$y'z$	$y'z'$	yz'
x	1	0	0	1
x'	1	1	1	0

2

$$\boxed{MSP(g) = yz + xy + x'y'}$$ (ii)

2

(iii)

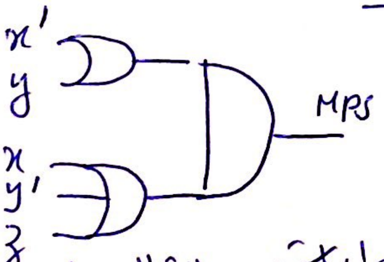
$$MPS(g) = (MSP(g'))'$$

$$MSP(g') = xy' + x'yz'$$

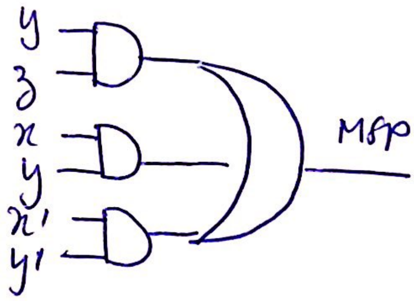
$$\boxed{MPS(g) = (x'+y)\cdot(x+y'+z)}$$

1

(iv)



3 بوابات وبالتالي فهي شبكة عطف وفصل أصغرية

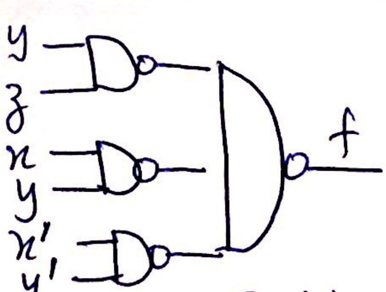


4 بوابات

1

$$MSP(g) = [(yz + xy + x'y')']' \quad (v)$$

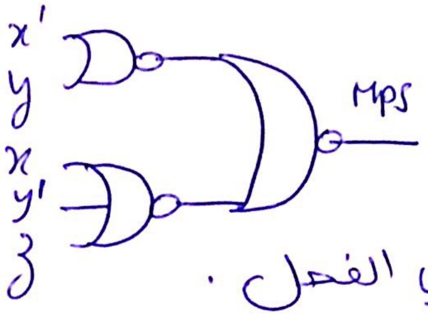
$$MSP(g) = ((yz)'\cdot(xy)'(x'y')')'$$



شبكة نفي العطف

$Mps(g) = [((x'+y)(x+y'+z))']'$ (٧١)

$Mps(g) = [(x'+y)' + (x+y'+z)']'$

1 

تشرح في الفصل .

السؤال الرابع (7 درجات)

(أ) لا يوجد رسم بهذه المواصفات لأن

1 $\sum_{x \in V(G)} \deg x = 2|E|$

↯ $28 = 2 \times 13$

(ب) K_{m,m^2} له $m+m^2$ رأس
m^3 ضلع

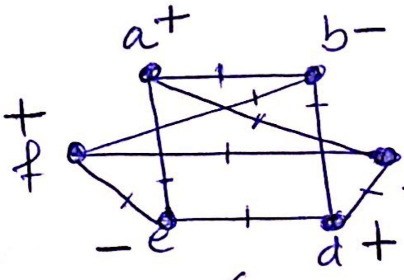
1 بما أن $m+m^2 = 42$

$m(m+1) = 42$

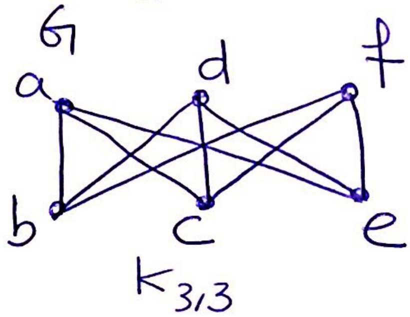
1 فإن $m = 6$

وبالتالي عدد أضلاعه 6^3 ضلع .

(ج)

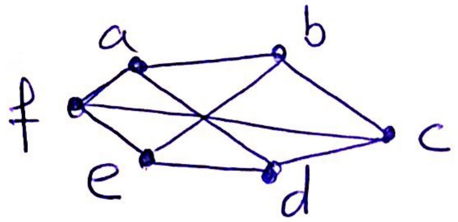


1 هو ثنائي التجزئة
لأنه لا يحتوي على
دورة فردية .

1 $G \simeq$ 

$K_{3,3}$

(د) (i)

1 

1 (ii) G هو رسم منتظم من نوع 3 ذات 6 رؤوس .