د/ برهان

الإختبار النهائي لمقرر111 ريض	جامعة الملك سعود King Saud University — كلية العلوم - قسم الرياضيات
الفصل الأول 1437 / 1438 هـ الزمن: 3 ساعات الدرجة: —— 40	الإسم / .... الرقم الجامعي / .... أستاذ المقرر / ....

ملاحظات : 1. عدد الورقات 6 2. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال 1	السؤال 2	السؤال 3	السؤال 4	السؤال 5	السؤال 6	السؤال 7	السؤال 8
3 درجات	14 درجة	6 درجات	3 درجات	3 درجات	درجتان	3 درجات	6 درجات

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=1+x^2$ على الفترة $[-1,2]$. (3 درجات)

بما أن f متصلة على $[-1,2]$ فإنه يوجد $c\in(-1,2)$ الذي يحقق

$$\int_{-1}^{2}(1+x^2)\,dx = 3(1+c^2)$$ (1)

$$\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 3(1+c^2)$$ (1)

$$\left(2+\tfrac{8}{3}\right)-\left(-1-\tfrac{1}{3}\right) = 3(1+c^2)$$

$$6 = 3(1+c^2)$$

$$c^2 = 1 \rightarrow c = \pm 1$$

لأن $-1\notin(1,3)$ وبالتالي نتيجة $c=1$ (1)

السؤال الثاني : احسب التكاملات التالية :

(1) $\displaystyle\int\left(\frac{5}{x^4}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ (درجتان)

$$\int\left(\frac{5}{x^4}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = 5\int x^{-4}dx - 2\int x^{-1/3}dx$$

$$= \frac{5}{-3}x^{-3} - 2\,\frac{3}{2}x^{2/3} + c$$

$$= -\frac{5}{3}\,\frac{1}{x^3} - 3x^{2/3} + c,\quad c\in\mathbb{R}$$

(1) (1)

$\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx$ **(2)** (درجتان)

① نضع $u = \tan^{-1} x$ فإن $du = \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + c$$

① $$= \frac{(\tan^{-1} x)^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\int 2^{3x+1}\, dx$ **(3)** (درجتان)

0,5 نضع $u = 3x+1$ فإن $du = 3\,dx$

1,5 $$\int 2^{3x+1}\, dx = \frac{1}{3}\int 2^u\, du = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\ln 2}\, 2^u + c$$

$$= \frac{1}{3\ln 2}\, 2^{3x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\int x\, e^x\, dx$ **(4)** (درجتان)

نستخدم التكامل بالتجزئة: $u(x) = x$ ⇒ $u'(x) = 1$

① $v'(x) = e^x$ ⇒ $v(x) = e^x$

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx$$

① $$= x e^x - e^x + c$$

$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$ **(5)** (3 درجات)

نضع $x = 2\sin\theta$ فإن $dx = 2\cos\theta\, d\theta$

① $$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta} = 2\cos\theta$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{4\sin^2\theta}{\cancel{2\cos\theta}}\,\cancel{2\cos\theta}\,d\theta$$

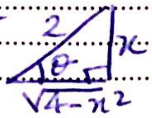
$$= 4\int \sin^2\theta\,d\theta = 4\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

1

$x = 2\sin\theta$

$\sin\theta = x/2$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$



$$= 2\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + C$$

$$= 2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + C = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$$

1

(6) $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx$ (3 درجات)

0,5 $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ لكل $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$

0,5 $B = \lim_{x\to 0} x^2 f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x-1} = -1$

0,5 $C = \lim_{x\to 1} (x-1) f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^2} = 2$

0,5 $1 = \lim_{x\to\infty} x f(x) = A + C = A + 2 \Rightarrow A = -1$

1 $$\int \frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{-1}{x^2}\,dx + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + cst$$

السؤال الثالث:

(أ) احسب $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x + x\cos x}$. (3 درجات)

0,5 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x + x\cos x} = \frac{0}{0}$ صيغة عدم تعيين

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2 + \cos x - x\sin x} = \frac{1}{2+1-0} = \frac{1}{3}$$

2 0,5

$\cos 0 = 1$

$\sin 0 = 0$

(ب) بيّن فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب) . (3 درجات)

0,5 $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^{t} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\right)$

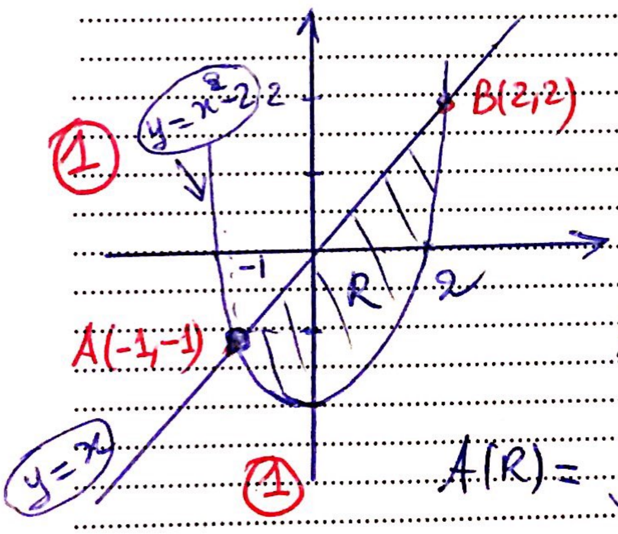
1,5 $\displaystyle = \lim_{t\to+\infty} \left[\tan^{-1}(e^x)\right]_0^t$

$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ $\displaystyle = \lim_{t\to+\infty}\left[\tan^{-1}(e^t) - \tan^{-1}(1)\right]$

$\tan^{-1}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ $\displaystyle = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ 1

$\pi/4$ تقارب للعدد

السؤال الرابع : ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = x^2 - 2$ و $y = x$ وجد مساحتها. (3 درجات)



1

1

نقاط التقاطع :

$y = x^2 - 2 = x$

$x^2 - x - 2 = 0$ 0,5

$(x+1)(x-2) = 0$

$x = -1 \ ; \ x = 2$ المنطقة هي

$R = \left\{ (x,y) \ / \ \begin{matrix} -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 2 \le y \le x \end{matrix} \right\}$

مساحتها

$\displaystyle A(R) = \int_{-1}^{2} \left[x - (x^2 - 2)\right] dx$

$\displaystyle = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{2} = 9/2$ 0,5

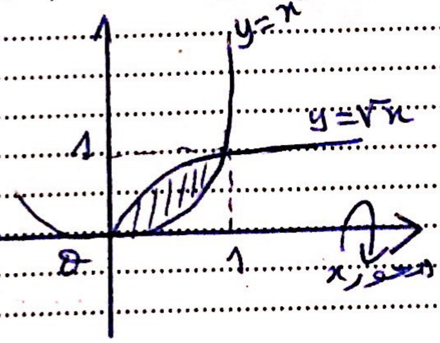
السؤال الخامس: جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ حول المحور (Ox). (3 درجات)

$x^2 = \sqrt{x}$

$x^4 = x$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0 ; \ x = 1$



$R = \left\{ (x,y) \ / \ \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{matrix} \right\}$

فإن حجم الجسم هو

$\displaystyle V(S) = \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right] dx$ 2

$$V(S) = \pi \int_0^1 (x - x^4)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{3\pi}{10} \quad 1$$

السؤال السادس: جد طول القوس $y = \cosh x$ من $x = 0$ إلى $x = \ln 3$. (درجتان)

$1{,}5 \quad L = \int_0^{\ln 3} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx$

$0{,}5 \quad L = \int_0^{\ln 3} \cosh x\, dx$

$1 \quad L = \left[\sinh x \right]_0^{\ln 3} = \sinh(\ln 3) = \frac{3 - 1/3}{2} = 4/3$

السؤال السابع: جد مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران بيان المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة $[1,4]$ حول المحور (Ox) .
(3 درجات)

$y = f(x) = \sqrt{x}$

مساحة سطح الجسم

$1{,}5 \quad S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx$

$S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$

$0{,}5 \quad S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, dx$

$u = 4x + 1$

$du = 4\,dx$

$S = \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}\, dx = \frac{\pi}{4} \int_5^{17} u^{1/2}\, du$

$1 \quad = \frac{\pi}{4} \frac{2}{3} \left[u^{3/2} \right]_5^{17} = \frac{\pi}{6} \left(17^{3/2} - 5^{3/2} \right).$

السؤال الثامن :

(أ) حوّل المعادلة الديكارتية $x^2+(y-2)^2=4$ إلى القطبية ثم تعرف على بيانها. (3 درجات)

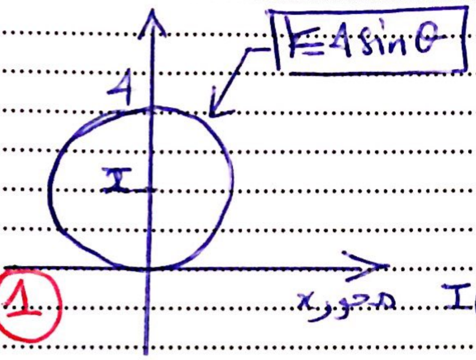
$$x^2+(y-2)^2=4$$

$$x^2+y^2-4y+4=4$$

$$\underbrace{x^2+y^2}=4y$$

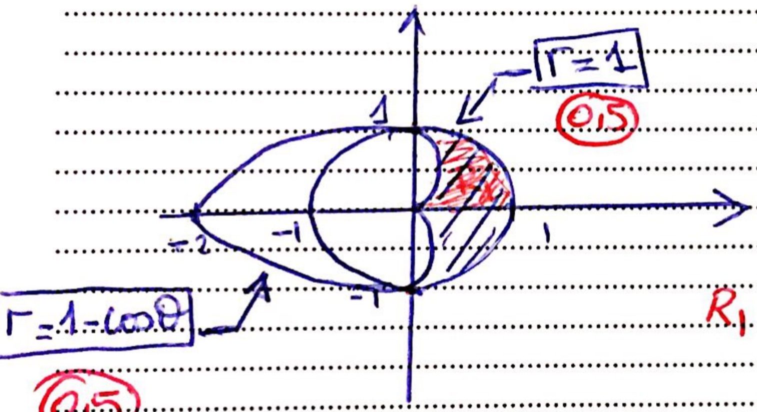
$$r^2=4r\sin\theta$$

$$\boxed{r=4\sin\theta}$$ (2)



هي معادلة دائرة مركزها $I(0,2)$ محور x ونصف قطرها 2.

(ب) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r=1$ وخارج المنحنى القلبي $r=1-\cos\theta$ ثم جد مساحتها. (3 درجات)



$r=1$ معادلة دائرة الوحدة

$r=1-\cos\theta$ معادلة منحنى قلبي

لتكن المنطقة R الواقعة:

$$R_1=\left\{(r,\theta) \;/\; \begin{array}{l} 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 1-\cos\theta\le r\le 1 \end{array}\right\}$$

باستخدام التناظر نرى أن

$$A(R)=2A(R_1)$$

(1)

$$A(R)=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[1^2-(1-\cos\theta)^2\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[1-(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\right]d\theta$$

(0,5)

$$=\int_0^{\pi/2}\left(2\cos\theta-\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\left[2\sin\theta-\frac{\theta}{2}-\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

(0,5)

$$=\left(2-\pi/4\right)$$