جامعة الملك سعود

كلية العلوم - قسم الرياضيات

الاختبار النهائي - لمقرر ٢٤٣ريض

الفصل الثاني ١٤٢٦ / ١٤٢٧هـ

**الزمن/ ثلاث ساعات**

**السؤال(١):**

**(أ)** أثبت أن $(n!+1,(n+1)!+1)=1$.

**(ب)** إذا كان $a,b\in\mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفرا فأثبت أنه يوجد $x_0,y_0\in\mathbb{Z}$ بحيث يكون $(a,b)=ax_0+by_0$.

**(ج)** إذا كان $a^3\mid b^2$ فأثبت أن $a\mid b$.

**(د)** جد جميع الأعداد الأولية $p$ بحيث يكون $7p+4$ مربعا كاملا.

**السؤال(٢):**

**(أ)** أثبت أن $\tau(n)$ عددا فرديا إذا وفقط إذا كان $n$ مربعا كاملا.

**(ب)** أثبت أن $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3\equiv 0 \pmod 9$.

**(ج)** استخدم مبرهنة الباقي الصينية لإيجاد جميع الأعداد بين 3000 و 5000 التي بقسمتها على 7، 11، 13 يكون الباقي 1، 3، 5 على التوالي.

**(د)** أثبت أن $(m,n)=1$ إذا وفقط إذا كان $m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod{mn}$.

**السؤال(٣):**

**(أ)** ليكن $p$ أوليا فرديا. أثبت أن التطابق $x^2\equiv -1 \pmod p$ له حل إذا وفقط إذا كان $p\equiv 1 \pmod 4$.

**(ب)** أثبت أنه يوجد عدد لانهائي من الأعداد الأولية التي على الصورة $p=4k+1$.

**(ج)** ليكن $p$ أوليا فرديا. إذا كان $q$ قاسما أوليا للعدد $M_p=2^p-1$ فأثبت أن $q=2kp+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}^+$.

**(د)** استخدم الفقرة (ب) لمعرفة فيما إذا كان العدد $M_{23}=2^{23}-1$ عددا أوليا أم مؤلفا.

**السؤال(٤):**

**(أ)** أثبت أن $6601=7\cdot 23\cdot 41$ عدد كارمايكل.

**(ب)** أثبت أن $\varphi(2n)=\varphi(n)$ إذا وفقط إذا كان $n$ فرديا.

**(ج)** أثبت أن $\sum_{d\mid n}\varphi(d)=n$.

**(د)** جد جميع ثلاثيات فيثاغورس البدائية حيث $y=12$.