جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات – الفصل الثاني ١٤٢٢/١٤٢٣

الاختبار النهائي لمقرر ٢٤٣ريض الزمن ٩٠ دقيقة الأثنين ١٥-٣-١٤٢٣

السؤال الأول:

(أ) إذا كان $d=(c,n)$ فأثبت أن $ac \equiv bc (\bmod n)$ يكافئ $a \equiv b (\bmod \frac{n}{d})$.

(ب) احسب مرتبتي الآحاد و العشرات للعدد $\sum_{k=1}^{1000} k!$.

السؤال الثاني: يقال عن عددين m و n أنهما متحابان إذا كان $\sigma(m)=\sigma(n)=m+n$

(أ) أثبت أن 220 ,284 متحابان.

(ب) إذا كانت $p=3(2^{n-1})-1,\ q=3(2^n)-1,\ r=9(2^{2n-1})-1$ أعداداً أولية حيث $n \ge 2$

فبرهن أن $2^n pq$. و $2^n r$ عددان متحابان.

السؤال الثالث:

(أ) أثبت أن $\tau(n)\varphi(n) \ge n$ لكل $n \ge 1$.

(ب) إذا كان $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}$ هو تحليل n إلى عوامله الأولية و كانت μ هي دالة موبياس فبرهن أن $\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^t$.

السؤال الرابع:

(أ) إذا كان (x,y,z) ثلاثياً فيثاغورسياً بدائياً فأثبت وجود عددين n, m بحيث $m>n>0$ ، $(m,n)=1$ ، $m \not\equiv n \ (\bmod 2)$ و

$$x = m^2 - n^2$$

$$y = 2mn$$

$$z = m^2 + n^2$$

(ب) جد جميع الثلاثيات الفيثاغورسية التي فيها $x=55$.

السؤال الخامس:

(ب) إذا كان $d=(a,b)$ فهل صحيح أن $(\frac{a}{d},b)=1$ ؟ (برر إجابتك)

(ب) برهن العبارة التالية: لكل $n \ge 2$ توجد أعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بحيث $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d$ حيث $d=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. (تأكد من برهان النتائج التي تحتاجها)