**جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات – الفصل الثاني ١٤٢٣/١٤٢٤**

**الاختبار النهائي لمقرر ٢٤٣ريض الزمن ١٨٠ دقيقة الأثنين ١٧-١١-١٤٢٣**

---

**السؤال الأول :**

(أ) **حل التطابق** $64x \equiv 897 (\mathrm{mod} 1001)$ .

(ب) **ليكن** $F(n) = \sum_{d|n} g(d)$ . **أثبت أن** $g$ **ضربية إذا وفقط إذا كانت** $F$ **ضربية.**

(ج) إذا كان $p$ عدداً أولياً بحيث $p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\, 4)$ فأثبت أن $\frac{p-1}{2}$ عدداً فردياً. ثم استخدم مبرهنة ويلسن لإثبات أن $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p)$ .

---

**السؤال الثاني :**

(أ) إذا كان $(x, y, z)$ ثلاثياً فيثاغورسياً بدائياً فأثبت أن $(x, z) = 1$ .

(ب) جد جميع الثلاثيات الفيثاغورسية التي فيها $y = 16$ .

(ج) جد ثلاثياً فيثاغورسياً بدائياً $(x, y, z)$ إذا كان $x = p > 2$ عدداً أولياً.

---

**السؤال الثالث :**

(أ) إذا كان $x^2 + y^2 = p^2$ حيث $p$ عدد أولي فردي و كان $x, y$ عددين صحيحين، فأثبت أن $p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 4)$ .

(ب) إذا كان $n \geq 1$ عدداً صحيحاً و وجد عدد صحيح $a$ يحقق: $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, n)$ و $a^{n-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n)$ لكل قاسم أولي $p$ للعدد $n-1$ فبرهن أن $n$ عدد أولي.

(ج) **إذا كان** $p$ **عدداً أولياً، فأثبت أن** $\binom{2p}{p} \equiv 2 (\mathrm{mod}\ p)$ .

---

**السؤال الرابع :**

(أ) حل النظام

$$x \equiv 8 (\mathrm{mod} 15)$$

$$x \equiv 3 (\mathrm{mod} 10)$$

$$x \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 6)$$

(ب) إذا كان $a, b$ عددين ليس كلاهما صفراً، فأثبت أن القاسم المشترك الأعظم لهما يمكن كتابته كتركيب خطيا منهما.

(ج) هل عكس الفقرة (ب) صحيحاً؟ ماذا لو كان العددان أوليين نسبياً؟