جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات – الفصل الثاني ١٤٢٤/١٤٢٣

الاختبار النهائي لمقرر ٢٤٣ريض الزمن ١٨٠ دقيقة الأثنين ١٧-١١-١٤٢٣

السؤال الأول:

(أ) حل التطابق $64x \equiv 897 (\text{mod} 1001)$.

(ب) ليكن $F(n) = \sum_{d|n} g(d)$. أثبت أن g ضربية إذا وفقط إذا كانت F ضربية.

(ج) إذا كان p عدداً أولياً بحيث $p \equiv 3 \pmod 4$ فأثبت أن $\frac{p-1}{2}$ عدداً فردياً. ثم استخدم مبرهنة ويلسن لإثبات أن $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv 1 \pmod p$.

السؤال الثاني:

(أ) إذا كان $x^2 + y^2 = p^2$ حيث p عدد أولي فردي و كان x, y عددين صحيحين، فأثبت أن $p \equiv 1 \pmod 4$.

(ب) إذا كان $n \geq 1$ عدداً صحيحاً و كان a عدد صحيح يحقق: $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod n$ لكل قاسم أولي p للعدد $n-1$ فبرهن أن n عدد أولي.

(ج) إذا كان p عدداً أولياً، فأثبت أن $\binom{2p}{p} \equiv 2 (\text{mod}\ p)$.

السؤال الثالث:

(أ) حل النظام

$$x \equiv 8 (\text{mod} 15)$$
$$x \equiv 3 (\text{mod} 10)$$
$$x \equiv 5 (\text{mod} 6)$$

(ب) إذا كان a, b عددين ليس كلاهما صفراً، فأثبت أن القاسم المشترك الأعظم لهما يمكن كتابته كتركيب خطيا منهما.

(ج) هل عكس الفقرة (ب) صحيحاً؟ ماذا لو كان العددان أوليين نسبياً؟

السؤال الرابع:

(أ) إذا كان (x, y, z) ثلاثياً فيثاغورسياً بدائياً فأثبت أن $(x, z) = 1$.

(ب) جد جميع الثلاثيات الفيثاغورسية التي فيها $y = 16$.

(ج) جد ثلاثياً فيثاغورسياً بدائياً (x, y, z) إذا كان $x = p > 2$ عدداً أولياً.