جامعة الملك سعود- كلية العلوم قسم الرياضيات.	امتحان نهائي ٢٠٧ ريض الفصل الثاني ١٤٣٩/١٤٤٠ هـ	يوم الاثنين ١٤٤٠/٨/١٧ هـ الزمن : ثلاث ساعات .

السؤال الأول (7) : أ) احسب قيمة النهايتين التاليتين إن وجدت :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^3-y^4} \quad ، \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^3x}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

ب) ادرس اتصال الدالة : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-2y}{x^2+y^2} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

عند النقطتين : $(0,0)$ و $(-2,1)$.

السؤال الثاني (8) : أ) برهن أن الدالة : $f(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2}$ تحقق المعادلة التالية :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$ لكل $(x,y) \neq (0,0)$.

ب) إذا كانت الدالة $z = f(x,y)$ لها مشتقات جزئية من الرتبة الأولى عند كل نقطة من مجالها وكانت $x = rcost$ و $y = rsint$ برهن صحة المعادلة التالية :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 .$$

السؤال الثالث (10) : أ) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x,y) = x\,y$ على المنطقة المغلقة والمحدودة بمنحني الدالة : $x^2+y^2 = 4$.

ب) احسب قيمة التكامل التالي :

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (1+x^2+y^2)^{1/2}\, dy\, dx .$$

السؤال الرابع (9) : أ) احسب قيمة التكامل التالي : $I = \iint_R (3x^2 + 2xy)\,dA$ ، حيث R هي المنطقة المغلقة والمحدودة بالدوال التالية : $y = x^2$ ، $y = 1$ و $x = 0$.

ب) اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية : $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ،

$\left\{(-1)^n \frac{2n-1}{3n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\left\{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\left\{\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

السؤال الخامس (6) : أ) برهن أن المتسلسلة التالية متقاربة وما هو مجموعها ؟ :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{4^n}+\frac{(-2)^n}{4^n}\right) .$$

ب) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية :

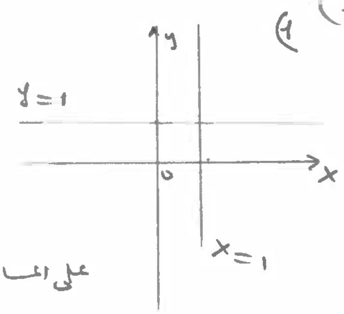
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n+4}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin(\frac{2}{n})$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n(n+1)}$.

الاختبار النهائي (٢٠٧ ريض)
الفصل الثاني ١٤٤٠هـ

السؤال الأول: أ)

١) (7) + ①

على المسار $x=1$ لدينا



①
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^3-y^4} = \lim_{y\to1} \frac{1-y^4}{1-y^4} = \lim_{y\to1} 1 = 1$$

لأن $y\to1 \Rightarrow y\neq1 \Rightarrow y^4\neq1$

على المسار $y=1$ لدينا

①
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^3-y^4} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^3-1} = \lim_{x\to1} \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

إذاً $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^3-y^4}$ غير موجودة

②
$$0 \le \frac{|x^3y+y^3x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|y||x|^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|x||y|^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |x|^3+|y|^3 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 ,$$

لأن لكل $(x,y)\neq(0,0)$ $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1 , \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$

حسب نظرية الحصر فإن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^3x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

ب) ١) على المسار $y=x$ لدينا

②
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{-x}{2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{-1}{2x} \; (\mp\infty)$$

غير موجودة

ومنه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{x^2+y^2}$ غير موجودة $\Leftarrow$

إذاً f غير متصلة عند $(0,0)$

٢) بما أن $\lim_{(x,y)\to(-2,1)} (x^2+y^2) = 4+1 = 5 \neq 0$ فإن

② نعوض مباشرة
$$\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \frac{x-2y}{x^2+y^2} = \frac{-2-2}{4+1} = \frac{-4}{5} = f(-2,1)$$

إذاً f متصلة عند $(-2,1)$

السؤال الثاني : ⑧

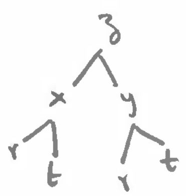
أ ④

$(x,y) \neq (0,0)$ $\qquad f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

② $f_x = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\quad f_{xx} = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ ✓

② $f_y = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\quad f_{yy} = \dfrac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ✓

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = \frac{y^2-x^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$



$z = f(x,y)$, $\quad x = r\cos t$, $\quad y = r\sin t$ $\quad r>0$ $\qquad$ ب ④

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$1\frac{1}{2}$ $\quad \boxed{\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos t + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin t}$ --- $\boxed{1}$

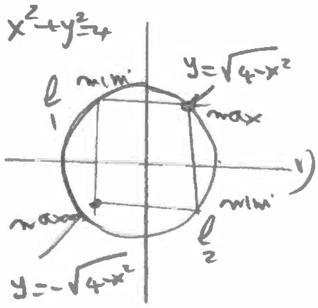
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$1\frac{1}{2}$ $\quad \boxed{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial t} = -\dfrac{\partial z}{\partial x}\sin t + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos t}$ -- $\boxed{2}$

From ① and ② $\Rightarrow$

① $\quad \boxed{\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$

السؤال الثالث : (أ)



$f(x,y) = xy$

$R = \{(x,y) ; \ x^2+y^2 \le 4\}$ $\qquad$ اجمالي (5) + (1)

1) $f_x = y = 0$, $\ f_y = x = 0 \Rightarrow (0,0)$ :: نقطة حرجة ①

$f(0,0) = 0$

٢ النصف العلوي لمحيط الدائرة

$y = \sqrt{4-x^2}$ $\qquad -2 \le x \le 2$

$h(x) = f(x, \sqrt{4-x^2}) = x\sqrt{4-x^2}$

$h'(x) = \sqrt{4-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$ $\qquad x = \mp 2$ نقاط طرفية

② $\quad h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\ \sqrt{2} = 2$, $\ h(-\sqrt{2}) = -2$

٣ المحيط (النصف السفلي للدائرة)

$h(x) = f(x, -\sqrt{4-x^2}) = -x\sqrt{4-x^2}$

$-2 \le x \le 2$

② $\quad h'(x) = -\sqrt{4-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2x^2-4}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow$

②

$f(0,0)=0$
$f(2,0)=0$
$f(-2,0)=0$
$f(\sqrt{2},\sqrt{2})=2$
$f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=2$
$f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=-2$
$f(-\sqrt{2},-\sqrt{2})=2$

[illegible]

$x = \mp\sqrt{2}, \quad x = \mp 2$

$h(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2, \quad h(-\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, +\sqrt{2}) = 2$

$h(2) = f(2, 0) = 0, \quad h(-2) = f(-2, 0) = 0$

اذاً القيمة العظمى المطلقة تحدث عند النقطتين $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ، $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

حيث $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2$ (1/2)

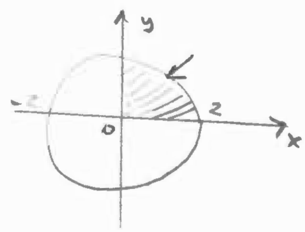
والقيمة الصغرى المطلقة تحدث عند النقطتين $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ، $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

حيث $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2$ (1/2)

ب) (5)

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (1 + x^2 + y^2)^{1/2}\, dy\, dx = \iint_R (1 + x^2 + y^2)^{1/2}\, dA$$

$R = \{(x, y) ; \ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}, \ 0 \le x \le 2\}$



(3)

$R = \{(r, \theta) ; \ 0 \le r \le 2, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (1 + r^2)^{1/2}\, r\, dr\, d\theta$$

(2)

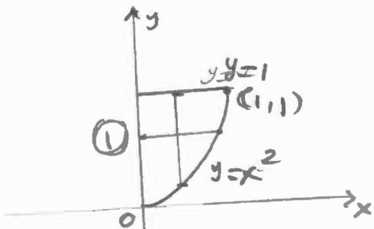
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}(1 + r^2)^{3/2}\right]_0^2 d\theta = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)}$$

السؤال الرابع: (5) (ب)

(9)

$$I = \iint_R (3x^2 + 2xy)\, dA$$



R المنطقة المغلقة المحدودة بالمعادلات $y = x^2$ ، $y = 1$ ، $x = 0$

① طريقة أولى $R = \{(x,y) ; \; x^2 \le y \le 1 , \; 0 \le x \le 1\}$

(2) $I = \int_0^1 \int_{x^2}^1 (3x^2 + 2xy)\, dy\, dx$

$= \int_0^1 [3x^2 y + x y^2]_{x^2}^{1}\, dx$

$= \int_0^1 [(3x^2 + x) - (3x^4 + x^5)]\, dx$

$= [x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{5}x^5 - \frac{x^6}{6}]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} - \frac{1}{6}$

(2) $= \frac{3}{2} - \frac{3}{5} - \frac{1}{6} = \frac{45 - 18 - 5}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$

45
23
22

طريقة ثانية

$R = \{(x,y) ; \; 0 \le x \le \sqrt{y} , \; 0 \le y \le 1\}$ ① الرسم

(2) $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} (3x^2 + 2xy)\, dx\, dy = \int_0^1 [x^3 + x^2 y]_0^{\sqrt{y}}\, dy$

(2) $= \int_0^1 (y^{3/2} + y^2)\, dy = [\frac{2}{5} y^{5/2} + \frac{1}{3} y^3]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3}$

$= \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$

(ج) (4) (1

$x \ge 1$: $y = (1 + \frac{1}{x})^x$, $\ln y = \frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x}$,

① $\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1 + 1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + 1/x} = 1 \Rightarrow \ln y \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} e$

نعم

$\boxed{\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e}$

(2 بما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3} \ne 0$ ، اذاً المتتالية $\{(-1)^n \frac{2n-1}{3n+2}\}^{\infty}$ متباعدة ①

---

(3) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $x \ge 1$, $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ $(\infty - \infty)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$

① مما سبق نستنتج أن $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ متقاربة

اذاً $\boxed{\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0}$

④

$$0 \le \left| \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{3^n} \right| \le \frac{1+\sqrt{n}}{3^n}, \quad f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{3^x}, \quad x \ge 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{3^x} = \lim \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3^x \ln 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\ln 3} \cdot \frac{1}{3^x\sqrt{x}} = 0$$

① ومنه $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{3^n} = 0$ ، وحسب نظرية الحصر فإن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{3^n} = 0$$

السؤال الخامس:

⑥ أ) ②

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right] = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots \quad \left|\frac{3}{4}\right| < 1 \text{ هندسية}$$

متقاربة

$$+ \; \frac{-1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \cdots \quad \left|\frac{-1}{2}\right| < 1 \text{ هندسية}$$

(① + ①) ②

$$= \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} + \frac{\frac{-1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} + \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$= 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

ب) ④

①

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+2} < \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

متقاربة ، $p = \frac{3}{2} > 1$

المتسلسلة متقاربة حسب اختبار المقارنة

ج)

$$\sum_{1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n}+1}{n+4}}_{a_n} \simeq \sum_{1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{b_n}$$

ونعتبر

①

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{n+4} = \lim \frac{n+\sqrt{n}}{n+4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{4}{n}} = 1 > 0$$

ولكن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة ، $p<1$ $\Leftarrow$ $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+4}$ متباعدة

د)

$$f(x) = x\sin\left(\frac{2}{x}\right), \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2/x)}{1/x} \quad \frac{0}{0}$$

①

$$= \lim \frac{-2/x^2 \cos(2/x)}{-1/x^2} = \lim 2\cos(2/x) = 2 \ne 0$$

$\sum_{1}^{\infty} n\sin\left(\frac{2}{n}\right)$ متباعدة $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{2}{n}\right) = 2 \ne 0$ طبقا

4 نستخدم اختبار النسبة او الجذر

1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+2}}{5^{n+1}\,(n+2)}}{\dfrac{2^{n+1}}{5^{n}\,(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\cancel{n+1}}\cdot 2\;\cancel{5^{n}}}{\cancel{2^{n+1}}\;\cancel{5^{n}}\cdot 5}\;\frac{n+1}{n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5}\;\frac{n+1}{n+2}=\frac{2}{5}<1$$

إذاً المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^{n}(n+1)}$ متقاربة