جامعة الملك سعود — الاختبار النهائي في المقرر 343 ريض
كلية العلوم
قسم الرياضيات — الزمن : ثلاث ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

إذا كانت $g = (g_1, g_2, g_3) \in G = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^{*} \times S_{12}$, حيث :

$$g_1 = 2 \ \ , g_2 = 5 \quad \text{وَ} \quad g_3 = \sigma = (1,,2,3,4,5,6)(6,5,4,3)(7,9,11,12)(8,10)$$

فأجب عما يلي :-

(أ) املأ الفراغات الآتية :-

$1)|g_1| = \cdots \quad 2)|g_2| = \cdots \quad 3)|\sigma| = \cdots \quad 4)|g| = \cdots \quad 5)e = \cdots$

$6)g^{-1} = \cdots \quad 7)\langle\sigma\rangle \cong \cdots \quad 8)\langle g\rangle \cong \cdots \quad 9)Aut\,(\langle g\rangle) \cong \cdots \quad 10)\sigma \ldots \mathbb{A}_{12}$

$11)\left|N_{S_{12}}(\sigma)\right| = \cdots \quad 12)\sigma$ عدد مرافقات $= C_\sigma = \cdots$

(ب) أثبت صحة أوْ خطأ كل عبارة فيما يأتي :

1) يوجد تشاكل $\varphi : S_{12} \to S_{12}$, حيث $\varphi(\alpha) = \alpha^{-1}$.
2) لا يوجد $\mu \in S_{12}$, حيث $|\mu| = 52$.
3) توجد زمرة جزئية في G رتبتها *125* .
4) إن $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^{*} \cong \mathbb{Z}_{80}$.

السؤال الثاني :

(أ) إذا عرفنا التماثل " $\cong$ " على مجموعة من الزمر M فأثبت أنها علاقة تكافؤ في M .

(ب) إذا عرفنا العلاقة " $\cong$ " على L , حيث :

$L = \{G :$ زمرة رتبتها $12\ G\}$, فجد ممثلات أصناف التكافؤ في L .

(جـ) أثبت أن $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$, وذلك بتوظيف العبارة : " أي زمرتين دائريتين منتهيتين ولهما الرتبة نفسها فهما متماثلتان " .

السؤال الثالث :

(أ) لتكن $\sigma_i \in G = S_4$ هي ممثلات أصناف الترافق في G . أجب عما يأتي :

1) أكمل الفراغات :

$$\sigma_1 = (1)\,, \sigma_2 = (1,2)\,, \sigma_3 = (\ldots)\,, \sigma_4 = (\ldots)\,, \sigma_5 = (1,2,3,4)$$

2) عيّن جميع القيم $|N_G(\sigma_i)|$ ومن ثم اكتب معادلة الفصل للزمرة G .

(ب) إذا كانت G زمرة بسيطة رتبتها *168* فأثبت أن G لا تملك زمرة جزئية H رتبتها *28* .

(جـ) وظف فقرة (ب) في اثبات أن " عكس مبرهنة لاغرانج غير صحيحة " .

السؤال الرابع :

(أ) متى نقول إن الزمرة G تؤثر على مجموعة S (${}^{G}|_{S}$) ؟

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت S زمر سيلو الجزئية من النوع P في G فأثبت أن :

1) ${}^{G}|_{S}$ بالترافق
2) $|S| = s_p \big|\, |G|$

(جـ) أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها 36 .

جامعة الملك سعود — الاختبار الفصلي الثاني في المقرر 343 ريض
كلية العلوم
قسم الرياضيات — الزمن : ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) عرف كلاً من الرمزين كمجموعة : $Aut(G)$, $\mathcal{I}(G)$.

(ب) إذا كانت G زمرة إبدالية وفيها عنصر x ليس نظيراً لنفسه وعرفنا التطبيق $T : G \to G$ كما يلي : $g\,T = g^{-1}$ **فأثبت أن :**

1) $T \in Aut(G)$.
2) $|Aut(G)| > 1$.

السؤال الثاني :

لتكن $G\,|_S$ **وَ** $K \leq G$ **, حيث :**

$$S = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$G = \mathbb{A}_4 = \{(1), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), \ldots\}$$

و K مكونة من العناصر الأربعة الأولى في G .

أجب عما يأتي :-

(أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :

1) **يوجد** $\sigma \in G$ و $\tau \in K$ بحيث $\sigma^{-1}\,\tau\,\sigma \notin K$.
2) **إذا كان** $\varphi \in K$ **فإن** $N(\varphi) = K$ (ممركز φ في K أوْ منظم φ في K) .
3) **إذا كانت** $\mu = (1,2,3)$ **فيوجد** $\propto \in G$ **بحيث :** $\propto^{-1}\mu \propto = (1,3,2)$.

(ب) أكمل عناصر G .

(ج) املأ الفراغات فيما يأتي :

1) $\mathbf{4}$ مدار $= 4G = \{\ldots \mid \ldots\} = \{\ldots\} \Rightarrow |4G| = \cdots$
2) $G_4 = \{\ldots \mid \ldots\} = \{\ldots\} \Rightarrow |G_4| = \cdots$
3) $\sigma = (1,2,3) \in G \Rightarrow S_\sigma = \{\ldots \mid \ldots\} = \{\ldots\} \Rightarrow |S_\sigma| = \cdots$
4) $x = 4 \Rightarrow [G :\ G_4] = \cdots$

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار الفصلي الأول في المقرر 343 ريض
الزمن : ساعة ونصف

<u>أجب عن الأسئلة الآتية</u>

السؤال الأول :

(أ) متى نقول إن $H \trianglelefteq G$ ؟

(ب) إذا كانت $A, B \trianglelefteq G$ فأثبت أن $AB \trianglelefteq G$ إذا علمت أن : $AB \leq G$

السؤال الثاني :

لتكن $G = GL(2, \mathbb{Z}_P)$ وليكن $\varphi : G \to \mathbb{Z}_P^*$ **تطبيقاً , حيث $\varphi(A) = det\, A = |A|$**

أجب عما يلي :

(أ) أثبت أن φ تشاكل .

(ب) أكمل الفراغات الآتية :

1) $\mathbb{Z}_P^* = \cdots$
2) $(G,\cdot) = (\left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \dots\dots\dots..\right.$
3) φ نواة $= K_\varphi = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots..\}$

(ج) بفرض أن $P = 3$ وَ $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in G$ **املأ الفراغات :**

1) $\mathbb{Z}_3 = \cdots$
2) $|\langle M \rangle| = \cdots$

السؤال الثالث :

أثبت صحة أوْ خطأ كل مما يلي :

(أ) يوجد عنصران مختلفان في G كل منهما نظير نفسه , حيث $|G| > 1$.

(ب) توجد زمرة G وَ $H, K \leq G$ بحيث :

$$|G| = 24 \text{ وَ } |H| = 6 \text{ وَ } |K| = 8 \text{ وَ } |H \cap K| = 3$$

إجابة السؤال الأول :

(أ) :

$1)|g_1| = 4 \quad 2)|g_2| = 5 \quad 3)|\sigma| = 12 \quad 4)|g| = 60 \quad 5)e = (0, 1, (1))$

$6)g^{-1} = \left(6, 9, \sigma^{-1} = (1,6,2)(7,12,11,9)(8,10)\underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\right) \quad 7)\langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}_{12}$

$8)\langle g\rangle \cong \mathbb{Z}_{60} \quad 9)Aut\ (\langle g\rangle) \cong U_{60} \quad 10)\sigma \in \mathbb{A}_{12}$

$11)\left|N_{S_{12}}(\sigma)\right| = 2^4 \cdot 3^2$

$12)\sigma$ عدد مرافقات $= C_\sigma = \dfrac{12!}{2^4 . 3^2} = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 3326400$

(ب) :

1) **خطأ لآنه :**

$\forall \propto, \beta \in S_{12}:\ \varphi(\propto \beta) = (\propto \beta)^{-1} = \beta^{-1} \propto^{-1} \neq \varphi(\propto)\varphi(\beta)$.

2) **صائب , لأن :**

$|\mu| = 52 = 4 \cdot 13 \nmid |S_{12}| = (12)!$.

3) **صائب , لأن :**

$125 = 5^3 \big| |G|$ **وهي زمرة سيلو من النوع** *5* .

4) **عبارة خاطئة , لأن :**

$\mathbb{Z}_{80}$ زمر دائرية في حين أن $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^*$ ليست دائرية .

إجابة السؤال الثاني :

(أ) :

بفرض $M = \{G :$ زمرة $G\}$ **وتعريف** " $\cong$ " **على** M **نجد أن :**

1) $\cong$ **انعكاسية لأن :** $\forall\, G \in M:\ \exists\, G \xrightarrow{I} G \Leftrightarrow G \cong G$

2) $\cong$ **تناظرية لأن :** $G_1, G_2 \in M \ni G_1 \cong G_2 \Rightarrow \exists G_1 \xrightarrow{\varphi\ \text{تماثل}} G_2 \Rightarrow \exists G_2 \xrightarrow{\varphi^{-1}\ \text{تماثل}} G_1 \Rightarrow G_2 \cong G_1$

3) $\cong$ **متعدية لأن :**

$G_1, G_2, G_3 \in M \ni G_1 \cong G_2 \wedge G_2 \cong G_3 \Rightarrow \exists G_1 \xrightarrow{\varphi_1\ \text{تماثل}} G_2 \wedge G_2 \xrightarrow{\varphi_2\ \text{تماثل}} G_3 \Rightarrow \exists G_1 \xrightarrow{\varphi_2\varphi_1\ \text{تماثل}} G_3 \Rightarrow G_1 \cong G_3$

ومن (1) و (2) و (3) تكون " $\cong$ " **علاقة تكافؤ في** M

(ب) :

$L = \{G :\ |G| = 12\}$ **و** $\cong$ **معرفة على** L **فهي إذن علاقة تكافؤ في** L

وتكون ممثلات أصناف التكافؤ هي :

(1 $\mathbb{Z}_{12}$ **(2** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ **(3** D_6 **(4** $\mathbb{A}_4$

(5 $T = \langle x, y : x^3 = y^4 = e \ \wedge\ y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$

(ج) : بما أن $\langle(1 + n\mathbb{Z})\rangle \cong \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ **, حيث** $|(1 + n\mathbb{Z})| = n$ فإنها تماثل $\mathbb{Z}_n$.

إجابة السؤال الثالث :

(أ) :

1) $\sigma_3 = (1,2)(3,4)\ , \sigma_4 = (1,2,3)$

2) $|N_G(\sigma_1)| = |G|\ , |N_G(\sigma_2)| = 4\ \ , |N_G(\sigma_3)| = 8\ , |N_G(\sigma_4)| = 3\ , |N_G(\sigma_5)| = 4$

مما سبق نجد أن معادلة الفصل لـ G هي :

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{|G|}{|N(\sigma_i)|} = 1 + 6 + 3 + 8 + 6 = 24 = |G| = |S_4|$$

(ب) : بفرض أن $H < G$ بحيث $|H| = 28$ فإن :

$$H < G \Rightarrow \exists\ S = \{Hx \mid x \in G\} \ni |S| = [H : G] = \frac{168}{28} = 6 \Rightarrow \exists\ A(S) \ni |A(S)| = 6!$$

ولما كانت $|G| \nmid 6!$ فإنه باستخدام اختبار الدليل نجد أن G تملك زمرة جزئية فعلية ناظمية غير تافهة محتواة في H .
وهذا تناقض مع المعطيات لا مخرج منه إلا بالتسليم بأن G لا تملك زمرة جزئية H رتبتها 28 .
(ج) إن عكس مبرهنة لاغرانج غير صحيح , لأنه من الفقرة (ب) $28\,||G|$ في حين لا توجد زمرة جزئية في G رتبتها 28.

إجابة السؤال الرابع :

(أ) : تطبيق $G|_S \Leftrightarrow \exists * : S \times G \to S$ بحيث :

1) $xe = x, \forall x \in S \wedge e \in G$
2) $x(gh) = (xg)h, \forall\ x \in S \quad \wedge \quad g, h \in G$

(ب) :

1) $G|_S$ **بالترافق , حيث :** $(H, g) *= H * g = g^{-1}Hg$ **: لأن**

1) $He = e^{-1}He = H, \forall\ H \in S \quad \wedge \quad e \in G$
2) $H(g_1g_2) = (g_1g_2)^{-1}H(g_1g_2) = g_2^{-1}(g_1^{-1}Hg_1)g_2 = g_2^{-1}(Hg_1)g_2$
$= (Hg_1)g_2\ , \forall\ H \in S\ \wedge\ g_1\ , g_2 \in G$

2) **إذا كانت $G|_S$ بالترافق فمن مبرهنة سيلو الثانية تكون جميع زمر سيلو الجزئية من النوع P مترافقة في G**
وهذا يعني وجود مدار واحد فقط تحت تأثير G على S , أي أنه :

$H \in S \Rightarrow H$ طول مدار $= |S| = s_P = [G : G_H] = [G : N_G(H)]$ **(مبرهنة)**
$\Rightarrow |S| = s_P\,||G|$ **⟵ مبرهنة لاغرانج**

(ج) : $|G| = 36 = 2^2 \cdot 3^2$
من مبرهنة سيلو الأولى توجد زمرة سيلو جزئية H في G من النوع 3 رتبتها 9

$$H < G \ni |H| = 9 \Rightarrow \exists\ S = \{Hx | x \in G\} \ni |S| = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow \exists\ A(S) \ni |A(S)| = 4! = 24$$

ولما كانت $24 \nmid 36 = |G|$. فمن مبرهنة "اختبار الدليل" توجد زمرة جزئية فعلية ناظمية غير تافهة في G ومحتواة في H وعليه تكون G غير بسيطة .

إجابة أسئلة الاختبار الفصلي الثاني في المقرر 343 ريض

إجابة السؤال الأول :

(أ) : $Aut\ (G) = \left\{ T : G \xrightarrow[]{T\ \text{تماثل}} G \right\}$, $\mathcal{I}(G) = \{ T_g \in Aut(G) : g \in G \}$

(ب) :

1) إن $T \in Aut(G)$, لأن :

$$y \in G \Rightarrow \exists\ x = y^{-1} \in G \ni x\,T = x^{-1} = \left(y^{-1}\right)^{-1} = y$$

إذن T غامر

$$x\,,y \in G \ni x\,T = y\,T \Rightarrow x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y$$

إذن T متباين

لأن G إبدالية — $\forall\ x\,,y \in G : x\,y\,T = (xy)^{-1} = y^{-1}\,x^{-1} = x^{-1}\,y^{-1} = x\,T\,y\,T$

إذن T تشاكل .

مما سبق نجد أن $T \in Aut(G)$.

2) بما أنه يوجد $x \in G$ بحيث $x^{-1} \neq$ x فإن :

$$x\,T = x^{-1} \neq x = x\,I \ \Rightarrow T \neq I \Rightarrow |Aut(G)| > 1$$

إجابة السؤال الثاني :

لتكن G تؤثر على S و $K \leq G$, حيث $G = \mathbb{A}_4$ و$S = \{1,2,3,4\}$ و عناصر K هي (1) و (1,2)(3,4) ومرافقاتها .

(أ) :

1) عبارة خاطئة , لأن $K \lhd G$ ، ولذا فإن $\sigma^{-1}\tau\,\sigma \in K$ لكل $\sigma \in G$ و $\tau \in K$.

2) عبارة صائبة , لأن K زمرة إبدالية , لذا فإن $N_K(\varphi) = K$ لكل $\varphi \in K$.

3) عبارة خاطئة ’ لأن $(1,2,3) \propto = (1,3,2)$ $\propto^{-1}$ لا يتحقق إلا إذا كان التفريق الدوري للعنصر $\propto$ هو $\{1,1,2\}$ وهذا يعني أن $\propto \notin G$.

(ب) : (2,3,4) , (2,4,3) , (1,4,3) .

(ج) :

1) $4\ \text{مدار} = 4G = \{4\sigma | \sigma \in G\} = \{1,2,3,4\} \Rightarrow |4G| = 4$

2) $G_4 = \{\sigma \in G | 4\sigma = 4\} = \{(1),(1,2,3),(1,3,2)\} \Rightarrow |G_4| = 3$

3) $\sigma = (1,2,3) \in G \Rightarrow S_\sigma = \{x \in S | x\,\sigma = x\} = \{4\} \Rightarrow |S_\sigma| = 1$

4) $x = 4 \Rightarrow [G : G_4] = \frac{12}{3} = 4$

إجابة أسئلة الاختبار الفصلي الأول في المقرر 343 ريض

إجابة السؤال الأول :

(أ) : نقول إن $H \trianglelefteq G$ إذا كانت $H \leq G$ تحقق الشرط :

$$g^{-1}h\,g \in H \,, \forall\, g \in G \wedge h \in H$$

(ب) : لنبرهن أن :

$$A, B \trianglelefteq G \;\; \wedge \;\; AB \leq G \Rightarrow AB \trianglelefteq G$$

كما يلي :

$$\forall\, g \in G \;\wedge\; ab \in AB :\; g^{-1}abg = g^{-1}aebg \qquad (\text{خاصة } e)$$
$$= g^{-1}agg^{-1}bg \qquad (e = gg^{-1} \text{لأن})$$
$$= (g^{-1}ag)(g^{-1}bg) \qquad (\text{خاصة التجميع})$$

ولما كانت كل من A و B ناظمية في G فإن $g^{-1}ag \in A$ و $g^{-1}bg \in B$

ومنه نستنتج أن $(g^{-1}ag)(g^{-1}bg) \in AB$.

لذا فإن $AB \trianglelefteq G$.

إجابة السؤال الثاني :

ليكن $\varphi : \left(G = GL(2, \mathbb{Z}_P)\right) \to \mathbb{Z}_P^*$ تطبيقاً , حيث $\varphi(A) = det\, A$.

(أ) : φ تشاكل , لأنه

$$\forall\, A, B \in G :\; \varphi\,(AB) = det\, AB$$
$$= det\, A\;\, det\, B \;\text{——}\; (\text{مبرهنة})$$
$$= \varphi(A)\, \varphi(B)$$

(ب) :

4) $\mathbb{Z}_P^* = \{1, 2, 3, \dots, P-1\}$

5) $(G, \cdot) = \left(\left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_P \wedge\, det\, A \neq 0\right\}, \;\cdot\right)$

6) φ نواة $= K_\varphi = \left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G :\; \varphi(A) = det\, A = 1\right\}$

(ج) :

3) $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

4) $|\langle \mathrm{M} \rangle| = 2$

إجابة السؤال الثالث :

(أ) : عبارة خاطئة , فمثلاً عندما $G = \mathbb{Z}_5$ فلا يوجد فيها أي عنصرين مختلفين بحيث يكون كل منهما نظير نفسه .

(ب) : عبارة خاطئة , لأن $H \cap K \leq K$ لذا فيجب أن يكون $|H \cap K| \,\big|\, |\mathrm{K}|$ ولكن $|K| = 8 \nmid |H \cap K| = 3$.
