جامعة الملك سعود

كلية العلـــــــــوم

قسم الرياضيـــــات

تمارين 151 ريض

نظرية الرسومات

GRAPH THEORY

(4-2)

(الرسومات المتماثلة)

ISOMORPHIC GRAPHS

إعداد : مالك عبدالرحمن زين العابدين

1439 هـ

2018

الرسومات المتماثلة
ISOMORPHIC GRAPHS

تعريف

لـــيكن $G=(V(G),E(G))$ و $H=(V(H),E(H))$ رسمين بسيطين، وليكن $f:V(G)\to V(H)$ تطبيقاً . نقول إن f تماثل من G إلى H إذا تحقق التالي:

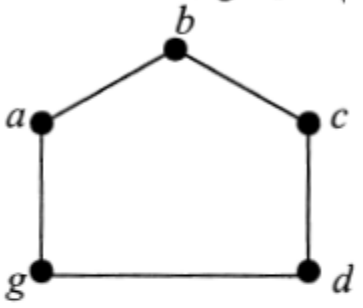
(أ) f تطبيق متباين وشامل (أي f تقابل).

(ب) لكـــل $x,y\in V(G)$ فـــإن $\{x,y\}\in E(G)$ إذا وفقـــط إذا كـــان $\{f(x),f(y)\}\in E(H)$.

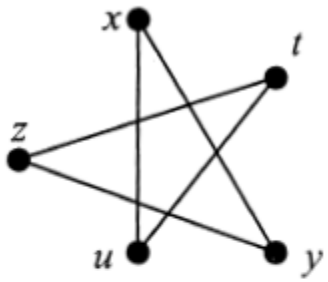
في هذه الحالة نقول إن G و H متماثلان ونكتب $G\cong H$.

مثال

بيّن ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا وعلل إجابتك:



G



H

الحل

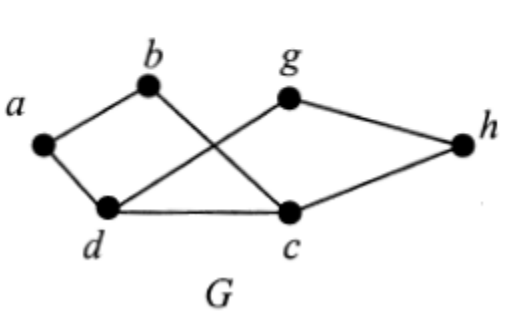
نعرف التطبيق $f:V(G)\to V(H)$ كما يلي:

v	a	b	c	d	g
$f(v)$	x	y	z	t	u

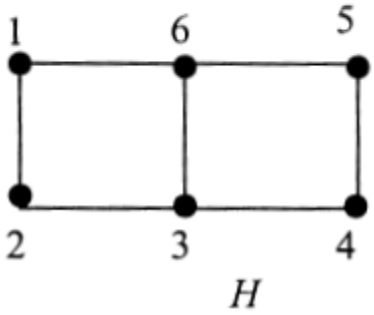
يســـتطيع القـــارئ أن يـــرى بسهولة أن f تماثل من G إلى H وبالتالي، فإن $G\cong H$ □

مثال

بيّن ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا وعلل إجابتك.



G



H

الحل

نعرف التطبيق $f: V(G) \to V(H)$ كما يلي:

x	a	b	c	d	g	h
$f(x)$	2	1	6	3	4	5

واضح أن f تماثل من G إلى H وبالتالي فإن $G \cong H$ □

مبرهنة

ليكن $f: V(G) \to V(H)$ تماثلاً من الرسم البسيط G إلى الرسم البسيط H.

عندئذ :

(أ) $|V(G)| = |V(H)|$ و $|E(G)| = |E(H)|$.

(ب) $\deg f(x) = \deg x$ لكل $x \in V(G)$.

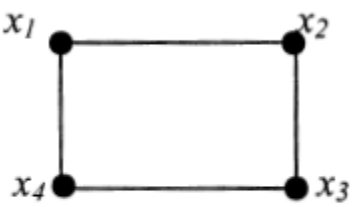
(ج) عدد الرؤوس التي درجة كل منها m في G يساوي عدد الرؤوس التي درجة كل منها m في H .

(د) عدد الدورات التي طول كل منها l في G يساوي عدد الدورات التي طول كل منها l في H .

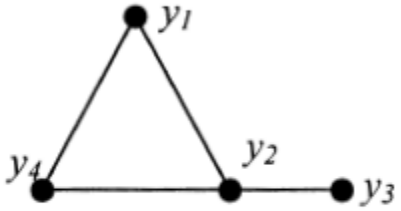
(هـ) عدد مركبات الرسم G يساوي عدد مركبات الرسم H .

مثال

بيّن ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا وعلل إجابتك:



G



H

الحل

G لا يماثل H، لأن $\deg y_2 = 3$ بينما لا يوجد رأس في G درجته 3 □

مثال

جـــد جميع الرسومـــات ثنائية التجزئة التامة غير المتماثلة التي عدد رؤوس كل منها 6 .

الحل

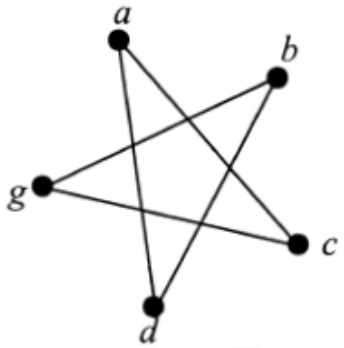
عدد رؤوس الرسم $K_{m,n}$ يساوي $m+n$. إذن، $m+n=6$. وبالتالي فإن الرسوم المطلوبة هي: $K_{1,5}$ ، $K_{2,4}$ ، $K_{3,3}$ □

تعريف

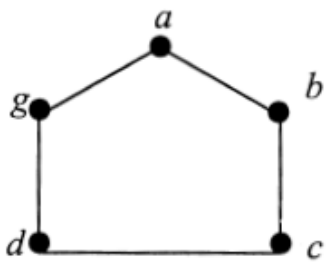
ليكن $G=(V,E)$ رسماً بسيطاً. يعرف متمم G *(complement of G)* على أنه الرسم $\overline{G}=(V,\overline{E})$ حيث لكل $x,y \in V$، $x \neq y$ فإن:

$\{x,y\} \in \overline{E}$ إذا وفقط إذا كان $\{x,y\} \notin E$.

مثال : الشكل أدناه يبين الرسم G ومتممه $\overline{G}$.



$\overline{G}$



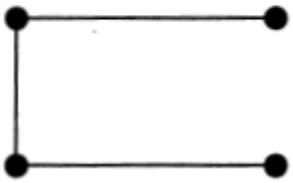
G

تعريف

نقول إن الرسم البسيط G ذاتي التتميم *(self-complementary)* إذا كان $G \cong \overline{G}$.

مثال

الرسم G المبين في الشكل التالي ذاتي التتميم.

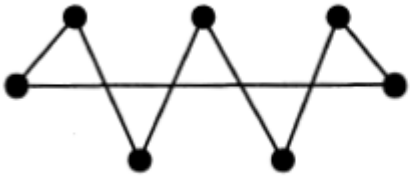


تمارين

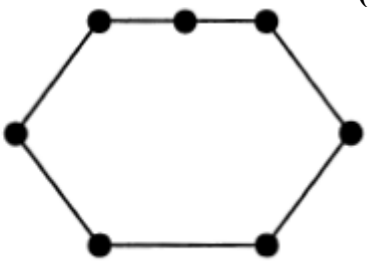
س1: في التمارين من (1) إلى (33)، بيّن ما إذا كان الرسمان المعطيان متماثلين أم لا و علل إجابتك .

Q.Show that the graphs $G = (V, E)$ and $H = (W, F)$, displayed in the Figure, are isomorphic.

(1)



G

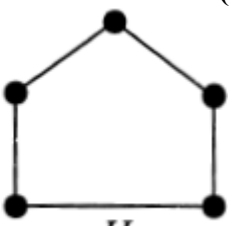


H

---

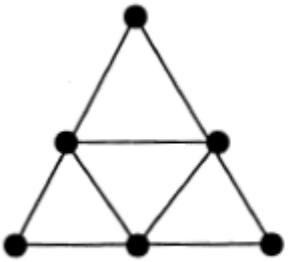
(2)

G

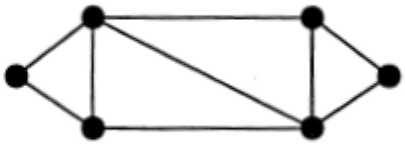


H

(3)



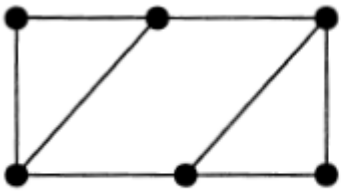
G



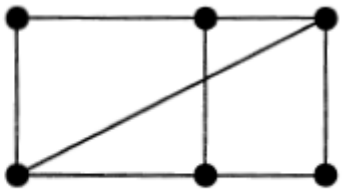
H

---

(4)



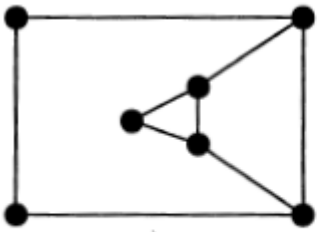
G



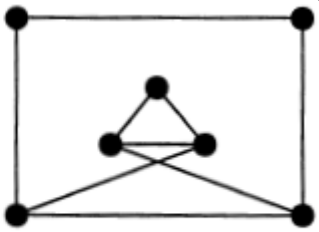
H

---

(5)



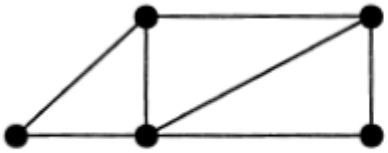
G



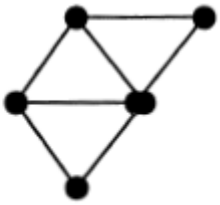
H

---

(6)

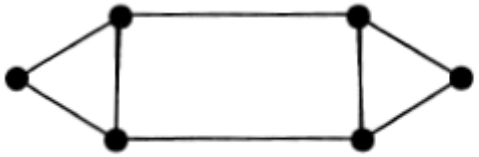


G

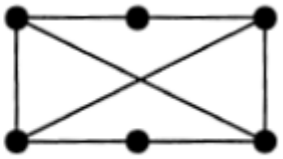


H

(7)



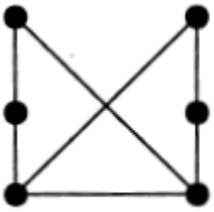
G



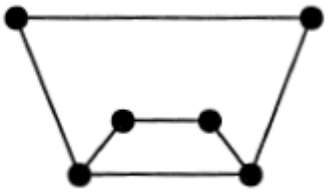
H

---

(8)



G

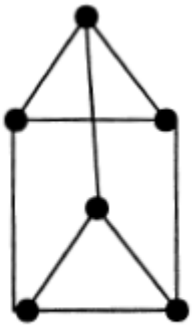


H

---

(9)

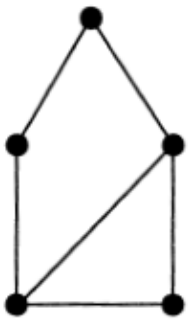
G



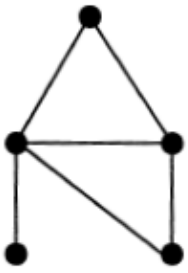
H

---

(10)



G

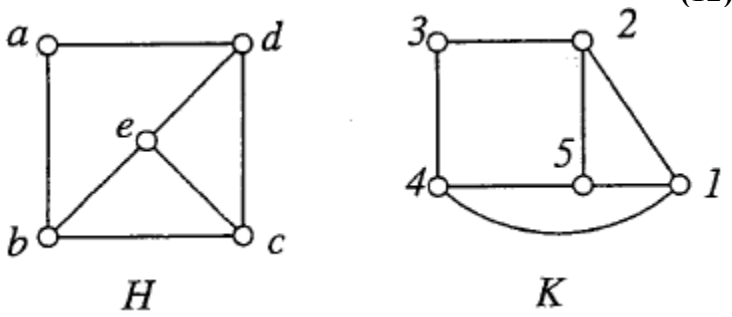


H

(11)

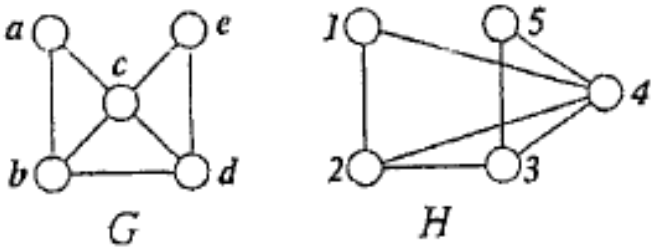
---

(12)



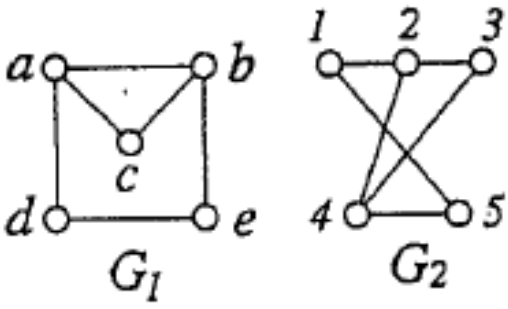
---

(13)



---

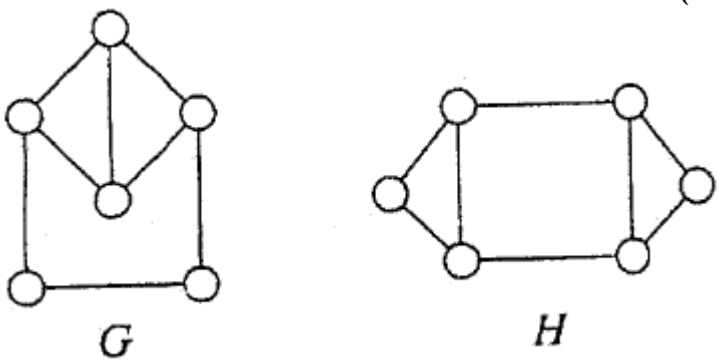
(14)



(15)

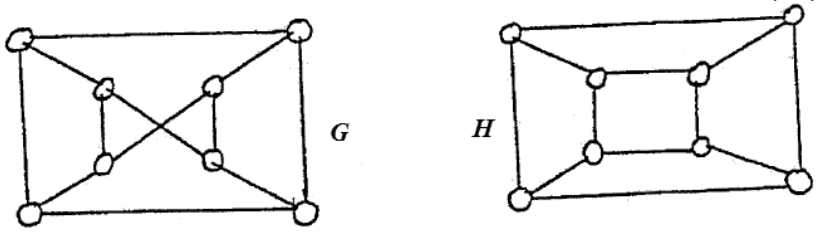
---

(16)



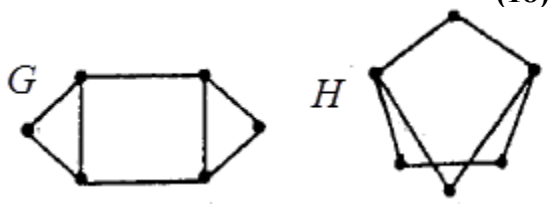
---

(17)

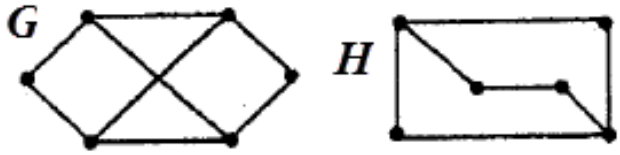


---

(18)



(19)

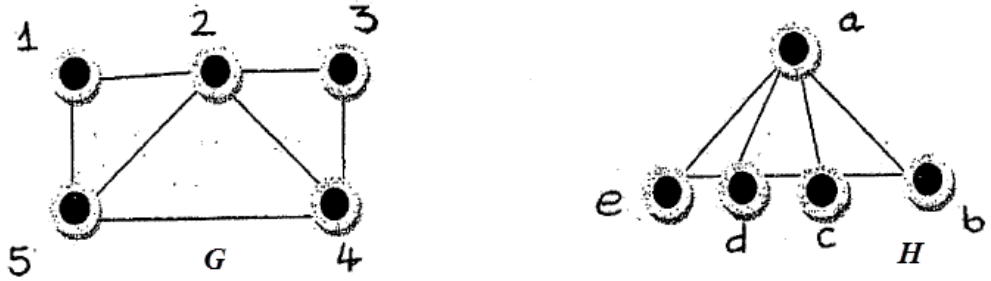


---

(20)

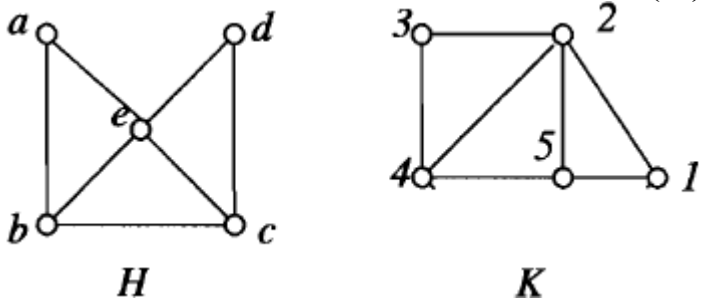
---

(21)

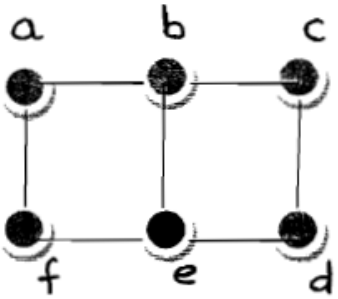


---

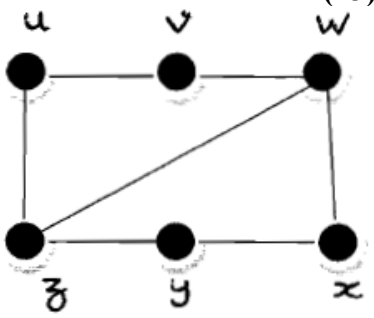
(22)



(23)



H

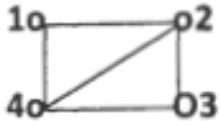


K

---

(24)

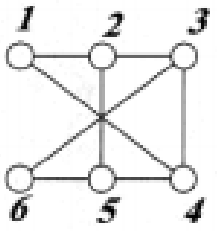
G



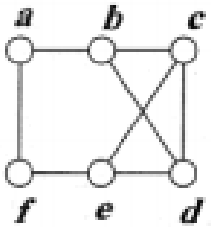
H

---

(25)



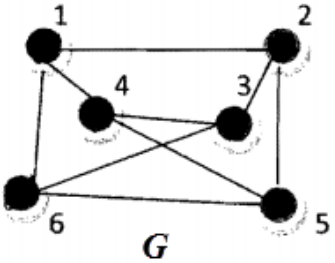
K



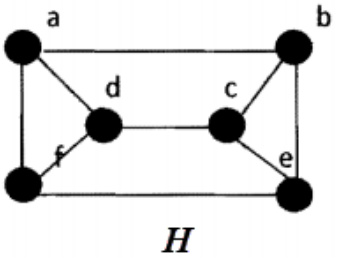
L

---

(26)

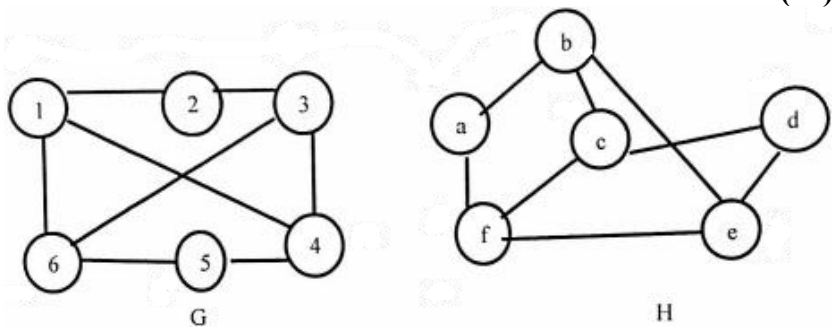


G



H

(27)

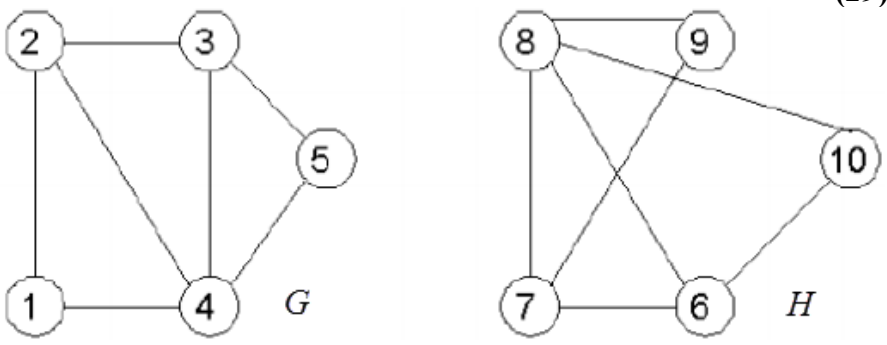


---

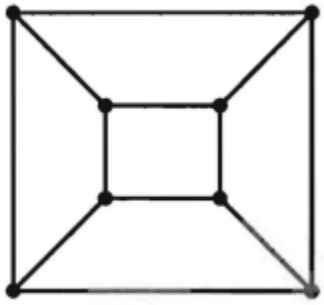
(28)

---

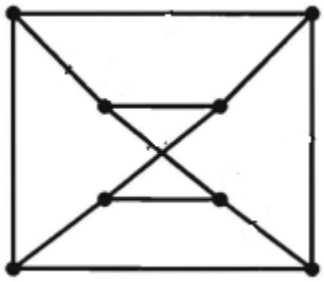
(29)



(30)



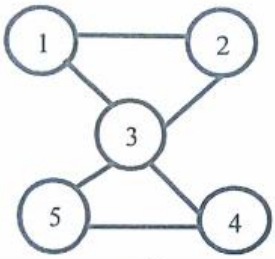
G



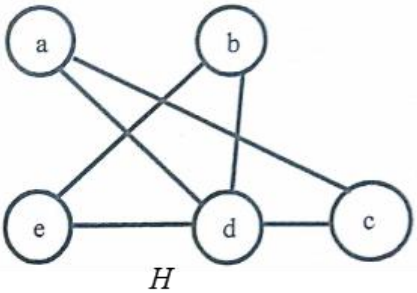
H

---

(31)



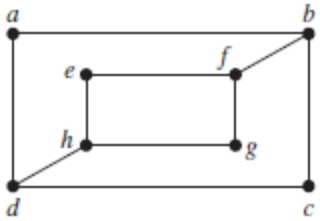
G



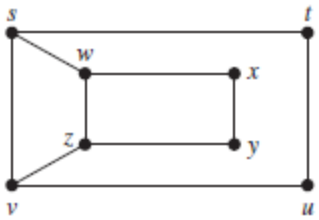
H

---

(32)



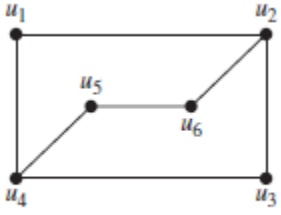
G



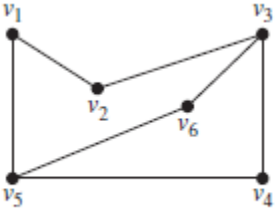
H

---

(33)



G



H

س2 : عين جميع الرسومات الثنائية التجزئة التامة غير المتماثلة و التي عدد رؤوس كل منها 7 ؟

Q. List all ***nonisomorphic*** complete bipartite graphs with 7 total vertices ?

س3 : إذا كان G رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n فأثبت أن $|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2}$

س4: عين جميع الرسومات البسيطة ذاتية التتميم التي عدد رؤوس كل منها 5 .

Q.Set all simple self complementary graphs with 5 vertices

س5: عين جميع الرسومات البسيطة غير المتماثلة التي عدد رؤوس كل منها 5 و عد أضلاع كل منها 3 .

Q. . List all ***nonisomorphic*** simple graphs with 5 vertices and 3 edges ?

س6: إذا كان G رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n و عدد أضلاعه 56 و كان عدد أضلاع $\overline{G}$ هو 80 فاحسب n .

Q.Let G Be a simple graph with n vertices and 56 edges. If $\overline{G}$ have 80 edges , find the value of n ?

س7: جد مع التعليل عدد أضلاع الرسم المتمم للرسم $K_{10,14}$.

Q. Find the number of edges for the complementary graph of $K_{10,14}$. Explain the answer?

س8: عين جميع الرسومات البسيطة غير المتماثلة التي عدد رؤوس كل منها 4 و عد أضلاع كل منها 3 .

Q. List all ***nonisomorphic*** simple graphs with 4 vertices and 3 edges ?

س9: هل يوجد رسم G له 7 أضلاع و يحقق $G \cong \overline{G}$ ؟ وضّح إجابتك .

Q.Is there exist a graph G with 7 edges satisfies $G \cong \overline{G}$? *explain the answer.*

س10: إذا كان G رسماً بسيطاً درجات رؤوسه 2,2,2,3,3,4 فأوجد عدد أضلاع $\overline{G}$ (الرسم المتمم) .

Q.Let G be a graph with the degree sequence 2,2,2,3,3,4.Find the number of edges of $\overline{G}$?

س11: إذا كان G رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n و عدد أضلاعه 5، فجد ضعف عدد أضلاع الرسم المتمم $\overline{G}$.

Q. Let G be a graph with n vertices and 5 edges, find the double edges of $\overline{G}$?

س12: إذا كان G رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n و عدد أضلاعه 36 . جد n إذا علمت أن عدد أضلاع الرسم المتمم $\overline{G}$ يساوي 42 .

Q. Let G be a graph with n vertices an 36 edges. Find value of n if $\overline{G}$ have 42 edges ?

س13: إذا كان G رسماً بسيطاً منتظماً من النوع r و عدد رؤوسه n . أثبت أن الرسم المتمم $\overline{G}$ منتظم أيضاً و احسب عدد أضلاعه ؟

Q. Let G be a simple regular graph of r degree and n vertices . Show that $\overline{G}$ is a regular, and find the number of edges?

س14: إذا كان G رسماً عدد رؤوسه 6 و عدد أضلاعه 7 . هل G ذاتي التتميم؟ علل إجابتك .

Q. Let G be a graph with 6 vertices and 7 edges . Decide whethere G is self complementary ? Explain the answer?

س15: جد عدد أضلاع الرسم المتمم للرسم $K_{4,7}$ ؟

Q. Find the number of edges of the complementary of $K_{4,7}$?

س16: إذا كانت المصفوفة التالية هي مصفوفة التجاور للرسم G ، فبيّن فيما إذا كان G ذاتي التتميم .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

س17: أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم $\overline{K_{7,13}}$ للرسم $K_{7,13}$.

Q. Find the number of edges of $\overline{K_{7,13}}$ (the complementary graph of $K_{7,13}$)

س18: أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم للرسم $K_{12,8}$ ثم بين فيما إذا كان الرسم $K_{12,8}$ ذاتي التتميم .

Q. Find the number of edges of the complementary graph of $K_{12,8}$? Decide whether $K_{12,8}$ is self complementary?

س19:

إذا كان للرسم G مصفوفة التجاور $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ فإن عدد أضلاع G يساوي:

(مع التعليل)

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

س20:

إذا كان G رسما منتظما من النوع 4 و عدد رؤوسه 8فإن متمم $\bar{G}$ هو رسم بسيط منتظم من النوع:

أ) 2 ب) 3 ج) 4 د) 5. (مع التعليل)

س21: ليكن L الرسم الممثل بمصفوفة الوقوع المبينة :

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(أ) أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم $\bar{L}$ للرسم L ؟

(ب) بين فيما إذا كان الرسم L ذاتي التتميم . و لماذا ؟

س22: ليكن G رسماً بسيطاً ممثلاً بمصفوفة التجاور المقابلة :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) ارسم $\overline{G}$ (الرسم المتمم للرسم G)

(ii) بين فيما إذا كان الرسم G ذاتي التمميم أم لا ؟