مع الإجابة الكاملة

جامعة الملك سعود King Saud University كلية العلوم - قسم الرياضيات الفصل الدراسي الأول 1443 هـ	الاختبار النهائي للمقرر 225 ريض يوم الإثنين 23/ 5/ 1443 المدة: ثلاث ساعات

السؤال الأول : [10= 2+3+5]

الجزء الأول:

أ) اختر الجواب الصحيح في كل من الأسئلة التالية:

1) إذا كانت المعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$ لها حل $y_1=1$ فإن الحل الثاني هو:

أ) $y=e^{-x}$.   ب) $y=\ e^{x}$.

ج) $y=x$.   د) لا شيء مما ذكر.

---

2) النقاط الشاذة للمعادلة التفاضلية $(9-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+2y=0$ هي:

أ) $x=0$.   ب) $x=-3\,, x=3$.

ج) $x=0\,, x=-3\,, x=3$.   د) لاشي مما ذكر.

---

3) إذا كانت المعادلة المساعدة للمعادلة التفاضلية المتجانسة هي:

$(m-3)(m+2)^2(m^2+4m+5)=0$ فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

أ) $y=\ c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}+e^{-2x}[c_4\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+c_5\sin\left(\frac{1}{2}x\right)]$.

ب) $y=\ c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}+c_4cos\left(\frac{1}{2}x\right)+c_5sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

ج) $y=\ c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}+e^{-2x}[c_4cos(x)+c_5sin(x)]$.

د) لا شي مما ذكر.

---

4) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^2+b^2}\right)$ تساوي

أ) $e^{at}\sin(bt)$.

ب) $\frac{1}{b}e^{at}\sin(bt)$.

ج) $\frac{1}{b}e^{at}\cos(bt)$.

د) لا شي مما ذكر.

---

5) إن الحل $x^2+y^2=c^2$ للمعادلة التفاضلية $ydy=-xdx$ هو

أ) حل مباشر(ظاهر)

ب) حل غير مباشر (حل ضمني).

ج) لا شي مما ذكر.

(الجزء الثاني) : بدون إيجاد الحلول. أوجد تصنيف المعادلات التفاضلية التالية: خطية، تامة، متجانسة أو بيرنولي:

1) . $y'=\frac{3x^2+4x-4}{2y-4}$.

2) $2xy-9x^2+(2y+x^2+1)\frac{dy}{dx}=0$.

3). $y'=5y+e^{-2x}y^{-2}$.

الجزء الثالث : أوجد أكبر منطقة في المستوي xy بحيث يكون للمعادلة التفاضلية

$\frac{dy}{dx}=x-\sqrt{y-2}$ ، $y(-1)=4$ حل وحيد.

السؤال الثاني : [3+4 =7]

أ) أوجد المسارات المتعامدة لمجموعة المنحنيات التالية: $cx^2-y^2=1$. ، حيث c ثابت اختياري. 3

ب) أوجد الحل لمعادلة تفاضلية ليست تامة

$(x^2-y^2+x)dx+2xydy=0$ ، $x>0$ و $y>0$ وذلك باستخدام عامل التكميل. 4

السؤال الثالث : [3+(4+2) =9]

أ) أوجد حل المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

1) $y''-6y'-2y=0$

2) $\begin{cases} x^2y''-xy'+y=2x \\ y(1)=0\ ,\ \ y'(1)=0 \end{cases}$ ، حيث $x>0$.

ب) أوجد **<u>فقط شكل الحل الخاص</u>** للمعادلة التفاضلية التالية:

$$. y''' - 4y'' + 4y' = 5x^2 - 6x + 4x^2e^{2x} + 3e^{-2x}$$

<u>السؤال الرابع:</u> [7=4+3]

أ) أوجد حل جملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

7

$$3 \quad . \begin{cases} x'(t) = -3x + 4y \\ y'(t) = -2x + 3y \\ x(0) = -1 \ , \ y(0) = 3 \end{cases}$$

ب) باستخدام طريقة المتسلسلات أوجد حل المسألة التفاضلية التالية:

4 حيث ، $x = 1$ حول النقطة العادية $y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$

$y(1) = 0$ و $y'(1) = 1$.

<u>السؤال الخامس:</u> [7= 5+2]

أ) أوجد $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{s^2-3s+2}\right)$.

ب) باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل المسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \end{cases}.$$ (ارشاد: استخدم الفقرة أ)).

إجابة الاختبار النهائي مقرر (٢٠٥ ريض) رياضيات
الفصل الأول عام ١٤٤٢هـ (٢٠٢١)

السؤال الأول

الجزء الأول (الأسئلة الاختيارية) 15

① الإجابة الصحيحة (ج) $y = e^x$ ①

② 〃 〃 (ب) $x = -3 \ , \ x = 3$ ①

③ 〃 〃 (د) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x} + e^{-2x}(c_4 \cos x + c_5 \sin(x))$ ①

④ 〃 〃 (ب) $\frac{1}{b} e^{at} \sin(bt)$ ①

⑤ 〃 〃 (ب) حل غير مباشر (حل ضمني) ①

الجزء الثاني

1) فصل متغيرات ①　　2) تامة ①　　3) بيرنولي ①

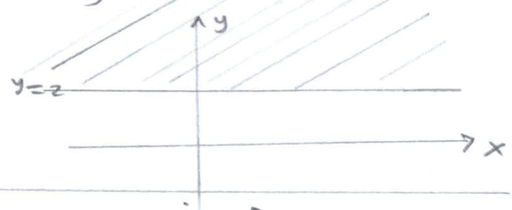
الجزء الثالث:

$$\begin{cases} y' = x - \sqrt{y-2} = f(x,y) \\ y(-1) = 4 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y-2}}$$

الـ f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ متصلتان على المنطقة

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ y > 2\}$$ ②



السؤال الثاني:

أ)

$$cx^2 - y^2 = 1$$

$$2cx - 2yy' = 0 \ , \ cx = yy'$$

$$cx^2 - y^2 = cx \cdot x - y^2 = yy'x - y^2 = 1 \ , \ yy'x = y^2 + 1$$

① $$y' = \frac{y^2+1}{xy} = h(x,y) \ , \ x \neq 0, \ y \neq 0$$

ب) لنوجد المسارات المتعامدة:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-1}{h(x,y)} = \frac{-xy}{y^2+1} \ ,$$

$$\frac{y^2+1}{y} dy = -x\,dx \Rightarrow \left(y + \frac{1}{y}\right) dy = -x\,dx$$

$$\ln|y| + \frac{1}{2} y^2 = \frac{-x^2}{2} + c$$

$$2\ln|y| + y^2 = -x^2 + 2C \ , \ \boxed{\ln y^2 + y^2 + x^2 = c_1}$$ ②

وهي مجموعة المسارات المتعامدة المطلوبة

(ب)

$$\overbrace{(x^2-y^2+x)}^{M}\,dx+\overbrace{2xy}^{N}\,dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=2y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-4y}{2xy}=\frac{-2}{x},\quad \mu(x)=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=e^{\ln x^{-2}}=\frac{1}{x^2}$$ 1

$$\frac{1}{x^2}(x^2-y^2+x)dx+\frac{1}{x^2}2xy\,dy=0$$

ينتج $$\underbrace{\left(1-\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}_{M}dx+\underbrace{\frac{2y}{x}}_{N}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-2y}{x^2}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

لذا توجد دالة F ع x و y بحيث يكون

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1-\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{x}=M,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{x}$$

2

$$F(x,y)=\int\frac{2y}{x}dy=\frac{y^2}{x}+\phi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{-y^2}{x^2}+\phi'(x)=1-\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{x}\Rightarrow \phi(x)=x+\ln x+c$$

ومنه يكون حل المعادلة معطى بالعلاقة التالية

2

$$F(x,y)=\boxed{\frac{y^2}{x}+x+\ln x+c=0}$$

السؤال الثالث: (أ)

9

1

3

$$y''-6y'-2y=0\Rightarrow m^2-6m-2=0$$

$$(m-3)^2-9-2=0\quad (m-3)^2=11,\quad m=3\mp\sqrt{11}$$

$$\boxed{y_c=c_1e^{(3+\sqrt{11})x}+c_2e^{(3-\sqrt{11})x}}$$

2

$$\begin{cases}x^2y''-xy'+y=2x\\ y(1)=0,\quad y'(1)=0\end{cases}\qquad y=x^m$$

1) $m(m-1)-m+1=0$

$m^2-2m+1=(m-1)^2=0,\ m=1,1$

2

$$y_c=c_1x+c_2x\ln x,\quad y_1=x,\quad y_2=x\ln x$$

$$y_p=u_1x+u_2x\ln x\qquad\begin{cases}x\,u_1'+x\ln x\,u_2'=0\\ u_1'+(\ln x+1)u_2'=\frac{2}{x}\end{cases}$$

$$W=\begin{vmatrix}x & x\ln x\\ 1 & \ln x+1\end{vmatrix}=x$$

3

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix} = 2, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \frac{2}{x} & \ln x + 1 \end{vmatrix} = -2\ln x$$

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-2}{x}\ln x, \quad u_1 = -(\ln x)^2$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{2}{x}, \quad u_2 = 2\ln x$$

$$y_p = u_1 x + u_2 x\ln x = -x(\ln x)^2 + 2x(\ln x)^2$$

$$\boxed{y_p = x(\ln x)^2} \quad (2)$$

إذاً الحل العام للمعادلة هو

$$y = c_1 x + c_2 x\ln x + x(\ln x)^2$$

$$y'(x) = c_1 + c_2(\ln x + 1) + (\ln x)^2 + 2(\ln x)$$

$$y(1) = c_1 = 0, \quad y'(1) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

إذاً حل المسألة هو

$$(1) \quad \boxed{y = x(\ln x)^2}$$

تحقيق

$$y' = (\ln x)^2 + 2(\ln x)$$

$$y'' = 2(\ln x)\frac{1}{x} + \frac{2}{x}$$

$$x^2 y'' - x y' + y = \cancel{2x\ln x} + 2x - \cancel{x(\ln x)^2} - \cancel{2x\ln x} + \cancel{x(\ln x)^2}$$

$$= 2x \checkmark$$

ب)

$$y''' - 4y'' + 4y' = (5x^2 - 6x) + 4x^2 e^{2x} + 3e^{-2x}$$

$$m^3 - 4m^2 + 4m = m(m^2 - 4m + 4) = 0, \quad m(m-2)^2 = 0, \quad m = 0, \quad m = 2, 2$$

$$(2) \quad \boxed{y_p = x(A_1 + A_2 x + A_3 x^2) + x^2(B_1 + B_2 x + B_3 x^2)e^{2x} + A_4 e^{-2x}}$$

السؤال الرابع: أ)

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 3 \quad \begin{cases} x'(t) = -3x + 4y \\ y'(t) = -2x + 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) + 3x - 4y = 0 \\ +2x + y'(t) - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (D+3)x - 4y = 0 \\ 2x + (D-3)y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2(D+3)x + 8y = 0 \\ + \; 2(D+3)x + (D^2 - 9)y = 0 \end{matrix}$$

$$D^2 y - 9y + 8y = y''(t) - y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = e^{mt}$$

$$m^2 = 1 \Rightarrow m = \mp 1 \quad \boxed{y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}} \quad (1)$$

$$2x = -y'(t) + 3y(t) = -[c_1 e^t - c_2 e^{-t}] + 3c_1 e^t + 3c_2 e^{-t}$$

$$2x = 2c_1 e^t + 4c_2 e^{-t}, \quad \boxed{x(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{-t}} \quad (1)$$

$x(0) = -1 \Rightarrow c_1 + 2c_2 = -1 \Rightarrow c_1 - 8 = -1 \Rightarrow \boxed{c_1 = +7}$

$y(0) = 3 \Rightarrow c_1 + c_2 = 3 \Rightarrow \boxed{c_2 = -4}$,

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= 7e^{t} - 4e^{t} \\ x(t) &= 7e^{t} - 8e^{4t} \end{aligned}}$$

1

(ب)

$$\begin{cases} y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0 \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1 \end{cases} \qquad y = \sum_{0}^{\infty} a_n (x-1)^n,\ x \in \mathbb{R}$$

$$y'' - 2(x-1)y' + 2y = \sum_{2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} - \sum_{1}^{\infty} 2n a_n (x-1)^n + \sum_{0}^{\infty} 2a_n(x-1)^n = 0$$

$n-2 = k$, $n = 2+k$ | $n = k$ | $n = k$

$y(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots$

$y(1) = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$, $\quad y' = a_1 + 2a_2(x-1) - \dots$

$y'(1) = 1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$ 1

$$\sum_{0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}(x-1)^k - \sum_{1}^{\infty} 2k a_k (x-1)^k + \sum_{0}^{\infty} 2a_k (x-1)^k = 0$$

$$2a_2 + 2a_0 + \sum_{1}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2k a_k + 2a_k\right] x^k = 0$$

$2a_2 + 2\cancel{a_0} = 0$ $\quad \boxed{a_2 = 0}$ $\quad$ 2 $\quad a_{k+2} = \dfrac{2(k-1)a_k}{(k+1)(k+2)}, \quad k \geq 1$

1 $\begin{cases} k=1 & a_3 = 0, \Rightarrow a_5 = a_7 \dots = 0 \\ k=2 & a_4 = 0, \Rightarrow a_6 = a_8 = \dots = 0 \end{cases}$

$\boxed{(y = x-1)}$ ومنه يكون الحل الخاص هو

السؤال الخامس:

(أ

$$\frac{s-3}{s^2-3s+2} = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1}$$

$s-1 \qquad s-2$

$$s - 3 = As - A + Bs - 2B = s(A+B) - A - 2B$$

$$\begin{aligned} \cancel{A} + B &= 1 \\ + \cancel{-A} - 2B &= -3 \end{aligned} \Rightarrow -B = -2 \Rightarrow \boxed{B = 2},\ \boxed{A = -1}$$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right) = \frac{t^n}{n!}$

2

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{s^2-3s+2}\right) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

$$= -e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2e^{t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \boxed{2e^{t} - e^{2t}}$$

ب)

$\mathcal{L}(F(t))=f(s)$ $\begin{cases}\mathcal{L}(F''(t))=s^2 f(s)-s F(0)-F'(0)\\ \mathcal{L}(F'(t))=s f(s)-F(0)\end{cases}$

$\begin{cases}y''(t)-3y'(t)+2y(t)=0\\ y(0)=1,\ y'(0)=0\end{cases}$

$\mathcal{L}[y''(t)-3y'(t)+2y(t)]=\mathcal{L}(y''(t))-3\mathcal{L}(y'(t))+2\mathcal{L}(y(t))$; $\mathcal{L}(y(t))=f(s)$

$=s^2 f(s)-s\,\overset{1}{y(0)}-\overset{0}{y'(0)}-3[s f(s)-\overset{1}{y(0)}]+2f(s)=0$

$s^2 f(s)-s-3s f(s)+3+2f(s)=0$

$f(s)(s^2-3s+2)=s-3 \Rightarrow f(s)=\dfrac{s-3}{s^2-3s+2}$

4

حسب الفرق ② $\mathcal{L}^{-1}(f(s))=y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s-3}{s^2-3s+2}\right)$

$\boxed{y(t)=2e^{t}-e^{2t}}$

2

تحقيق:

$\begin{cases}y'(t)=2e^{t}-2e^{2t},\ y''=2e^{t}-4e^{2t}\\ y''-3y'+2y=\cancel{2e^{t}}-\cancel{4e^{2t}}-\cancel{6e^{t}}+6e^{2t}+\cancel{4e^{t}}-\cancel{2e^{2t}}=0\\ y'(0)=0,\ y(0)=1\end{cases}$