جامعة الملك سعود
King Saud University

College of Science.
Department of Mathematics

مع الإجابة الواضحة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

Final Exam
Academic Year 1443-1444 Hijri- SecondSemester

Exam Information معلومات الامتحان			
Course name	Introduction to differential equations		اسم المقرر
Course Code	Math225	225 ريض	رمز المقرر
Exam Date	2022-06-05	1443-11-06	تاريخ الامتحان
Exam Time	01: 00 PM		وقت الامتحان
Exam Duration	3 hours	ثلاث ساعات	مدة الامتحان
Classroom No.	1B 24 Bd 4		رقم قاعة الاختبار
Instructor Name	Prof. Moustafa DAMLAKHI		اسم استاذ المقرر

Student Information معلومات الطالب		
Student's Name		اسم الطالب
ID number		الرقم الجامعي
Section No.		رقم الشعبة
Serial Number		الرقم التسلسلي

General Instructions:

- Your Exam consists of ☐ PAGES (except this paper)
- Keep your mobile and smart watch out of the classroom.
-

تعليمات عامة:

- عدد صفحات الامتحان ☐ صفحة. (باستثناء هذه الورقة)
- يجب إبقاء الهواتف والساعات الذكية خارج قاعة الامتحان.
-

هذا الجزء خاص بأستاذ المادة

This section is ONLY for instructor

#	Course Learning Outcomes (CLOs)	Related Question (s)	Points	Final Score
1	Find ortogonal trajectories	Question 1(a)	3	
2	Solving exact differential equations	Question 1(b)	4	
3	State the roles under which the DE has a unique solution	Question 2 (a)	2	
4	Solve nonhomogeneous equations and Cauchy Euler equation	Question 2 (b+c)	5+3	
5	Define the power series, and their properties,Outline the solution of linear differential equations using power series	Question 3 (a+b)	5+1	
6	Sokve the linear system of equations	Question 4	5	
7	Using the definition of Laplace transformation and describe the properties of Laplace transformation. Find the inverse of Laplace transformation. Use Laplace transformation to solve initial value problems.	Question 5 (a+b) Question 6 (a+b)	(2+3) (2+5)	40
8				

EXAM COVER PAGE

الاختبار النهائي للمقرر ٢٢٥ ريض يوم الأحد ٦/١١/ ١٤٤٣ المدة: ثلاث ساعات	كلية العلوم - قسم الرياضيات الفصل الدراسي الثاني ١٤٤٣ هـ	جامعة الملك سعود King Saud University

السؤال الأول : (٤ +٣)

أ) أوجد المسارات المتعامدة لمجموعة المنحنيات التالية:

$y = x - 1 + ce^{-x}$ ، حيث $c \neq 0$، ثابت اختياري. 3/

ب) برهن أن المعادلة التفاضلية التالية تامة ثم أوجد حلها. 4/

$$(-2y^2 sinx + 3y^3 - 2x)dx + (4ycosx + 9xy^2)dy = 0$$

السؤال الثاني: (٣+٥+٢)

أ) أوجد أكبر منطقة في المستوي $x\,,y$ بحيث يكون للمسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases}(x^2-4)y'' - xy' + 2y = lnx \\ y(3)=1, \quad y'(3)=0\end{cases}.$$ حل وحيد. 2/

ب) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالي 5

$$.x^2y'' + xy' - y = lnx, \qquad x > o$$

ج) أوجد حل المسألة التفاضلية التالية:

$$.x^2\frac{dy}{dx} + x(x+2)y = e^x \qquad y(1) = 0$$ 3/

السؤال الثالث: (١ +٥)

أ) أوجد حل المسألة التفاضلية التالية باستخدام طريقة المتسلسلات حول النقطة العادية $x = 0$.

$$\begin{cases}(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0 \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1\end{cases}$$

ب) أوجد فترة تقارب المتسلسلة.

<u>السؤال الرابع:</u> (٥)

أوجد الحل العام لجملة المعادلات التفاضلية الخطية التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 3y + e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases}$$

<u>السؤال الخامس:</u> (٣+٢)

أ) إذا كانت $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ و $a \in \mathbb{R}$، برهن أن $\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\}, = f(s-a)$

ب) أوجد $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ حيث $f(s) = \frac{s}{(s^2+8s+32)}$.

<u>السؤال السادس:</u> (٥+٢)

أ) أوجد $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ حيث $f(s) = \frac{-s-3}{(s+1)^2}$.

ب) استخدم تحويلات لابلاس لإيجاد حل المسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \\ \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

(استخدم الفقرة (أ)).

السؤال الأول : ⓐ ③

$$e^{x}(y-x+1)=c \quad \text{او} \quad y=x-1+c\,e^{-x}$$

ومنه نوجد المشتق بالنسبة لـ x لأسرة المنحنيات

$$e^{x}(y-x+1)+e^{x}(y'-1)=0 \Rightarrow y-x+\cancel{1}+y'-\cancel{1}=0$$

$$y'=x-y=f(x,y)$$

الان نوجد حل المعادلة المتعامدة

① $$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{-1}{f(x,y)}=\frac{-1}{x-y},$$

$$dx+(x-y)\,dy=0 \qquad \frac{\partial M}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=1$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=1=f(y)$$

① $$\mu(y)=e^{\int f(y)\,dy}=e^{y}$$

$$e^{y}dx+e^{y}(x-y)\,dy=0 \qquad \text{ومنه}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^{y},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=e^{y}\Rightarrow$$ المعادلة تامة .

إذاً توجد دالة F في x, y بحيث يكون

$$\frac{\partial F}{\partial x}=e^{y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=xe^{y}-ye^{y}$$

$$F(x,y)=\int e^{y}dx=e^{y}x+\phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\cancel{e^{y}x}+\phi'(y)=\cancel{xe^{y}}-ye^{y}\Rightarrow \phi(y)=-\int ye^{y}dy$$

$$\phi(y)=-\left(ye^{y}-e^{y}\right)+c=-ye^{y}+e^{y}+c$$

$$F(x,y)=\boxed{xe^{y}-ye^{y}+e^{y}+c=0}$$ حل المعادلة المتعامدة ①

$$e^{y}(x-y+1)=-c$$

او

$$\boxed{(x-y+1)=c_1e^{-y}}$$

ⓑ ④

$$(\underbrace{-2y^{2}\sin x+3y^{3}-2x}_{M})dx+(\underbrace{4y\cos x+9xy^{2}}_{N})\,dy=0$$

①+① $$\frac{\partial M}{\partial y}=-4y\sin x+9y^{2},\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-4y\sin x+9y^{2}$$

إذاً المعادلة تامة .

ومنه توجد دالة F في x, y بحيث

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=-2y^{2}\sin x+3y^{3}-2x\\[4pt] \frac{\partial F}{\partial y}=4y\cos x+9xy^{2}\end{cases}$$

$$F(x,y)=\int(-2y^2\sin x+3y^3-2x)\,dx$$
$$=2y^2\cos x+3y^3x-x^2+\phi(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=4y\cos x+9y^2x+\phi'(y)=4y\cos x+9xy^2$$
$$\phi'(y)=0\Rightarrow\phi(y)=c$$

إذاً حل المعادلة التفاضلية هو مجموعة المنحنيات التالية

2

$$\boxed{F(x,y)=2y^2\cos x+3y^3x-x^2+c=0}$$

السؤال الثاني: (أ)

$$\begin{cases}(x^2-4)y''-xy'+2y=\ln x\\ y(3)=1,\quad y'(3)=0\end{cases}$$

2

$a_2=(x^2-4)=(x-2)(x+2)\neq0\Rightarrow x\neq\mp2$ متصلة على $\mathbb{R}$

1

$x<2 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad x>2$

$-2<x<2$

$a_1=-x,\ a_0=2$ متصلة على $\mathbb{R}$

$f(x)=\ln x$ متصلة على $(0,\infty)$

$x<-2 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad x>2$

$-2<x<2$

وبما أن $x=3>2$ إذاً المبرهنة يكون للمعادلة التفاضلية حل وحيد هو

1 $\boxed{I=(2,\infty)}$

$$x^2y''+xy'-y=\ln x\ ;\quad x>0$$

(ب) 5

1) أولاً نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$x^2y''+xy'-y=0,\quad y=x^m$

$$m(m-1)+m-1=0\Rightarrow m^2-1=0\Rightarrow m=\mp1$$

2 $\boxed{y_c=c_1x+c_2x^{-1}}\ ,\ x>0$

2) $y_p=y_1u_1+y_2u_2=xu_1+x^{-1}u_2$

حيث u_1 ، u_2 دالتان تحققان المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} u_1' x + u_2' x^{-1} = 0 \\ u_1'(1) - u_2' x^{-2} = \dfrac{\ln x}{x^2} \end{cases}$$

$$w = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -x^{-1} - x^{-1} = -2x^{-1}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-1} \\ \frac{\ln x}{x^2} & -x^{-2} \end{vmatrix}}{-2x^{-1}} = \frac{-\ln x \, x^{-3}}{-2x^{-1}} = \frac{1}{2} \ln x \frac{1}{x^2}$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2} \ln x \, dx, \quad \ln x = u, \quad \frac{dx}{x} = du$$

$$dv = \frac{dx}{x^2}, \quad v = -1/x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right] = \boxed{\frac{-1}{2x} \ln x - \frac{1}{2x}} \quad 1$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{\ln x}{x^2} \end{vmatrix}}{-2x^{-1}} = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{-1}{2} x = \frac{-1}{2} \ln x$$

$$1 \quad u_2 = \frac{-1}{2} \int \ln x \, dx = \frac{-1}{2}[x \ln x - x] = \boxed{-\frac{x}{2} \ln x + \frac{x}{2}}$$

$$y_p = x\left(\frac{-1}{2x} \ln x - \frac{1}{2x} \right) + x^{-1}\left(-\frac{x}{2} \ln x + \frac{x}{2} \right)$$

$$= \frac{-1}{2} \ln x - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln x + \cancel{\frac{1}{2}} = \boxed{-\ln x = y_p}$$

$$\text{o.k} \begin{cases} y_p' = \frac{-1}{x}, \quad y_p'' = \frac{1}{x^2} \\ x^2 y_p'' + x y_p' - y_p = \cancel{1} - \cancel{1} + \ln x = \ln x \quad \text{ok} \end{cases}$$

كمقتر

بإذاً الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$\boxed{y = y_c + y_p = c_1 x + c_2 x^{-1} - \ln x} \quad 1$$

$$\begin{cases} x^2 y' + x(x+2)y = e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(٢) 3

$$y' + \left(1 + \frac{2}{x}\right)y = \frac{1}{x^2} e^x$$ لدينا معادلة خطية

$$P(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$\mu(x) = e^{\int (1 + \frac{2}{x})dx}$$
$$= e^{x + \ln x^2}$$
$$= x^2 e^x \quad (1)$$

$$y\mu(x) = \int x^2 e^x \frac{e^x}{x^2} dx = \int e^{2x} dx$$

$$x^2 e^x y = \frac{1}{2} e^{2x} + c \quad \text{او} \quad y = \frac{1}{x^2 e^x}\left(\frac{1}{2} e^{2x} + c\right)$$

$$y = \frac{1}{2x^2} e^x + \frac{1}{x^2 e^x} c$$

(1) $$\boxed{y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2} e^x + e^{-x} c\right)}$$ ومنه يكون الحل العام للمعادلة المعطاة

$y(1) = 0$

$0 = \frac{1}{2} e + e^{-1} c$

$c e^{-1} = \frac{-1}{2} e$

$\boxed{c = \frac{-1}{2} e^2}$ (1)

$\boxed{y = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x+2}\right]}$

السؤال الثالث : (٢)

$$\begin{cases} (1 + x^2) y'' + 2x y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

1) $\frac{a_1}{a_2} = 2x \frac{1}{1 + x^2} = 2x \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1$ (ب)

$\frac{a_0}{a_2} = -2 \sum (-1)^n x^{2n}; \quad |x| < 1$ (1)

$y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ اذاً فترة التقارب للمتسلسلة

$\boxed{|x| < 1}$

2) $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ (أ)

$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$

(1) $y(0) = a_0 = 0, \quad y'(0) = a_1 = 1$

$$(1 + x^2)\left(\sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}\right) + 2x \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} - 2 \sum_0^\infty a_n x^n = 0$$

(1) $$\sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^n + \sum_1^\infty 2n a_n x^n - \sum_0^\infty 2 a_n x^n = 0$$

$n - 2 = k$ | $n = k$ | $n = k$ | $n = k$

$n = 2 + k$

$$\sum_{0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^{k}+\sum_{2}^{\infty}k(k-1)a_k x^k+$$

$$+\sum_{1}^{\infty}2k a_k x^k-\sum_{0}^{\infty}2a_k x^k=0$$

$$(2a_2-2a_0)+(6a_3+2a_1-2a_1)x+$$

$$+\sum_{2}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)a_{k+2}+k(k-1)a_k+2ka_k-2a_k\right]x^k=0$$

$a_2=a_0=0 \Rightarrow a_2=0$

$6a_3+0=0 \Rightarrow a_3=0$

$$k\geq 2 \quad (k+1)(k+2)a_{k+2}=\left(-k(k-1)-2k+2\right)a_k$$

$$=(-k^2+k-2k+2)a_k=(-k^2-k+2)a_k$$

$$=-(k^2+k-2)a_k=-(k-2)(k+1)a_k$$

$$a_{k+2}=\frac{-(k-2)(k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k=\boxed{-\frac{k-2}{k+2}a_k}\ ,\ k\geq 2$$

(2)

$k=2 \Rightarrow a_4=0$

$k=3 \ -\frac{1}{5}a_3=0,\ a_3=0$

$k=4 \ -\frac{2}{6}a_4=0\ \ a_4=0, \Rightarrow a_5=a_6 \cdots =0$

(1)

وهنا نعوض من a_1 ... فقط

$$\boxed{y(x)=x}$$

تحقق:
$y(x)=x,\ y'=1,\ y''=0$

$$\text{O.r.}\begin{cases}(1+x^2)y''+2xy'-2y=0+2x-2x=0\ \checkmark\\ y(0)=0,\quad y'(0)=1\end{cases}$$

السؤال الرابع: (5)

$$\begin{cases} x'(t) = -x + 3y + e^t \\ y'(t) = -2x + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D+1)x - 3y = e^t \\ 2x + (D-4)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -2(D+1)x + 6y = -2e^t \\ +2(D+1)x + (D+1)(D-4)y = 0 \end{array}$$

$$(D+1)(D-4)y + 6y = -2e^t$$

$$(D^2 - 3D - 4)y + 6y = -2e^t$$

$$y'' - 3y' + 2y = -2e^t$$

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y = e^{mt}$

$$m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2) = 0 \text{ , } m = 1, 2$$

(2) $\boxed{y_c = c_1 e^t + c_2 e^{2t}}$

2) $y_p = Ate^t$, $y'_p = Ae^t + Ate^t$

$$y''_p = 2Ae^t + Ate^t$$

$$y''_p - 3y'_p + 2y_p = 2Ae^t + \cancel{Ate^t} - 3Ae^t - \cancel{3Ate^t} + \cancel{2Ate^t} = -2e^t$$

$$= -Ae^t = -2e^t \Rightarrow A = 2$$

(1) $\boxed{y_p = 2te^t}$

3) $\boxed{y = y_c + y_p = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 2te^t}$

4) $2x = 4y - y' \Rightarrow x(t) = 2y - \frac{1}{2}y'$

$$x(t) = 2c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + 4te^t - \frac{1}{2}\left[c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + 2e^t + 2te^t\right]$$

(2) $\boxed{x(t) = \frac{3}{2}c_1 e^t + c_2 e^{2t} - e^t + 3te^t}$

$F(t) = \mathcal{L}^{-1}(f(s))$ ، $\mathcal{L}(F(t)) = f(s)$

السؤال الخامس: (P

3 لنبرهن صحة العلاقة -

$$\mathcal{L}(e^{at}F(t)) = f(s-a)$$

بالعمل

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t)\,dt$$

(2)

$$= \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at} \cdot F(t)\,dt = \mathcal{L}(e^{at}F(t))$$

$$\mathcal{L}^{-1}(f(s-a)) = e^{at}\mathcal{L}^{-1}(f(s))$$

دهنه

$$f(s) = \frac{s}{s^2+8s+32} = \frac{s}{(s+4)^2+16} \quad (1) \qquad (ب) \quad 3$$

$$\mathcal{L}^{-1}(f(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{(s+4)^2+16} - \frac{4}{(s+4)^2+16}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{(s+4)^2+16}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(s+4)^2+16}\right)$$

$$(2) \quad = e^{-4t}\cos(4t) - e^{-4t}\sin 4t$$

هنا، استخدمنا، العلاقة

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(f(s+a)) = e^{-at}\mathcal{L}^{-1}(f(s))} \checkmark$$

السؤال السادس: (٤) 2

$$f(s) = \frac{-s-3}{(s+1)^2} = \frac{-(s+1)-2}{(s+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(s+1)} - \frac{2}{(s+1)^2} \quad (1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(f(s)) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)$$

$$= -e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - 2e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$\checkmark \ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right) = \frac{t^n}{n!}, \ n = 0,1,2\ldots$$ هنا نستخدم القاعدة

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(f(s)) = -e^{-t} - 2e^{-t}t} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y = e^{-t} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad (ب) \quad 5$$

$$(1) \quad \mathcal{L}(e^{-t}) = \int_0^\infty e^{-t-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+1)t}\,dt = \frac{1}{s+1}; \quad s > -1$$

$$\mathcal{L}(y(t)) = f(s)$$

$$\mathcal{L}(y'') + 3\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{-t})$$

$$(s^2 f(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{0}) + 3(s f(s) - y(0)) + 2f(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2+3s+2)f(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow f(s) = \frac{1}{(s+1)(s+1)(s+2)}$$

$$(2) \quad f(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$\qquad\qquad (s+1)(s+2) \qquad (s+2) \qquad (s+1)^2$$

$$1 = A(s^2+3s+2) + Bs + 2B + C(s^2+2s+1)$$

$$1 = (A+C)s^2 + (3A+B+2C) + (2A+2B+C$$

$$\begin{cases} A+C=0 & \Rightarrow A=-C \\ 3A+B+2C=0 & \\ 2A+2B+C=1 & \end{cases}$$

$$-C+B=0 \Rightarrow B=C$$

$$-C+2B=1$$

$$-C+2C=1 \Rightarrow C=1,\ B=1,\ A=-1$$

$$f(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2} \quad (1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(f(s)) = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$= e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$(1) \quad \boxed{y(t) = -e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t} = e^{-t}(t-1) + e^{-2t}} \quad \text{o.k.}$$

ملحق: تابع لحل السؤال الرابع:

$$\begin{aligned}(D-4)\ &\left(\begin{cases}(D+1)x-3y=e^{t}\end{cases}\right)\\ 3\ &\ \ 2x+(D-4)y=0\end{aligned}$$

$$(D-4)(D+1)x-3\cancel{(D-4)y}=(D-4)e^{t}$$

$$+\ 6x+3\cancel{(D-4)y}=0$$

$$6x+(D^{2}-3D-4)x=e^{t}-4e^{t}=-3e^{t}$$

$$\ddot{x}-3\dot{x}+2x=-3e^{t}$$

1) $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=0,\quad x=e^{mt}$

$$m^{2}-3m+2=(m-1)(m-2)=0,\quad m=1,\ m=2$$

(2) $x_c=c_1e^{t}+c_2e^{2t},$

2) $x_p=Ate^{t}\qquad \dot{x}_p=Ae^{t}+Ate^{t}$

$$\ddot{x}_p=2Ae^{t}+Ate^{t}$$

$$2\cancel{Ae^{t}}+\cancel{Ate^{t}}-3\cancel{Ae^{t}}-3\cancel{Ate^{t}}+2\cancel{Ate^{t}}=-3e^{t}$$

$$-A\cancel{e^{t}}=-3\cancel{e^{t}}\qquad A=3$$

(1) $x_p=3te^{t}$

$$\boxed{x(t)=x_c+x_p=c_1e^{t}+c_2e^{2t}+3te^{t}}$$

$$3y=\dot{x}+x-e^{t}$$

$$3y=c_1e^{t}+2c_2e^{2t}+3\cancel{e^{t}}+3te^{t}+c_1e^{t}+c_2e^{2t}+3te^{t}-\cancel{e^{t}}$$

(2) $$=2c_1e^{t}+3c_2e^{2t}+2e^{t}+6te^{t}$$

$$\boxed{y=\frac{2}{3}c_1e^{t}+c_2e^{2t}+\frac{2}{3}e^{t}+2te^{t}}$$