القيم والمتجهات المميزة والإستقطار

د. المنجي بلال

4 أكتوبر 2017

المحتويات

باب 1

القيم والمتجهات المميزة والإستقطار

1.1 القيم والمتجهات المميزة

تعريف 1.1.1
إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و كان $\lambda \in \mathbb{R}$. نقول أن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا وجد $X \in \mathbb{R}^n$ و $X \neq 0$ بحيث $AX = \lambda X$ و في هذه الحالة يسمى X متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة λ.

مبرهنة 1.1.1
إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و $\lambda \in \mathbb{R}$. فإن λ قيمة مميزة للمصفوفة A إلا وإذا كان $|\lambda I - A| = 0$.

تعريف 1.1.2
إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة فإن
$|\lambda I - A| = 0$ يسمى كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A.

مثال 1.1.1
أوجد القيم المميزة للمصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.2 الإستقطار

تعريف 1.2.1
نقول أن مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$
قابلة للإستقطار (diagonalizable) إذا وجدت مصفوفة $P \in M_n(\mathbb{R})$ لها معكوس بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

مبرهنة 1.2.1
تكون مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ قابلة للإستقطار إلا وإذا وفقط إذا كان لها n متجه مميز مستقلة خطيا.
وفي هذه الحالة تشكل هذه المتجهات أساسا لـ $\mathbb{R}^n$.

أمثلة 1.2.1
أثبت أن المصفوفات التالية قابلة للإستقطار و أوجد $P \in M_n(\mathbb{R})$ لها معكوس بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية ثم أوجد A^{15}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

تعريف 1.2.2
لتكن مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ و λ قيمة مميزة للمصفوفة A، نعرف

$$E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = \lambda X\}$$

ويسمى الفضاء المميز للقيمة المميزة λ.

ملاحظة 1.2.1
إذا كانت λ قيمة مميزة لمصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$، فإن $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = \lambda X\}$ فضاء جزئي من $\mathbb{R}^n$.

تعريف 1.2.3
إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و كانت كثيرة الحدود المميزة

$$q_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m Q(\lambda)$$

بحيث $Q(\lambda_1) \neq 0$ فنقول أن القيمة المميزة λ_1 لها تعدد m و يسمى التعدد الجبري للقيمة المميزة λ_1
أما بعد الفضاء المميز $E_{\lambda_1} = \{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = \lambda_1 X\}$ فيسمى التعدد الهندسي للقيمة المميزة λ_1.

مبرهنة 1.2.2
إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و كانت كثيرة الحدود المميزة

$$q_A(\lambda) = C(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

فإن A قابلة للإستقطار إلا و إذا كان التعدد الهندسي يساوي التعدد الجبري لكل قيمة مميزة للمصفوفة.

ملاحظة 1.2.2 حالة خاصة
إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و لها n قيمة مميزة مختلفة فإن A قابلة للإستقطار.

1.3 تمارين الباب االسابع

تمرين 1 :

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفات التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-10 & -6\\ 18 & 11\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 5\\ -4 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}5 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 3 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}7 & 4 & 16\\ 2 & 5 & 8\\ -2 & -2 & -5\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 3 & -2\\ -2 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

تمرين 2 :

1. أثبت أن 1 و -1 هي قيم مميزة للمصفوفة

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. أوجد التعدد الجبري لكل من القيم مميزة
1 و -1.

3. أوجد أساسا الفضاء المميز $\mathbf{E_1} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3;\ \mathbf{AX} = \mathbf{X}\}$ و استنتج قيم m بحيث تكون المصفوفة $\mathbf{A}$ قابلة للاستقطار.

4. أ) إذا كانت $\mathbf{m = 0}$ أوجد مصفوفة $\mathbf{P}$ لها معكوس ومصفوفة $\mathbf{D}$ قطرية حيث $\mathbf{D = P^{-1}AP}$.
ب) إذا كانت $\mathbf{m = 0}$ احسب $\mathbf{A^{1437}}$.

تمرين 3 :

أثبت أن المصفوقة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

قابلة للإستقطار و أوجد A^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

1.4 إصلاح تمارين الباب االسابع

حل التمرين 1:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ -4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

إذًا المصفوفة ليست قابلة للإستقطار.

$$A=\begin{pmatrix}-10 & -6\\ 18 & 11\end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-10-\lambda & -6\\ 18 & 11-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(\lambda-2)(1+\lambda).$$

إذًا المصفوفة قابلة للإستقطار.
$E_{-1}=\langle(-2,3)\rangle$ و $E_2=\langle(1,-2)\rangle$.
المصفوفة القطرية هي $D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
و المصفوفة P هي $P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 5\\ -4 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 5 \\ -4 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

إذًا المصفوفة ليست قابلة للإستقطار.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

$E_1 = \langle (0,1,0), (1,0,-1) \rangle$ و $E_2 = \langle (0,1,-1) \rangle$. إذًا المصفوفة قابلة للإستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

تكون المصفوفة قابلة للاستقطار إلا وإذا كان بعد الفضاء المميز E_2 يساوي 2.
$E_2 = \langle (1,1,-1,0), (-1,2,0,1) \rangle$. إذا المصفوفة A قابلة للاستقطار.
$E_5 = \langle (1,0,0,0) \rangle$ و $E_3 = \langle (3,2,0,0) \rangle$.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-5).$$

$E_1 = \langle (1,0,1), (-2,1,0) \rangle$, $E_5 = \langle (1,1,-1) \rangle$, إذًا المصفوفة A قابلة للاستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 16 \\ 2 & 5-\lambda & 8 \\ -2 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda-1).$$

$E_3 = \langle (1,-1,0), (4,0,-1) \rangle$, $E_1 = \langle (2,1,-1) \rangle$, إذًا المصفوفة A قابلة للاستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^3.$$

تكون المصفوفة قابلة للاستقطار إلا وإذا كان بعد الفضاء المميز E_2 يساوي 3.

$E_2 = \langle (-1,1,0,2), (-1,0,1,0) \rangle$. إذًا المصفوفة ليست قابلة للاستقطار.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(3-\lambda))(4+\lambda).$$

إذًا المصفوفة A قابلة للاستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

$E_1 = \langle (1,0,3) \rangle$, $E_3 = \langle (3,2,-1) \rangle$, $E_{-4} = \langle (3,-5,-1) \rangle$.

و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^4.$$

إذًا المصفوفة ليست قابلة للاستقطار.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي $q_A(\lambda)=\lambda^4$. إذًا المصفوفة ليست قابلة للاستقطار.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^3(1-\lambda)(1+\lambda).$$

تكون المصفوفة قابلة للاستقطار إلا وإذا كان بعد الفضاء المميز E_2 يساوي 3.

$E_2=\langle(1,1,0,0),(1,0,0,1)\rangle$. إذًا المصفوفة ليست قابلة للاستقطار.

حل التمرين 2:

.1

$$|\lambda I-A|=(1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

إذا 1 و -1 هي قيم مميزة للمصفوفة A

2. التعدد الجبري للقيمة المميزة 1 هي 2 و التعدد الجبري للقيم المميزة -1 هي 1.

3. $\left\{\begin{array}{c} m(x+y)=0 \\ y+z=0 \end{array}\right. \iff (x,y,z)\in E_1$.

إذا كانت $m=0$

$$E_1=\{(x,y,-y);\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

وبعده يساوي 2. و في هذه الحالة تكون المصفوفة قابلة للإستقطار.

وإذا كانت $m\neq 0$

$$E_1=\{(x,-x,x);\ x\in\mathbb{R}\}$$

وبعده يساوي 1. و في هذه الحالة تكون المصفوفة غير قابلة للإستقطار.

4. أ) إذا كانت $m=0$، $P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ و $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

ب) إذا كانت $m=0$

$$A^{1437}=PDP^{-1}=A.$$

حل التمرين 3:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&3\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0&0\\0&-\lambda&2&0\\0&0&-1-\lambda&3\\0&0&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(1+\lambda))(2+\lambda).$$

إذًا المصفوفة A قابلة للاستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$.

$E_0=\langle(1,-1,0,0)\rangle$، $E_1=\langle(1,0,0,0)\rangle$، $E_{-1}=\langle(-1,2,-1,0)\rangle$، $E_{-2}=\langle(1,-3,3,-1)\rangle$.

و المصفوفة P هي $P=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\-1&0&2&3\\0&0&-1&3\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$

قابلة للإستقطار و أوجد A^n لكل $n\in\mathbb{N}$.