التحويلات الخطية

د. المنجي بلال

4 أكتوبر 2017

المحتويات

باب 1

التحويلات الخطية

1.1 تعريف التحويلات الخطية

تعريف 1.1.1
ليكن كل من V و W فضاء متجهات و ليكن $T\colon V \longrightarrow W$ تطبيقا. نقول أن T تحويل خطي إذا كان لكل $u, v \in V$، $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$.
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

ملاحظة 1.1.1
إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن

1. $T(0) = 0$.
2. $T(-u) = -T(u)$.
3. $T(u-v) = T(u) - T(v)$.

مبرهنة 1.1.1
إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تطبيقا فإن T تحويلا خطيا إذا و فقط

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

ملاحظة 1.1.2
إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن

$$T(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_n T(u_n).$$

مبرهنة 1.1.2
إذا كانت $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ فإن التطبيق $T_A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ المعرف بالقاعدة $T_A(X) = AX$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$ هو تحويلا خطيا و يسمى التحويل الخطي المقابل للمصفوفة A.

مبرهنة 1.1.3
ليكن $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تحويلا خطيا و ليكن $(e_1,\ldots,e_n)$ الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^n$. عندئذ $T=T_A$ حيث $A=[a_{i,j}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ أعمدتها $T(e_1),\ldots,T(e_n)$.
تسمى المصفوفة A المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي T.

مبرهنة 1.1.4
إذا كان V,W فضائي متجهات وكان $S=\{v_1,\ldots,v_n\}$ مجموعة من المتجهات في W فإنه يوجد تحويل خطي وحيد $T\colon V\longrightarrow W$ بحيث $T(v_j)=w_j$ لكل $1\leq j\leq n$.

1.2 نواة وصورة التحويل الخطي

تعريف 1.2.1
ليكن $T\colon V\longrightarrow W$ تحويلا خطيا. نعرف نواة التحويل T والتي نرمز بها بالرمز ketT المجموعة التالية

$$\mathrm{ketT}=\{v\in V;\ T(v)=0\}.$$

كما نعرف صورة التحويل T والتي نرمز بها بالرمز ImT المجموعة التالية

$$\mathrm{ImT}=\{T(v);\ v\in V\}.$$

مبرهنة 1.2.1
إذا كان $T\colon V\longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن ketT فضاء جزئي من V و ImT فضاء جزئي من W.

تعريف 1.2.2
إذا كان $T\colon V\longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن بعد الفضاء ketT يسمى صفرية التحويل T و نرمز بالرمز $(\mathrm{nullity}(T))$، كذلك بعد الفضاء ImT يسمى رتبة التحويل T و نرمز بالرمز $(\mathrm{rank}(T))$

ملاحظة 1.2.1
إذا كانت $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ و $= T_A\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ المعرف بالقاعدة $T_A(X)=AX$ فإن $\mathrm{rank}T=\mathrm{rank}A$, و $\mathrm{Im}T=\mathrm{col}A$.

مبرهنة 1.2.2
إذا كان $T\colon V\longrightarrow W$ تحويلا خطيا و $\{v_1,\ldots v_n\}$ أساسا للفضاء V فإن المجموعة $\{t(v_1),\ldots T(v_n)\}$ تولد الفضاء $\mathrm{Im}T$.

مبرهنة 1.2.3 مبرهنة البعد للتحويلات
إذا كان $T\colon V\longrightarrow W$ تحويلا خطيا و كان $\dim V=n$ فإن

$$\mathrm{nullity}(T)+(\mathrm{rank}(T)=n.$$

أي

$$\dim\ker(T)+\dim\mathrm{Im}(T)=n.$$

تعريف 1.2.3
إذا كان $T\colon V\longrightarrow W$ تحويلا خطيا.

1. نقول أن T أحادي أو متباين إذا تحقق لكل $u, v \in V$ ما يلي

$$T(u) = T(v) \Rightarrow u = v.$$

2. نقول أن T شامل أو غامر إذا كان $\mathrm{Im}(T) = W$.

مبرهنة 1.2.4
إذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا.
يكون التحويل T أحاديا إذا كان $\ker(T) = \{0\}$.

نتيجة 1.2.5
إذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا و $\dim V = \dim W = n$ عندئذ يكون التحويل T أحاديا إذا و فقط إذا كان T تحويلا شاملا.

1.3 تمارين الباب االسادس

تمرين 1 :

لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. أوجد أساسا للفضاء العمودي للمصفوقة A.
2. أوجد صفرية المصفوفة A.

تمرين 2 :

أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين. (أوجد مصفوفة P لها معكوس و تحقق $PB = AP$.

تمرين 3 :

أثبت أن المصفوفتين $M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين. (أوجد مصفوفة P لها معكوس و تحقق $PM = NP$.

تمرين 4 :

1. أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ غير متشابهتين.
2. أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. لهما نفس الرتبة ونفس المحدد ولكن ليست متشابهتين. (احسب $(A-I)^2$ و $(B-I)^2$).
3. هل المصفوفتين $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ متشابهتين.

تمرين 5 :

أثبت أن المصفوفتين $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & ? \\ 2 & 1 & ? \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين.

تمرين 6 :

أوجد رتبة المصفوفات التالية

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} & 1 & 5 \\ -1 & 4 & \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$

تمرين 7 :

ليكن $b \neq A$. أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ متشابهتين.

تمرين 8 :

أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ متشابهتين.

تمرين 9 :

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -5 & -2 & -5 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix},$$

والمتجهات

$$u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

1. أثبت أن
(f_1, f_2, f_3) تمثل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.

2. أوجد المصفوفة A في الأساس (f_1, f_2, f_3) واستنتج A^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

تمرين 10 :

أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين. (أوجد مصفوفة P لها معكوس و تحقق $PB = AP$.

تمرين 11 :

أثبت أن المصفوفتين $M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين. (أوجد مصفوفة P لها معكوس و تحقق $PM = NP$.

تمرين 12 :

1. أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ غير متشابهتين.

2. أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. لهما نفس الرتبة ونفس المحدد ولكن ليست متشابهتين. (احسب $(A-I)^2$ و $(B-I)^2$.)

3. هل المصفوفتين $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ متشابهتين.

تمرين 13 :

أثبت أن المصفوفتين $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & ? \\ 2 & 1 & ? \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين.

1.4 إصلاح تمارين الباب االسادس

حل التمرين 1:

1. الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. إذا $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ هو أساس للفضاء العمودي للمصفوقة A.
2. نستنتج من السؤال الأول أن رتبة المصفوفة A هي 2. إذا صفرية المصفوفة A هي 2.

حل التمرين 2:

حتى تكون المصفوفات A و B متشابهة لا بد أن يوجد أساس (X_1, X_2, X_3, X_4) للفضاء $\mathbb{R}^4$ بحيث

$$AX_1 = X_1, \quad AX_2 = 2X_1+X_2, \quad AX_3 = 3X_1+2X_2+X_3, \quad AX_4 = 4X_1+3X_2+2X_3+$$

يمكن أن نأخذ $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

إذًا المصفوفتين A و B متشابهتين. والمصفوفة $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.