إشتقاق الدوال

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

26 نوفمبر 2016

المحتويات

تعريف

لتكن دالة f معرفة على مجموعة $U \subset \mathbb{R}$ جوار لنقطة a. نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق في النقطة a إذا كانت النهاية التالية $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجودة في $\mathbb{R}$. و نرمز بهذه النهاية $f'(a)$ وتسمى مشتقة الدالة f في النقطة a.

أمثلة

1. لتكن الدالة $f(x) = x^n$.
إذا كانت $n = 1$, فإن $f'(x) = 1$.
وإذا كانت $n \geq 2$، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$ لأن

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= nx^{n-1} + h\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} nx^{n-1}. \end{aligned}$$

2. $g(x) = \sin x$،
إذا $\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{2}{h} \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \cos x$.
$g'(x) = \cos x$.

الدالة $h(x) = |x|$. ليست قابلة للإشتقاق في 0 لأن $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ ليست موجودة.

مبرهنة

تكون دالة f قابلة للإشتقاق في نقطة a إلا وإذا وجدت دالة g معرفة بجوار 0 ويوجد عدد حقيقي α بحيث

$$f(a+h) - f(a) = \alpha.h + g(h).h, \qquad (1)$$

و $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$.

البرهان

$\Rightarrow$:

ليكن $\alpha = f'(a)$ و

$$g(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) & \text{if } h \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}.$$

و بهذا يكون $f(a+h) - f(a) = hf'(a) + hg(h)$,

$\Leftarrow$:

إذا كان $f(a+h) - f(a) = \alpha.h + h.g(h)$, إذا

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \alpha + g(h) = \alpha.$$

وبذلك تكون الدالة f قابلة للإشتقاق في النقطة a و $f'(a) = \alpha$.

مبرهنة

كل دالة قابلة للإشتقاق في نقطة تكون متصلة في هذه النقطة.

البرهان

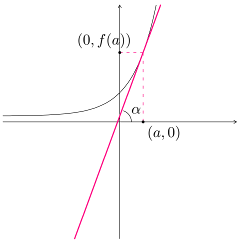
إذا كانت دالة f قابلة للإشتقاق في نقطة a، إذا توجد دالة g معرفة بجوار 0 ويوجد عدد حقيقي α بحيث

$$f(a+h)-f(a)=\alpha.h+g(h).h, \qquad (2)$$

و $\lim\limits_{h\to 0} g(h)=0$، إذا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

التفسير الهندسي للإشتقاق

لتكن دالة f معرفة على فترة مفتوحة $I \subset \mathbb{R}$. ونفرض أن الدالة f قابلة للإشتقاق في نقطة a. إذا كان G هو بيان الدالة f, فإن بيان الدالة $x \longmapsto f(a) + (x-a)f'(a)$ هو المستقيم المماس على G في النقطة $(a, f(a))$ والعدد $f'(a)$ هو ميل هذا المماس.



1

تعريف

1 نقول أن دالة $f\colon]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على يسار النقطة b إذا كانت النهاية

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

موجودة و هي عدد حقيقي. و نرمز بهذه النهاية كالتالي $f'_\ell(b)$.

2 نقول أن دالة $f\colon [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على يمين النقطة a إذا كانت النهاية

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

موجودة و هي عدد حقيقي. و نرمز بهذه النهاية كالتالي $f'_r(b)$.

ملاحظات

1. تكون دالة f معرفة بجوار نقطة a قابلة للإشتقاق في نقطة a إلا وإذا كانت f قابلة للإشتقاق على يمين وعلى شمال النقطة a وهذه المشتقات متساوية .
2. إذا كانت $f'_\ell(x_0) \neq f'_r(x_0)$ نقول أن النقطة $M = (x_0, f(x_0))$ هي نقطة حرجة .
3. إذا كانت $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, يكون المماس على يمين النقطة $(x_0, f(x_0))$ عموديا.
4. إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, يكون المماس على يسار النقطة x_0 عموديا .

مثال $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, f غير قابلة للإشتقاق في النقطة 0.

الإشتقاق على فترة

تعريف

1. نقول أن دالة $f\colon\ ]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على الفترة $]a,b[$ إذا $I=]a,b[$ كانت قابلة للإشتقاق في كل نقطة من الفترة $]a,b[$. ونرمز كالتالي f' مشتقها.
2. نقول أن دالة $f\colon [a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على الفترة $[a,b[$ إذا كانت f قابلة للإشتقاق على الفترة $]a,b[$ و قابلة للإشتقاق على يمين النقطة a.
3. نقول أن دالة $f\colon\ ]a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على الفترة $]a,b]$ إذا كانت f قابلة للإشتقاق على الفترة $]a,b[$ و قابلة للإشتقاق على يسار النقطة b.

تعريف

لتكن دالة f معرفة على فترة I.

1. نقول أن الدالة f هي C^1 إذا كانت f قابلة للإشتقاق و مشتقتها متصلة على I.
2. نقول أن الدالة f هي C^n، $n \in \mathbb{N}$، إذا كانت f قابلة للإشتقاء n مرة و $f^{(n)}$ متصلة على I. (نرمز كالتالي $f^{(n)}$ المشتقة للرتبة n للدالة f).
3. نقول أن الدالة f هي C^∞ إذا كانت f هي C^n، لكل $n \in \mathbb{N}$.

أمثلة

1. الدالة $f(x) = \sin x$ هي C^∞ و $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ لكل $n \in \mathbb{N}$. (نبرهن هذا بأستعمال الإستقراء الرياضي).
2. لتكن $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة كالتالي $f(x) = e^x$ إذا كان $x < 0$ و $f(x) = ax^2 + bx + c$ إذا كان $x \geq 0$.
   سنبحث عن قيمة a, b, c حتى تكون f C^2.
   لكي تكون f C^2, لا بد أن يكون لنا $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$, إذا $b = c = 2a = 1$.

مبرهنة

لتكن دالتين f و g قابلة للإشتقاق على فترة I. إذا $f+g$, $\alpha.f$ و $f.g$ قابلة للإشتقاق و $(f+g)' = f' + g'$, $(\alpha f)' = \alpha f'$, $(f.g)' = f'.g + f.g'$.

البرهان

نعطي البرهان لعملية الضرب فقط. أما الأولى والثانية فهي بديهية.

$$\frac{(f.g)(a+h) - (f.g)(a)}{h} = f(a+h)\frac{g(a+h) - g(a)}{h} + g(a)\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

إذا $(fg)'(a) = f(a).g'(a) + f'(a)g(a)$.

مبرهنة

لتكن دالة $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة على فترة I و قابلة للإشتقاق في نقطة $a \in I$ و $f(a) \neq 0$. إذا $\frac{1}{f}$ قابلة للإشتقاق في النقطة a و $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$.

البرهان

إذا كانت $f(a) \neq 0$ و f قابلة للإشتقاق في النقطة a, إذا f متصلة في النقطة a و يوجد جوار U للنقطة a أين تكون الدالة $\frac{1}{f}$ معرفة. إذاً لكل $h \neq 0$ و صغير

$$\frac{1}{h}(\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}) = -\frac{1}{f(a)f(a+h)}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ونستنتج المطلوب بسهولة

تعريف

إذا كانت دالة f قابلة للإشتقاق على فترة I و $f(x) \neq 0$ لكل $x \in I$ إذا الدالة $\frac{f'}{f}$ تسمى المشتقة اللوغارتمية للدالة f. $(\frac{f'}{f} = (\ln |f|)')$.

تمرين

أثبت أن المشتقة اللوغارتمية للدالة $(f.g)$ هي $\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}$ و المشتقة اللوغارتمية للدالة $\frac{f}{g}$ هي $\frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}$.

مبرهنة (قاعدة ليبنيتز)

لتكن f و g دالتين قابلة للإشتقان n مرة على الفترة I. لكل $x \in I$

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)}(x) g^{(n-p)}(x),$$

مع $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

البرهان

نعطي البرهان باستعمال الإستقراء الرياضي.

لقد قدمنا البرهان إذا كان $n = 1$ في المبرهنة ??. نفرض أن النتيجة صحيحة لحد الرتبة n, يعني

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)}(x) g^{(n-p)}(x).$$

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(x) &= [(fg)^{(n)}]'(x) = [\sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)}(x) g^{(n-p)}]'(x)\\ &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p+1)}(x) g^{(n-p)}(x) + \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)}(x) g^{(n-p+1)}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{p=1}^{n+1} C_n^{p-1} f^{(p)}(x) g^{(n-p+1)}(x) + \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)}(x) g^{(n-p+1)}(x) \\
&= \sum_{p=1}^{n} (C_n^p + C_n^{p-1}) f^{(p)}(x) g^{(n-p+1)}(x) + C_n^0 f(x) g^{(n+1)}(x) \\
&\qquad + C_n^n f^{(n+1)}(x) g(x) \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p f^{(p)}(x) g^{(n+1-p)}(x),
\end{aligned}$$

لأن $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$.

مبرهنة

لتكن دالة f معرفة على فترة I جوار للنقطة a و لتكن دالة g معرفة على فترة J جوار للنقطة $f(a)$. إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق في النقطة a و الدالة g قابلة للإشتقاق في النقطة $f(a)$, فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للإشتقاق في النقطة a و

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

البرهان

باستعمال المبرهنة ??, توجد دالة g_1 معرفة بجوار 0 بحيث
$f(a+h)-f(a)=h.f'(a)+hg_1(h)$, و $\lim_{h\to 0} g_1(h)=0$.

كذلك توجد دالة g_2 معرفة بجوار 0 بحيث
$g(f(a)+k)-g(f(a))=k.g'(f(a))+k.g_2(k)$, و $\lim_{k\to 0} g_2(k)=0$.

إذا كان $h\neq 0$ صغير لنا ما يلي

$$\begin{array}{rcl} g\circ f(a+h) & = & g\circ f(a)+h(f'(a)+g_1(h)) \\ & = & g\circ f(a)+h(f'(a)+g_1(h)).g'(f(a)) \\ & & \quad +h(f'(a)+g_1(h)).g_2(h(f'(a)+g_1(h))) \\ & = & g\circ f(a)+hg'(f(a)).f'(a)+h.g_3(h) \end{array}$$

مع $\lim_{h\to 0} g_3(h)=0$.

مبرهنة

لتكن دالة f قابلة للإشتقاق على فترة I و لتكن دالة g قابلة للإشتقاق على الفترة $f(I)$, إذا الدالة $g \circ f$ قابلة للإشتقاق على الفترة I و

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x).$$

تمرين

1. أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \sin(x^2 + 3x + 1)$
2. برهن أنه إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق وزوجية فإن الدالة f' هي فردية. و إذا كانت الدالة f فردية فإن الدالة f' زوجية.

مبرهنة

لتكن دالة f متصلة ومطردة فعلا على فترة $I =]a, b[$. و إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق في النقطة $x_0 \in]a, b[$, مع $f'(x_0) \neq 0$. فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للإشتقاق في النقطة $f(x_0)$ و

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

البرهان

لكل $y \in f(]a,b[)$, يوجد عنصر وحيد $x \in]a,b[$ بحيث $y = f(x)$. و نلاحظ أنه إذا كانت y تقترب من $f(x_0)$ فإن x يقترب من x_0 لأن f^{-1} متصلة.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)}.$$

نتيجة

لتكن دالة $f\colon I \longrightarrow J$ تقابل و I و J فترتين مفتوحتين. نفرض أن f قابلة للإشتقاق على الفترة I و $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in I$. إذا f^{-1} قابلة للإشتقاق على الفترة J و

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

أمثلة

1. $f(x) = \sin x\colon\ ]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow]-1, 1[,$
$$(f^{-1})'(x) = (\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
2. $f(x) = \cos x\colon]0, \pi[\longrightarrow]-1, 1[,$
$$(f^{-1})'(x) = (\cos^{-1})'(x) = \frac{1}{\sin(\cos^{-1}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
3. $f(x) = \tan x\colon\ ]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R},$
$$(f^{-1})'(x) = (\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$
4. $f(x) = \cot x\colon\ ]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R},$
$$(f^{-1})'(x) = (\cot^{-1})'(x) = \frac{-1}{1+\cot^2(\cot^{-1}(x))} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

تعريف

1. نقول أن دالة $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ لها قيمة عظمى محلية (قيمة صغرى محلية) عند النقطة $a \in I$ إذا وجد جوار V للنقطة a في I بحيث $f(a) \leq f(x)$, ($f(a) \geq f(x)$) لكل $V \ni x$.
2. نقول أن الدالة f لها قيمة قصوى محلية عند النقطة a إذا كانت قيمتها في هذه النقطة هي قيمة عظمى محلية أوقيمة صغرى محلية.

مبرهنة فيرما

مبرهنة فيرما

لتكن دالة $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة على فترة مفتوحة I و قابلة للإشتقاق عند نقطة $a \in I$.
إذا كانت الدالة لها قيمة قصوى محلية عند النقطة a فإن $f'(a) = 0$.

البرهان

نفرض أن f لها قيمة عظمى محلية عند النقطة a. إذا يوجد $\alpha > 0$ بحيث $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[$. إذا كان $0 < h < \alpha$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$ إذا $f'(a) \leq 0$ و إذا كان $-\alpha < h < 0$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$, إذا $f'(a) \geq 0$, و نستنتج أن $f'(a) = 0$.

ملاحظة

عكس البرهنة السابقة غير صحيح. يكفي أن نأخذ الدالة $f(x) = x^3$ عند النقطة 0.

مبرهنة رول

مبرهنة رول

لتكن دالة $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة وقابلة للإشتقاق على الفترة $]a,b[$ و $f(a)=f(b)$،
إذا يوجد $c \in]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$.

البرهان

إذا كانت الدالة f ثابتة فإن $f'(x)=0$ لكل $x \in]a,b[$.
إذا كانت الدالة f غير ثابتة، يوجد x_1 و x_2 في $I=[a,b]$ بحيث

$$f(x_1)=M=\sup_{x\in I} f(x), \quad f(x_2)=m=\inf_{x\in I} f(x)$$

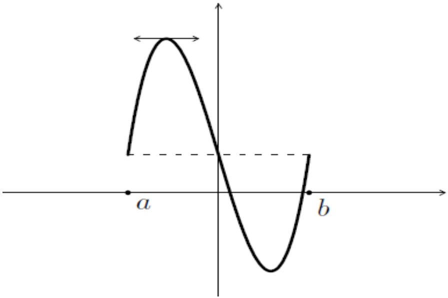
لأن f متصلة. إذا أحد النقطتين x_1 أو x_2 موجود في الفترة المفتوحة $]a,b[$. إذا عند النقطة x_1 أو x_2 f لها قيمة قصوى على الفترة $]a,b[$. و باستعمال مبرهنة فيرما نستنتج أن $f'(x_1)=0$ أو $f'(x_2)=0$.

تمرين

لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow]a, b[\; :f$ دالة متصلة و $f(a+) = f(b-)$, مع $f(a+) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ و $f(b-) = \lim_{x\to b^-} f(x)$.
أثبت أنه يوجد $c \in]a, b[$ حيث $f'(c) = 0$.
في هذه الحالة يمكن تمديد الدالة على الفترة المغلقة كدالة متصلة.

تمرين

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, +\infty[$, و قابلة للإشتقاق على الفترة المفتوحة $]a, +\infty[$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$, إذا يوجد $c \in]a, +\infty[$ بحيث $f'(c) = 0$.


a
b

إذا كان $A = (a, f(a))$ و $B = (b, f(b))$, يوجد $C = (c, f(c))$ فوق بيان الدالة f,
$c \in]a, b[$ أين يكون المماس للبيان في هذه النقطة موازيا للمحور $(0, x)$.

ملاحظة

فرضية أن الدالة f قابلة للإشتقاق على الفترة المفتوحة $]a, b[$ ضرورية.
يمكن أن ناخذ الدالة $f(x) = |x|$ على الفترة $[-a, a]$.
الدالة لها قيمة صغرى محلية عند 0 و ليست قابلة للإشتقاق في 0.

مبرهنة

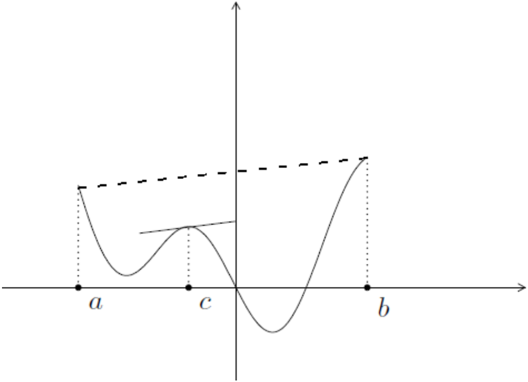
لتكن دالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ و قابلة للإشتقاق على الفترة $]a, b[$, إذا يوجد $c \in]a, b[$ بحيث $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

البرهان

لتكن الدالة

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

الدالة g متصلة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق على الفترة $]a, b[$ و $g(a) = g(b) = 0$,
إذا باستعمال مبرهنة رول يوجد $c \in]a, b[$ بحيث $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$,
إذا $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.


a
c
b

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ يمثل ميل الحبل $[AB]$ و $f'(c)$ يمثل المماس لبيان الدالة $y=f(x)$ في النقطة $C=(c,f(c))$. المبرهنة تاكد وجود $c\in]a,b[$ بحيث يكون المماس لبيان الدالة f في النقطة $C=(c,f(c))$ يكون موازيا للحبل $[AB]$.

مبرهنة

لتكن دالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ و قابلة للإشتقاق على الفترة المفتوحة $]a, b[$, إذا يوجد $\theta \in]0, 1[$ بحيث

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a + \theta(b - a)).$$

نتيجة

لتكن $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على الفترة المفتوحة $]a,b[$. إذا f ثابتة على الفترة $[a,b]$ إلا وإذا كان $f' = 0$ على $[a,b]$.

البرهان

من البديهي أنه إذا كانت الدالة ثابتة على الفترة فإن $f' = 0$ على $[a,b]$.
إذا كانت $f' = 0$ على الفترة $[a,b]$،
إذا، لكل $x \in]a,b]$، $f(x) - f(a) = (x-a)f'(c) = 0$ لأن $f' = 0$ على $]a,b[$ و $c \in]a,b[$، إذا $f(x) = f(a)$، $\forall x \in]a,b]$.

نتيجة

لتكن دالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ و قابلة للإشتقاق على الفترة $]a, b[$.
الدالة f تزايدية على $[a, b]$ إلا و إذا كان $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$.

البرهان

إذا كانت الدالة f تزايدية و $x \in]a, b[$. إذا

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \geq 0$$

لأن $f(x+h) \geq f(x)$.

إذا كانت $\forall x \in]a, b[\ , f'(x) \geq 0$.

باستعمال مبرهنة القيمة المتوسطة، إذا كان $a \leq x < y \leq b$ فإن $f(x) - f(y) = (x-y)f'(c)$, مع $c \in]x, y[\subset]a, b[$. إذا $f(x) \leq f(y)$.

ملاحظة

إذا كانت $f' > 0$ على $]a, b[$ وf تزايدية قطعا.

تمرين

باستعمال مبرهنة القيمة المتوسطة أثبت ما يلي

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\ldots+\frac{1}{n\log n}\right)=+\infty,$$

و أوجد $\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x}}\right]$.

مبرهنة

لتكن دالتين f و g متصلتين على الفترة $[a, b]$ و قابلة للإشتقاق على الفترة $]a, b[$. و نفرض كذلك $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in]a, b[$. إذا يوجد $c \in]a, b[$ بحيث
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

البرهان
نلاحظ أن $g(b) - g(a) \neq 0$, إذا وجد $a < d < b$ بحيث $g'(d) = 0$. و لتكن الدالة

$$h(x) = f(x) - f(a) - (f(b) - f(a))\frac{g(x) - g(a)}{g(b) - g(a)}.$$

h تحقق شروط مبرهنة رول إذا يوجد $c \in]a, b[$ بحيث $h'(c) = f'(c) - g'(c)\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$, وهذا يعطي المطلوب.

لتكن f و g دالتين متصلتين على $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, مع $\varepsilon > 0$. الدوال f و g قابلة للإشتقاق على $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\setminus\{a\}$ و $f(a) = g(a) = 0$. إذا كانت $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (λ عدد حقيقي أو $\pm\infty$), إذا $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

البرهان

إذا كان $a \neq x$ يوجد $c \in]a, x[$ أو في $]x, a[$ بحيث $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$.
إذاً، إذا كان x يقترب من a فإن c يقترب من a و $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ تقترب من λ. بما أن $f(a) = g(a) = 0$ هذا يكفي لبرهنة المبرهنة.
المبرهنة ليست صحيحة في الإتجاه المعاكس.
لناخذ الدالة $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ إذا كان $x \neq 0$ و $f(0) = 0$, $g(x) = \sin x$ و $a = 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sin x}.x.\sin(\frac{1}{x}) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

و

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = (2x\sin(\frac{1}{x}) - \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\cos x}$$

وهذه ليس لها نهاية عندما x يقترب من 0.

تمرين

باستعمال قاعدة لوبيتال, برهن أن الدالة $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, إذا كان $x \in \mathbb{R}^*$ يمكن تمديدها كدالة $\mathcal{C}^2$ على $\mathbb{R}$. و نفس الشئ بالنسبة للدالة $g(x) = \cot x - \dfrac{1}{x}$.

مبرهنة

لتكن $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة $\mathcal{C}^n$ على $[a,b]$. ونفترض أن الدالة $f^{(n)}$ قابلة للإشتقاق على $]a,b[$. إذا يوجد $c \in]a,b[$ بحيث

$$f(b) = f(a) + \sum_{p=1}^{n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \qquad (3)$$

تعريف

1. العدد $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ يسمى باقي لاقرانج لمفكوك تايلور للدالة f في النقطة a.
2. المجموع $\sum_{p=0}^{n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)$ يسمى مفكوك تايلور للدالة f في النقطة a من الدرجة n.
3. إذا كان $0 = a$ مفكوك تايلور للدالة f يسمى **مفكوك تايلور ماكلوران** و لنا ما يلي

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \quad (4)$$

البرهان

الدالة $\mathbb{R} \longrightarrow [a, b] :h$ المعرفة كالتالي $h(x) = f(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)$ قابلة للإشتقاق لدرجة n على الفترة $[a, b]$ و $h^{(n)}$ قابلة للإشتقاق على $]a, b[$. كذلك $h(a) = h'(a) = \ldots = h^{(n)}(a) = 0$. لتكن $g(x) = h(x) - (\frac{x-a}{b-a})^{n+1} h(b)$. الدالة g تحقق $g(a) = g(b) = 0$ و $g^{(p)}(a) = 0$ لكل $0 \leq p \leq n$. باستعمال مبرهنة رول $]b_1 \in]a, b$ بحيث $g'(b_1) = 0$, $g'(a) = g'(b_1) = 0$, توجد $]b_2 \in]a, b_1$ بحيث $g''(b_2) = 0$. إذا باستعمال الإستقراء الرياضي يوجد $]b_n \in]a, b_{n-1}$ بحيث $g^{(n)}(b_n) = 0$. الدالة $g^{(n)}$ متصلة على $[a, b_n]$ و قابلة للإشتقاق على $]a, b_n[$, يوجد $]c \in]a, b_n$ بحيث $g^{(n+1)}(c) = 0$. و لكن $g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - (n+1)! \frac{h(b)}{(b-a)^{n+1}}$, وهذا يعطي المطلوب.

مبرهنة

لتكن دالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ مع افتراض وجود $f^{(n+1)}(a)$, إذا توجد دالة $\lambda(x)$ معرفة على $]a, b[$ و تحقق

5) (

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n+1} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \lambda(x) \quad \text{with} \ \lim_{x \to a} \lambda(x) = 0.$$

البرهان

لتكن ψ الدالة المعرفة على $[a, b]$ كالتالي

$$\psi(t) = f(t) - \sum_{p=0}^{n+1} \frac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) - \lambda \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

إذا كان $x \in]a, b]$, نختار العدد λ بحيث يحقق $\psi(x) = 0$. إذا الدالة ψ تحقق فرضيات مبرهنة رول $\psi(x) = \psi(a) = 0$, إذا يوجد $x_1 \in]a, x[$ بحيث $\psi'(x_1) = 0$. باستعمال مبرهنة رول على الدالة ψ' على $[a, x_1]$, يوجد $x_2 \in]a, x_1[$ بحيث $\psi''(x_2) = 0$ وهكذا يوجد $x_1, \ldots, x_n$ بحيث $x_j < x_{j+1}$ و $\psi^{(j)}(x_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. $\psi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - \lambda(x)(t-a) - f^{(n)}(a)$, $\psi^{(n)}(x_n) = 0$ إلا وإذا كان $f^{(n)}(x_n) = \lambda(x)(x_n - a) + f^{(n)}(a)$. إذا $\lambda(x) = \dfrac{f^{(n)}(x_n) - f^{(n)}(a)}{x_n - a}$.

ولكن إذا كان x يقترب من a, x_n تقترب من a و $\lambda(x)$ تقترب من $f^{(n+1)}(a)$, و هذا يبرهن المطلوب.

نذكر بمبرهنة التكامل بالتجزيء

مبرهنة

لتكن f و g دالتين من درجة C^1 على فترة I, إذا

1. $\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx$.
2. لتكن a و b في I, إذا $\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$.

تطبيق

$$\int_0^1 x\tan^{-1} x dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1} x\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

مبرهنة

لتكن f و g دالتين من درجة C^n على فترة I.

$$\int f(x)g^{(n)}(x)\,dx = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p f^{(p)}(x)\,g^{(n-1-p)}(x) + (-1)^n\int g(x)f^{(n)}(x)\,dx.$$

البرهان

$$\Big(\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p f^{(p)}(x)g^{(n-1-p)}(x)\Big)' = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p f^{(p+1)}(x)g^{(n-1-p)}(x) + \sum_{p=0}^{n-1}($$

$$= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p f^{(p)}(x)g^{(n-p)}(x) - \sum_{p=1}^{n}(-1)^p$$

$$= f(x)g^{(n)}(x) - (-1)^n g(x)f^{(n)}(x).$$

تطبيق مفكوك تايلور مع باقي تكامل

إذا طبقنا النظرية السابقة مع $g(t) = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ نجد ما يلي

مبرهنة

لتكن f دالة من درجة C^n معرفة على فترة I. إذا كان a و x في I فإن

$$f(x) = f(a) + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt.$$

تمرين

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق $f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,dt$.
(a عدد حقيقي مثبت)

1. أثبت أن f C^∞ و أن $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x)$.
2. نفرض أن $|a| < 1$. أثبت باستعمال نظرية تايلور أن $f(x) \equiv 0$.

تمرين

1. أ) باستعمال نظرية تايلور أثبت أن $e < \frac{8}{3}$.
ب) احسب $\int_0^1 \log(1+t)\,dt$ و أثبت أن
$\int_0^1 \log(1+t)\,dt < \log(\int_0^1 (1+t)\,dt)$.
ج) أثبت أن $\ln(1+v) \leq v$، لكل $v > -1$.
2. أ) لتكن $u\colon [0,1] \longrightarrow]0,+\infty[$ دالة متصلة.
باستعمال السؤال ج) أثبت أنه إذا كان $\int_0^1 u(t)\,dt = 1$، فإن
$\int_0^1 \ln u(t)\,dt \leq 0$.
كيف نختار u حتى تكون المساواة.
ب) لتكن $f\colon [0,1] \longrightarrow]0,+\infty[$ دالة متصلة. أثبت أن

تمرين

لكل دالة f معرفة على $[0,+\infty[$ وقابلة لتكامل ريمان على كل فترة مغلقة ومحدودة في $[0,+\infty[$, نعرف الدالة $F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, لكل $x>0$.

1. أثبت أن F متصلة.
2. أ) أثبت أنه إذا $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=\ell$, فإن $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x)=\ell$.

   ب) احسب $F(x)$, إذا كان $f(x)=\cos x$ و ادرس عكس أ).

   ج) لتكن $(U_n)_n$ متتالية تحقق $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n=\ell$ و لتكن f معرفة كالتالي $f(x)=U_n$ لكل $x\in[n,n+1[$.

   أثبت أن $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=\ell$.

   احسب $\int_0^n f(t)\,dt$ و استنتج أن

$$\lim \quad \frac{U_0+U_1+\ldots+U_n}{} = \ell.$$

مثال 1

إذا كانت الدالة $f(x) = e^x$, إذا $f^{(n)}(x) = e^x$
فمفكوك تايلور لاقرانج و مفكوك تايلور يونغ و مفكوك تايلور مع باقي تكامل هم على التوالي

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{cx},$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x),$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt.$$

مع $0 < c < 1$ و $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

مثال 2

إذا كانت الدالة $f(x) = \cosh(x)$، إذا $f^{(2n)}(x) = \cosh(x)$ و $f^{(2n+1)}(x) = \sinh(x)$، و نجد ما يلي

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sinh(cx),$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n} \varepsilon(x),$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{2n!} \sinh(t)\, dt.$$

مع $0 < c < 1$ و $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

مثال 3

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cosh(cx),$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x),$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cosh(t)\, dt.$$

مثال 4

إذا كانت الدالة $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ على الفترة $]-1,1[$. فإن لكل $n\in\mathbb{N}$، $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\frac{x^{n+1}}{(1-cx)^{n+1}},$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+x^n\varepsilon(x),$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\int_0^x\frac{(n+1)(x-t)^n}{(1-t)^{n+2}}dt.$$

(نذكر بأن $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.)

مثال 5

إذا كانت الدالة $f(x) = \ln(1-x)$ على الفترة $]-1,1[$ فإن لكل $n \in \mathbb{N}$، $f^{(n)}(x) = -\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$.

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-cx)^{n+1}},$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + x^n \varepsilon(x),$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\, dt.$$

مثال 6

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(1+cx)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+x^n\varepsilon(x),$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+\int_0^x\frac{(n+1)(-1)^{n+1}(x-t)^n}{(1-t)^{n+2}}dt.$$

مثال 7

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+cx)^{n+1}},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + +x^n \varepsilon(x),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^n (x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

مثال 8

$$f(x) = \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$$ و

$$f^{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}+\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right).$$

$$\tanh^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\frac{x^{2n+2}}{4(n+1)}\left(\frac{1}{(1-cx)^{2n+2}}-\frac{1}{(1+cx)^{2n+2}}\right),$$

$$\tanh^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+x^{2n+1}\varepsilon(x),$$

$$\tanh^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^{2n+1}\left(\frac{1}{(1-t)^{2n+2}}-\frac{1}{(1+t)^{2n+2}}\right) d$$

مثال 9

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ f^{(n)}(x) = \cos(x + \tfrac{n\pi}{2}),\ ,f(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(cx + \frac{(2n+1)\pi}{2})\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^{n+1} \sin(cx),\end{aligned}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n}\varepsilon(x),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\, dt.$$

مثال 10

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(cx),$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x),$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(t)\, dt.$$