الصيغة العامة لنظرية كوشي

د. المنجي بلال

18 جويلية 2017

المحتويات

باب 1

الصيغة العامة لنظرية كوشي و تطبيقاتها

1.1 الصيغة العامة لنظرية كوشي

1.1.1 الدورات في $\mathbb{C}$

تعريف 1.1.1
ليكن $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ مجموعة من المنحنيات قابلة للمفاضلة باتصال قطعة قطعة في مفتوح Ω. نعرف $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ المجموع الشكلي لهذه المنحنيات المغلقة كما يلي:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\ dz,$$

لكل دالة متصلة f على Ω.
Γ يسمى دورة.
يعرف عدد لف الدورة Γ في النقطة $z \notin \bigcup_{j=1}^{n} (\text{support } \gamma_j)$ العدد

$$\text{Ind}(\Gamma, z) = \sum_{j=1}^{n} \text{Ind}(\gamma_j, z).$$

النتيجة الأساسية في هذا الفصل هو ما يلي:

مبرهنة 1.1.1
لتكن $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ و Γ دورة بحيث $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$، $\forall\ z \notin \Omega$ إذاً:

.1

$$f(z).\text{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\ dw, \qquad \forall\ z \in \Omega \setminus \text{Supp}\Gamma.$$

2. $\int_\Gamma f(w)\ dw = 0$.

3. إذا كان Γ_1 و Γ_2 دورتين في Ω بحيث $\mathrm{Ind}(\Gamma_1, z) = \mathrm{Ind}(\Gamma_2, z)$، $\forall\ z \notin \Omega$، فإن

$$\int_{\Gamma_1} f(w)\ dw = \int_{\Gamma_2} f(w)\ dw.$$

البرهان
2) و 3) هي نتيجة من 1)، لأنه لإثبات مثلا 2) مع الشرط $\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0$، $\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$، نأخذ الدالة F المعرفة على Ω بما يلي:

$$F(w) = \begin{cases} (w-z)f(w) & \text{if } w \neq z \\ 0 & w = z \end{cases}.$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma f(w)\ dw = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \frac{F(w)}{w-z}\ dw = F(z)\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0.$$

لإثبات 3) يكفي أن نأخذ الدورة $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$.
ولإثبات

$$f(z).\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\ dw \tag{1.1}$$

لكل $z \in \Omega \setminus \mathrm{Supp}\Gamma$، يكفي أن نثبت

$$\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\ dw - \int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}\ dw = 0.$$

لإثبات المبرهنة 1.1.1، نستعمل المبرهنة التمهيدية التالية:

مبرهنة تمهيدية 1.1.2
لتكن $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة هولومرفية و $g\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ الدالة المعرفة بما يلي:

$$g(z,w) = \begin{cases} f'(z) & \text{if} \quad z = w \\ \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{if} \quad z \neq w \end{cases}.$$

g متصلة و لكل $w \in \Omega$، الدالة $g(z\ w) \longmapsto z$ هولومرفية.

برهان المبرهنة التمهيدية 1.1.2

الدالة g متصلة على $\Omega \setminus \{(a\ a);\ a \in \mathbb{C}\}$. لكل $(a,a) \in \Omega$، يوجد $R > 0$ بحيث $D(a,R) \subset \Omega$. ليكن $r < R$، $w, z \in \overline{D(a,r)}$ و المنحنى γ المعرفة بما يلي: $\gamma(t) = tw + (1-t)z$ لكل $t \in [0,1]$. إذا كان $w \neq z$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(\gamma(t))\ dt &= \frac{1}{w-z}\int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt = \frac{1}{w-z}\int_0^1 (f\circ\gamma)'(t)\ dt\\ &= \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = g(w,z).\end{aligned}$$

إذاً $g(w,z) - g(a,a) = \displaystyle\int_0^1 (f'(\gamma(t)) - f'(a))\ dt$. لأن الدالة f' متصلة، g متصلة في النقطة (a,a).

نذكر بمبرهنة Fubini.

مبرهنة 1.1.3 (مبرهنة Fubini)

إذا كانت $g\colon [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ دالة متصلة، فإن

$$\int_a^b \left(\int_c^d g(t,s)\ ds\right) dt = \int_c^d \left(\int_a^b g(t,s)\ dt\right) ds.$$

برهان المبرهنة 1.1.1

الدالة $h\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ المعرفة بما يلي: $h(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_\Gamma g(w,z)\ dw$ متصلة على Ω. و لأثبات ذلك، نأخذ متتالية $(z_n)_n$ متقاربة في Ω و نهايتها $z \in \Omega$. الدالة g متصلة بانتظام على كل متراص. ليكن $K_1 = \mathrm{Supp}\Gamma$ و K_2 مغلق قرص مركزه z. نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} g(w,z_n) = g(w,z)$ بانتظام لكل $w \in K_1$. و نستنتج المطلوب بسهولة. (يمكن استعمال مبرهنة التقارب المسيطرة Dominated Convergence Theorem لأن لكل متراص K في Ω، الدالة g محدودة على $\mathrm{Supp}(\Gamma)\times K$.)

لإثبات أن الدالة h هولومرفية على Ω، نستعمل مبرهنة Morera و مبرهنة Fubini .

ليكن Δ مثلث في Ω.

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = \int_{\partial\Delta}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma g(w,z)\ dw\right)\ dz = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma\left(\int_{\partial\Delta} g(w,z)\ dz\right)\ dw = 0,$$

إذاً الدالة h هولومرفية.

نريد إثبات أن الدالة $h \equiv 0$ على Ω.

لذلك نعرف دالة H هولومرفية على $\mathbb{C}$، تساوي الدالة h على Ω و $\lim\limits_{|z|\to+\infty} H(z) = 0$.

ليكن

$$V = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}\Gamma;\ \mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0\}.$$

المجموعة V مفتوحة غير خالة، $\Omega^c \subset V$.
لتكن الدالة h_1 المعرفة على V بما يلي:

$$h_1(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

الدالة h و h_1 متساوية على $\Omega \cap V$، h_1 هولومرفية على V.
نعرف الدالة H على $\Omega \cup V$ بما يلي:

$$H(z) = \begin{cases} h(z) & \text{if} \quad z \in \Omega \\ h_1(z) & \text{if} \quad z \in V \end{cases}.$$

H هولومرفية على $\Omega \cup V = \mathbb{C}$ لأن $\Omega^c \subset V$.

سنثبت أن $\lim\limits_{|z| \to +\infty} H(z) = 0$.

بما أن Γ دورة، إذًا لكل $|z|$ كبير بما يكفي، $\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0$. إذًا الدالة H المعرفة بما يلي:
$H(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi} \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw$.
$\left| \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw \right| \leq \dfrac{1}{|z| - R} \sup\limits_{w \in \mathrm{Supp}\Gamma} |f(w)| L(\Gamma) \underset{|z| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$، حيث $L(\Gamma)$ هو طول Γ.

□

ملاحظة 1.1.1

لتكن f دالة هولومرفية على القرص $D(0, R)$ و $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ منشور تايلور للدالة f. لكل $0 < r < R$، ليكن γ_r المنحنى المغلق المعرفة بما يلي: $\gamma_r(t) = re^{\mathrm{i}t}$، لكل $t \in [0, 2\pi]$. إذا كان $0 < r_1 < r_2 < R$ و $\Gamma = \gamma_{r_2} - \gamma_{r_1}$ الدورة و الدالة $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}$ المعرفة على القرص المثقوب $\Omega = D(0, R) \setminus \{0\}$ لكل $n \in \mathbb{N}_0$. إذًا $\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0$ لكل $z \notin \Omega$، إذًا $\displaystyle\int_\Gamma g(z)dz = 0$.
نستنتج أن

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)}{z^{n+1}},$$

و هذا يثبت أن التكامل التالي للتعبير عن a_n،

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}$$

غير متغير بالعدد r، لكل $0 < r < R$.

1.2 Laurent متسلسلة لوران

1.2.1 متسلسلة لوران

مبرهنة 1.2.1
ليكن Ω مفتوح في $\mathbb{C}$ يحتوي على الحلقة $\{z \in \mathbb{C};\ 0 < r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2 < +\infty\}$ و لتكن f دالة هولومرفية على Ω. إذاً لكل $z \in \{z \in \mathbb{C};\ r_1 < |z - z_0| < r_2\}$،

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

حيث $\gamma_1(t) = z_0 + r_1 e^{it}$ و $\gamma_2(t) = z_0 + r_2 e^{it}$، $t \in [0, 2\pi]$.

البرهان
الدورة $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ موجودة في Ω و إذا كان $|a - z_0| < r_1 < r_2$، فإن $\mathrm{Ind}(\Gamma, a) = 0$.
إذا كان $|a - z_0| > r_2 > r_1$، $\mathrm{Ind}(\Gamma, a) = 0$، إذاً $\mathrm{Ind}(\Gamma, a) = 0$ لكل $a \notin \Omega$. نستنتج من المبرهنة 1.1.1 أن:

$$f(z)\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

و لكن إذا كان $r_1 < |z - z_0| < r_2$، فإن $\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 1$، إذاً

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

□

مبرهنة 1.2.2
ليكن Ω الحلقة المعرفة بما يلي:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ 0 \leq s_1 < |z - z_0| < s_2 \leq +\infty\}.$$

لكل دالة هولومرفية f على Ω، توجد متتالية وحيدة $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ بحيث لكل $z \in \Omega$

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{1.2}$$

بحيث لكل $n\in\mathbb{Z}$،

$$a_n=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \tag{1.3}$$

$\gamma_r(t)=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ حيث $s_1<r<s_2$ و $t\in[0,2\pi]$.
المتسلسلة (1.2) متقاربة مطلقا على Ω و متقاربة بانتظام على كل متراص في Ω.
الجزئ $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ يسمى الجزئ الشاذ للدالة f في النقطة z_0 في الحلقة.

البرهان
ليكن r_1 و r_2 عددين بحيث $s_1<r_1<r_2<s_2$ و ليكن $z\in\Omega$ بحيث $r_1<|z-z_0|<r_2$.
باستعمال المبرهنة 1.2.1، نستنتج ما يلي:

$$f(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw-\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

- لنأخذ التكامل الأول: $\displaystyle\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$.

بما أن $|\frac{z-z_0}{w-z_0}|<1$ فإن

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{(w-z_0)}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}.$$

$$\frac{1}{w-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}.$$

إذا كان $z\in\overline{D(z_0,r)}$ و $w\in\mathscr{C}(z_0,r_2)$، $\displaystyle|\frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}|\leq\frac{1}{r_2}(\frac{r}{r_2})^k$. إذًا المتسلسلة $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ تتقارب بانتظام على الدائرة $\mathscr{C}(z_0,r_2)$ و بالنسبة للعدد z لكل $|z-z_0|\leq r$، مع $r<r_2$.
بما أن الدالة f متصلة، فهي محدودة على الدائرة $\mathscr{C}(z_0,r)$ و

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw.$$

• لنأخذ التكامل الثاني $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$.

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)}=\frac{-1}{(z-z_0)}\frac{1}{(1-\frac{w-z_0}{z-z_0})}=\frac{-1}{(z-z_0)}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{w-z_0}{z-z_0})^k.$$

إذا كان $r>r_1$، $|z-z_0|\geq r$ و $|w-z_0|=r_1$، فإن المتسلسلة $\sum_{k\geq 0}(\frac{w-z_0}{z-z_0})^k$ تتقارب بانتظام على الدائرة $\mathscr{C}(z_0,r_1)$ و بالنسبة للعدد z بحيث $|z-z_0|\geq r$.
باستعمال تكامل المعادلة نستنتج أن

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}f(w)(w-z_0)^k\,dw.$$

إذا كان $k=-p-1$، لنا $\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\sum_{k=-\infty}^{-1}(z-z_0)^p\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{p+1}}\,dw=$ $\sum_{-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n$.

المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}a_n(z-z_0)^n$ تتقارب بانتظام على القرص المغلق $\{z\in\mathbb{C};\ |z-z_0|\leq r<r_2\}$.
المتسلسلة $\sum_{n\leq -1}a_n(z-z_0)^n$ تتقارب بانتظام على الحلقة $\{z\in\mathbb{C};\ |z-z_0|\geq r'>r_1\}$. إذاً إذا كان K متراص في Ω، يوجد r و r' بحيث

$$K\subset\{z\in\mathbb{C};\ r'\leq|z-z_0|\leq r\}\subset\{z\in\mathbb{C};\ r_1<|z-z_0|<r_2\}$$

و بذلك تكون المتسلسلة $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-z_0)^n$ متقارب بانتظام على المتراص K.

• **أحادية المعامل**

نفرض أن $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n(z-z_0)^n$ و المتسلسلة تتقارب بانتظام على كل متراص في الحلقة

$$\{z\in\mathbb{C};\ s_1<|z-z_0|<s_2\}.$$

ليكن $s_1 < r < s_2$ و $k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \frac{(w-z_0)^n}{(w-z_0)^{k+1}}$، حيث $w = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$، $\theta \in [0, 2\pi]$، إذًا

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^k}\, d\theta = b_k.$$

إذًا المعامل b_k و حيد.

□

ملاحظات 1.2.1

لتكن f دالة هولومرفية على الحلقة $\{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z-z_0| < r\}$.

1. نقول أن النقطة z_0 هي شاذة معزولة.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n.$$

المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ تتقارب على القرص $D(z_0, r)$ و المتسلسلة $\sum_{n\leq -1} a_n (z-z_0)^n$ تتقارب على الحلقة $\{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| > 0\}$.

2. عندما تكون النقطة الشاذة قابلة للإزالة (أو نقطة عادية)، الجزئ الشاذ للدالة f يساوي 0 لأن $a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_s} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw$، حيث $0 < s < r$. إذا كان $n < 0$،

$$|a_n| \leq \frac{1}{s^n} \sup_{|w-z_0|=s} |f(w)| \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$$

إذًا $a_n = 0$ لكل $n < 0$.

3. إذا كان z_0 قطب بدرجة m، الجزئ الشاذ للدالة f يساوي $\sum_{n=-m}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ و $a_{-m} \neq 0$، لأن $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \alpha$، حيث $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

تعريف 1.2.1

إذا كانت z_0 نقطة شاذة معزولة بالنسبة للدالة الهولومرفية f على $\Omega \setminus \{z_0\}$ و إذا كان

$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ على الحلقة $\Omega \supset \{z\in\mathbb{C};\ 0<|z-z_0|<r\}$. العدد a_{-1} يسمى الباقي للدالة f في النقطة z_0 و نرمز بذلك: $\mathrm{Res}(f,z_0)$.

ملاحظات 1.2.2

1. إذا كانت f دالة هولومرفية على الحلقة $\{z\in\mathbb{C};\ 0<|z-z_0|<r\}$، حيث $0<s<r$, فإن

$$a_{-1}=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_s} f(w)\ dw=\mathrm{Res}(f,z_0).$$

2. (*The Bessel's function* دالة بيسال)

لتكن الدالة $f(z)=e^{\frac{w}{2}(z-\frac{1}{z})}$.

$$f(z)=e^{\frac{w}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(w)z^n.$$

$$J_n(w)=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{C}(0,1)} e^{\frac{w}{2}(z-\frac{1}{z})}\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

1.2.2 طرق إحتساب الباقي

مبرهنة 1.2.3 (الباقي إذا كان القطب بسيط)
إذا كان z_0 قطب بسيط بالنسبة للدالة f، فإن

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

إذا كان $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$، حيث $h'(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$ و $g(z_0)\neq 0$, فإن

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

أمثلة 1.2.1
• إذا كانت الدالة f هولومرفية و z_0 صفر بدرجة k بالنسبة للدالة f، فإن z_0 هو قطب بسيط بالنسبة للدالة $\dfrac{f'}{f}$ و $\mathrm{Res}(\dfrac{f'}{f},z_0)=k$.

$f(z) = (z-z_0)^k g(z)$، حيث $g(z_0) \neq 0$، إذاً $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{k}{(z-z_0)} + \dfrac{g'(z)}{g(z)}$.

• إذا كان z_0 قطب بدرجة k بالنسبة للدالة f، فإن

z_0 هو قطب بسيط بالنسبة للدالة $\dfrac{f'}{f}$ و $\text{Res}(\dfrac{f'}{f}, z_0) = -k$.

$f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^k}$، حيث $g(z_0) \neq 0$، إذاً $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{-k}{(z-z_0)} + \dfrac{g'(z)}{g(z)}$.

مبرهنة 1.2.4 (الباقي بالنسبة لقطب بدرجة m)
إذا كان z_0 هو قطب بدرجة m بالنسبة للدالة f، فإن

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right].$$

1.3 Residu's Theorem مبرهنة البواقي

مبرهنة 1.3.1 (*Residu's Theorem* مبرهنة البواقي)
ليكن $z_1, \dots, z_p$ في Ω و γ دورة في $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$ بحيث $\text{Ind}(\gamma, z) = 0$ لكل $z \notin \Omega$.
إذا كانت

$$f \colon \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_p\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

دالة هولومرفية، فإن

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{p} \text{Res}(f, z_j) \text{Ind}(\gamma, z_j).$$

البرهان

ليكن D_j قرص مركزه z_j و لا يحتوي على أي من $z_k \notin D_j$، $k \neq j$.
إذاً لكل $z \in D_j$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n,j} (z-z_j)^n, \qquad z \neq z_j.$$

نعرف الدالة f_j بما يلي:

$$f_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,j} (z-z_j)^n.$$

الدالة f_j هولومرفية على $\mathbb{C}\setminus\{z_j\}$ و الدالة $F = f - \sum_{j=1}^{p} f_j$ هولومرفية على $\Omega\setminus\{z_1,\dots,z_p\}$ و يمكن تمديدها كدالة هولومرفية على Ω.

بالستعمال مبرهنة كوشي $\int_\gamma F(z)\,dz = 0$. إذًا

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{p}\int_\gamma f_j(z)\,dz = 2\mathrm{i}\pi\sum_{j=1}^{p}\mathrm{Res}(f,z_j)\mathrm{Ind}(\gamma,z_j).$$

□

1.4 حساب بعض التكاملات

1.4.1 التكاملات على الصيغة $I = \int_0^{2\pi} R(\sin t,\cos t)dt$

حيث R دالة كسرية و ليس لها أقطاب على دائرة الوحدة.

ليكن $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$، $t\in[0,2\pi]$ و $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$، $t\in[0,2\pi]$.

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \frac{1}{\mathrm{i}z}R(\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\frac{1}{z}),\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))\,dz \\ &= 2\pi\sum \mathrm{Res}(\frac{1}{z}R(\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\frac{1}{z}),\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))). \end{aligned}$$

المجموع يكون على كل أقطاب الدالة $(\frac{1}{z}R(\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\frac{1}{z}),\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})))$ داخل قرص الوحدة.

مثال 1.4.1

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\sin t},\quad a>1.$$

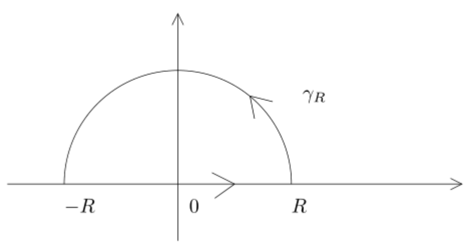
$I = 2\pi\mathrm{Res}(\frac{2\mathrm{i}}{z^2+2\mathrm{i}az-1},z_0)$، حيث $z_0 = -\mathrm{i}a+\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}$ هو القطب الوحيد للدالة $(\frac{2\mathrm{i}}{z^2+2\mathrm{i}az-1})$ داخل قرص الوحدة.

الباقي في النقطة z_0 هو $\frac{\mathrm{i}}{z_0+\mathrm{i}a}$، و

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

1.4.2 التكاملات على الصيغة $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$

حيث P و Q كثيرات حدود بحيث $\deg Q \geq \deg P + 2$ و $Q(x) \neq 0$، $\forall x \in \mathbb{R}$.
معتبر الدالة $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ و المنحنى المغلق γ_R المعرفة بما يلي: نصف الدائرة التي نصف قطرها R و مركزها 0 و التي تقع داخل نصف المستوي الأعلى $\mathbb{H}^+ = \{z = x + \mathrm{i}y;\ y > 0\}$. ليكن Γ_R المنحنى المغلق الذي نحصل عليه بتجاور γ_R و الفترة $[-R, R]$. (1.1). نختار R كبير ما يكفي بحيث تكون أقطاب الدالة f موجودة داخل القرص $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < R\}$.



شكل 1.1:

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz + \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\mathrm{i}\pi \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}(f, z_j).$$

المجموع يمتد على كل أقطاب الدالة f التي تقع داخل نصف المستوي الأعلى $\mathbb{H}^+ = \{z = x + \mathrm{i}y;\ y > 0\}$.

مبرهنة تمهيدية 1.4.1 (المبرهنة التمهيدية الأولى لجوردن)
لتكن f دالة متصلة المعرفة على القطاع $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$.
نفرض أن

$$\lim_{R \to +\infty} R \sup_{z \in A_R} |f(z)| = 0,$$

إذاً $\lim_{R\to+\infty}\int_{A_R} f(z)\,dz=0$، حيث A_R هو المنحنى المعرف بما يلي $\theta_0\le\theta\le\theta_1$ و R ‏$|z|=R$.

المبرهنة التمهيدية هي نتيجة مبرهنة التقارب المسيطرة.

باستعمال المبرهنة التمهيدية الأولى لجوردن،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=2\mathrm{i}\pi\sum_{\operatorname{Im} z_j>0}\operatorname{Res}(f,z_j).$$

مثال 1.4.2

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}.$$

أقطاب الدالة f في نصف المستوي الأعلى $\mathbb{H}^+=\{z=x+\mathrm{i}y;\ y>0\}$ هي $z_1=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}$، $z_2=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}=\mathrm{i}$ و $z_3=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}5\pi}{6}}$.
إذاً $I=\frac{\pi}{3}$.

1.4.3 التكاملات على الصيغة $I(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,dx$

<u>الحالة الأولى</u>: P و Q كثيرات حدود بحيث $\deg Q\ge\deg P+2$، $Q(x)\neq 0$، $\forall x\in\mathbb{R}$ و λ عدد حقيقي.

لتكن $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}$.

إذا كان $\lambda\ge 0$، نكامل الدالة f على المنحنى $\gamma_R\cup[-R,R]$، (1.1) و نجد:

$$|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz|\le\int_0^{\pi}|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|R\,d\theta\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

و نستنتج $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,dx=2\mathrm{i}\pi\sum_{\operatorname{Im} z_j>0}\operatorname{Res}(f,z_j)$.

إذا كان $\lambda\le 0$، نلاحظ أن $I(-\lambda)=\overline{I(\lambda)}$، إذاً يمكن أن نكامل الدالة f على المنحنى المغلق المعرف بتجاور الفترة $[-R,R]$ و نصف الدائرة والتي نصف قطرها R و مركزه 0، و تقع

في نصف المستوي الأسفل $\mathcal{H}^- = \{z = x + \mathrm{i}y;\ y < 0\}$، و نجد، $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\, dx = -2\mathrm{i}\pi \sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname{Res}(f, z)$،

المجموع يمتد على أقطاب الدالة f التي تقع في نصف المستوي الأسفل $\mathcal{H}^- = \{z = x+\mathrm{i}y;\ y < 0\}$.

<u>**الحالة الثانية:**</u> $\lambda \in \mathbb{R}^*$، P و Q كثيرات حدود بحيث $\deg Q = \deg P + 1$ و $Q(x) \neq 0$، $\forall x \in \mathbb{R}$.

نعرف الدالة $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}$ و $g(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

التكامل متقاربة و لكن ليس متقارب مطلقا. يمكن أن نقوم بتكامل بالتجزيئ حتى نرجع للحالة السابقة.

للبحث عن قيمة التكامل، يكفي أن نأخذ الحالة $\lambda > 0$.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} f(z)\, dz\right| &\leq \int_0^{\pi} |g(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| R \mathrm{e}^{-\lambda R\sin\theta}\, d\theta \leq M \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda R \sin\theta}\, d\theta \\
&\leq 2M \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\lambda R\sin\theta}\, d\theta \leq 2M \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{\frac{-2\lambda R\theta}{\pi}}\, d\theta = \frac{2M}{2\lambda R}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda R}) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}
$$

$M = \sup_{R\geq 0} R|g(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|$. (يمكن أن نستنتج أن $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda R\sin\theta}\, d\theta = 0$ by مبرهنة التقارب المسيطرة).

إذًا إذا كان $\lambda > 0$،

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\, dx = 2\mathrm{i}\pi \sum_{\operatorname{Im} z_j>0} \operatorname{Res}(f, z_j).
$$

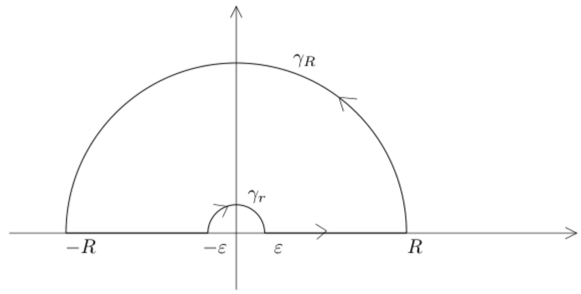
أمثلة 1.4.1

1. $a > 0$, $I(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{x - \mathrm{i}a}\, dx$.

إذا كان $\lambda > 0$، $I(\lambda) = 2\mathrm{i}\pi \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

إذا كان $\lambda < 0$، $I(\lambda) = 2\mathrm{i}\pi \sum \operatorname{Res}(f, z_j)$، z_j هم أقطاب الدالة f في نصف المستوي الأسفل، و لكن الدالة f ليس لها أقطاب في هذا النصف المستوي، إذًا $I(\lambda) = 0$.

2. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$. نأخذ الدالة $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$.
نكامل الدالة f على المنحنى المغلق (1.2).



شكل 1.2:

لإيجاد قيمة التكامل، نحتاج للمبرهنة التمهيدية التالية:

مبرهنة تمهيدية 1.4.2 (المبرهنة التمهيدية الثانية لجوردن)

إذا كانت $f(z) = \frac{A}{z} + \sum_{n\geq 0} a_n z^n$، f الدالة المعرفة على القطاع $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$.
إذاً $\int_{\gamma_r} f(z)\ dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} i(\theta_1 - \theta_0)A$.

البرهان

$$\int_{\gamma_r} f(z)\ dz = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) ir\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ d\theta = iA\int_{\theta_0}^{\theta_1}\ d\theta + i\int_{\theta_0}^{\theta_1} g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) ir\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ d\theta,$$

g هي دالة هولومرفية، $\lim_{r\longrightarrow 0}\int_{\theta_0}^{\theta_1} g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) ir\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ d\theta = 0$.

□

نرجع للبحث عن قيمة التكامل التالي $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
باستعمال مبرهنة الباقي،

$$\int_{-R}^{-r} f(x)\ dx - \int_{\gamma_r} f(z)\ dz + \int_{r}^{R} f(x)\ dx + \int_{\gamma_R} f(z)\ dz = 0.$$

$|\int_{\gamma_R} f(z)\ dz| = |\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}\ d\theta| \leq \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\ d\theta \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

باستعمال المبرهنة التمهيدية الثانية لجوردن: $\int_{\gamma_r} f(z)\ dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{i}\pi$، إذاً $I = \pi$.

3. $I = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin ax\cos bx}{x^2+c^2}dx,$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $c > 0$.

نذكر بالخاصية التالية: $2\sin ax\cos bx = \sin(a+b)x + \sin(a-b)x$.
إذاً $I = \mathrm{Im}(I_1) + \mathrm{Im}(I_2)$، حيث

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{\mathrm{i}(a-b)x}}{x^2+c^2}dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{\mathrm{i}(a+b)x}}{x^2+c^2}dx.$$

نلاحظ أنه إذا كان $a = b$ أو $a = -b$، حساب قيمة I تصبح حساب قيمة I_1 أو I_2.
نفرض أن $a \neq b$ و $a \neq -b$.
$I_1 = \mathrm{i}\pi e^{-(a-b)c}$ إذا كان $a > b$ و $I_1 = -\mathrm{i}\pi e^{(a-b)c}$ إذا كان $a < b$.
كذلك $I_2 = \mathrm{i}\pi e^{-(a+b)c}$ إذا كان $a > -b$ و $I_2 = -\mathrm{i}\pi e^{(a+b)c}$ إذا كان $a < -b$. إذاً

$$I = \pi\left(\mathrm{sign}(a-b)e^{-|a-b|c} + \mathrm{sign}(a+b)e^{-|a+b|c}\right).$$

($\mathrm{sign}(x) = 1$، إذا كان $x > 0$ و $\mathrm{sign}(x) = -1$، إذا كان $x < 0$.)

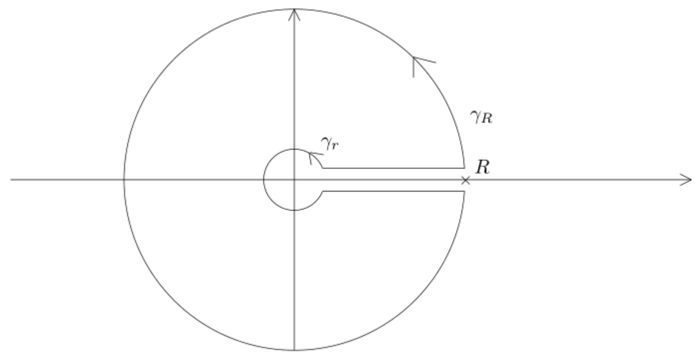
4. نستنتج من المثال السابق أن محول فوريه بلانشيرل *Fourier Plancherel transform* للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2+c^2}$ هي

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\mathrm{i}\pi xt}dt = -\mathrm{i}\pi\mathrm{sign}(x)e^{-2\pi|x|c}, \quad \forall\ x \neq 0.$$

الدالة f هي في $L^2(\mathbb{R})$ و لكن ليست في $L^1(\mathbb{R})$.

1.4.4 التكاملات على الصيغة $I = \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\ln x\ dx$

حيث $Q(x) \neq 0$، $\forall\ x \geq 0$، $\deg Q - \deg P \geq 2$. نعتبر الدالة $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}(\mathrm{log}z)^2$ ($\mathrm{log}z = \ln|z| + \mathrm{i}\theta$، $0 < \theta < 2\pi$.) و المنحنى المغلق التالي:



شكل 1.3:

$$\int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)}(\ln x)^2\,dx+\int_{\gamma_R} f(z)\,dz+\int_R^r \frac{P(x)}{Q(x)}(\ln x+2\mathrm{i}\pi)^2\,dx+\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2\mathrm{i}\pi\sum \mathrm{Res}(f).$$

المجموع يمتد على كل أقطاب الدالة f في $\mathbb{C}$.

باستعمال الشروط على الدالة f، $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ و $\int_{\gamma_r} f(z)\,dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$، إذاً

$$2\mathrm{i}\pi\sum_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{Res}(f,z) = 4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx - 4\mathrm{i}\pi\int_0^{+\infty}\ln x\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

مثال 1.4.3

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+1)(x^2+1)}dx.$$

$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})=\frac{\pi^2(1+\mathrm{i})}{16}$، $\mathrm{Res}(f,-\mathrm{i})=\frac{9\pi^2(1-\mathrm{i})}{16}$، $\mathrm{Res}(f,-1)=\frac{-\pi^2}{2}$. إذاً $I=\frac{-\pi^2}{16}$.

1.4.5 التكاملات على الصيغة $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}x^{\alpha-1}\,dx$

حيث $Q(x)\neq 0\ \forall\ x\geq 0$، $0<\alpha<\deg Q-\deg P$. نعتبر الدالة $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha-1}$، حيث $z^{\alpha-1}=\mathrm{e}^{(\alpha-1)\log z}$، ($\log z=\ln|z|+\mathrm{i}\theta$، $0<\theta<2\pi$) و المنحنى المغلق المعرف بما يلي (1.3).

لكل R كبير ما يكفي و r صغير ما يكفي،

$$\int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1}\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz + \int_R^r \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(\alpha-1)} x^{\alpha-1}\, dx + \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 2\mathrm{i}\pi \sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(f, z).$$

المجموع يمتد على كل أقطاب الدالة f في $\mathbb{C}$.

باستعمال الشروط على الدالة f، $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\, dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ و $\displaystyle\int_{\gamma_r} f(z)\, dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.

إذاً $(1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\alpha}) I(\alpha) = 2\mathrm{i}\pi \sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(f, z)$.

مثال 1.4.4

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\, dx \qquad 0 < \alpha < 1.$$

$\operatorname{Res}(f, -1) = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}$، إذاً $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

1.5 تمارين الباب الخامس

تمرين 1 :
أدرس تقارب لوران متسلسلات لوران التالية:
$\sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|}z^n$، $\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^n}{3^n+1}$، $\sum_{-\infty,n\neq 0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{\sinh \alpha n}$ ، $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

تمرين 2 :
أثبت أن:

1. $\frac{1}{z-b}=\sum_{-\infty}^{-1}\frac{z^n}{b^{n+1}}$، لكل $|z|>b>0$.
2. $\frac{1}{z-b}=\sum_{-\infty}^{-1}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}$، لكل $|z-a|>|b-a|>0$.
3. $(\frac{z-a}{z-b})^2=\sum_{-\infty}^{0}(1-n)\frac{(z-a)^n}{(b-a)^n}$، لكل $|z-a|>|b-a|>0$.

تمرين 3 :

1. أثبت أن متسلسلات لورانت للدالة $\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}(z+\frac{1}{z})}$ بجوار 0 هي في الصورة التالية: $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(z^n+\frac{1}{z^n})$، حيث $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\lambda\cos t}\cos nt\,dt$، حيث $\lambda\in\mathbb{C}^*$.
2. أوجد متسلسلات لوران للدالة $\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}(z-\frac{1}{z})}$ بجوار 0.

تمرين 4 :
ليكن Ω نطاق بسيط الترابط.

1. أ) أثبت أنه إذا كانت f دالة هولومرفية على Ω و ليس لها أصفار، توجد دالة هولومرفية F على Ω بحيث $\mathrm{e}^F=f$ on Ω.
   ب) استنتج أن لكل $n\in\mathbb{N}$، توجد دالة هولومرفية g_n على Ω بحيث $g_n^n=f$.
2. نفترض أن الدالة f أحادية و 0 ملاصق للمجموعة $f(\Omega)$.
   أثبت أن لكل $r>0$، يوجد z بحيث $|z|=r$ و $z\notin f(\Omega)$.

تمرين 5 :
الهدف من هذا التمرين هو إثبات أنه لا توجد دالة هولومرفية f على $\mathbb{C}$ بحيث $f\circ f(z)=e^z$ على $\mathbb{C}$.
نفترض أن الدالة f موجودة.

1. أثبت أن $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*$.
2. أثبت أنه توجد دالة هولومرفية g على $\mathbb{C}$ بحيث $f=e^g$.
3. أثبت أنه توجد $c\in\mathbb{C}$ بحيث $g\circ f=\mathrm{id}+c$ و استنتج.

تمرين 6 :
ليكن $f(z)=2z^5+6z-1$.

1. أثبت أن f لها صفر واحد في الفترة $[0,1]$.
2. أثبت أن f لها أربع أصفار في الحلقة $\{z\in\mathbb{C};\ 1<|z|<2\}$.

تمرين 7 :
لتكن f دالة متصلة على $\overline{\mathbb{D}}$، هولومرفية على $\mathbb{D}$ و تحقق $|f(z)|<1$ لكل $|z|=1$.
كم من حل (حسب على قدر تعددها) للمعادلة $f(z)=z^n$، $(n\geq 1)$ في $\mathbb{D}$.
تمرين 8 :
ليكن Ω نطاق محدود و يحتوي على 0 و لتكن $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ و متصلة على $\overline{\Omega}$.
نفترض أن $\mathrm{Re}(\bar{z}f(z))>0;\ \ \forall\ z\in\partial\Omega$.
أثبت أن f لها صفر واحد في Ω. ($\partial\Omega$ أملس). (خذ باعتبار الدالة $g(z)=cz-f(z)$، حيث $c=\dfrac{\inf_{z\in\partial\Omega}\mathrm{Re}(\bar{z}f(z))}{\sup_{z\in\partial\Omega}|z|^2}$).
تمرين 9 :
ليكن $a,b\in\mathbb{D}$ و $m,n\in\mathbb{N}$.
أثبت أن الدالة $f(z)=z^m(\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z})^n-b$ لها بالضبط $m+n$ صفر في $\mathbb{D}$.
تمرين 10 :
ليكن $\Omega=D(0,\frac{2}{3\sqrt{3}})$.

1. أثبت أن لكل $z\in\Omega$، يوجد $w\in\mathbb{C}$ وحيد بحيث $|w|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ و $w^3+w-z=0$.

نأخذ $w=f(z)$.

2. أثبت أن لكل $z \in \Omega$،

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{|w|=\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{w(3w^2+1)}{w^3+w-z} dw.$$

3. استنتج أن الدالة f هولومرفية على Ω.

4. نأخذ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. واحسب a_n.

تمرين 11 :
أوجد الباقي للدوال التالية في النقاط الشاذة.

أ) $f(z) = \dfrac{1}{z+z^3}$، ب) $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^3}$، ج) $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$، د) $f(z) = \dfrac{1}{\sin \pi z}$،

هـ) $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$، و) $f(z) = (z-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}}$.

تمرين 12 :
لتكن f دالة هولومرفية معرفة على جوار V لنقطة $a \in \mathbb{C}$ و لتكن g دالة هولومرفية على $V \setminus \{a\}$ بحيث النقطة a قطب بدرجة m.
أوجد $\mathrm{Res}(fg, a)$.

تمرين 13 :
باستعمال مبرهنة البواقي أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2},\ 0<\varepsilon<1, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin \alpha x}{x^2+a^2}\ dx, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3}\ dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\ dx,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\ dx,\ a>0, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2+a^2}\ dx,\ a>0 \text{ and } \alpha>0, \qquad \int_0^{\infty} \frac{x\sin \alpha x}{(x^2+a^2)^2}\ dx,$$

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\ dx. \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\ dx$$

تمرين 14 : Fibonacci's Numbers

لتكن $(a_n)_n$ متتالية Fibonacci المعرفة بنا يلي: $a_0 = 1$، $a_1 = 1$، و $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ لكل $n \geq 2$ و لتكن الدالة $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. أثبت أن نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ الذي يعرف الدالة F هو عدد موجب.
2. أثبت أن $F(z) = \dfrac{1}{1-z-z^2}$ على قرص التقارب واستنتج نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
3. أثبت أن $\mathrm{Res}(\dfrac{1}{z^{n+1}(1-z-z^2)}, 0) = a_n$.
4. احسب a_n باستعمال طريقة البواقي.

تمرين 15 : (Frobenius Problem)

ليكن p, q أعداد أولية نسبيا و ليكن m عدد طبيعي. و لتكن الدالة $f(z) = \dfrac{1}{(1-z^p)(1-z^q)z^{m+1}}$.

1. أوجد الأقطاب الدالة f و الباقي في هذه الأقطاب.
2. تحقق من أن $\mathrm{Res}(f, 0) = N(m)$، حيث

$$N(m) = \#\{(k,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0;\ kp + nq = m\}.$$

3. احسب $N(m)$ باستعمال قاعدة البواقي.

تمرين 16 : The Dedekind sums

ليكن p, q أعداد أولية نسبيا و ليكن m عدد طبيعي. نعرف الدالة $f(z) = \cot(p\pi z)\cot(q\pi z)\cot(\pi z)$.

1. أثبت أنه يوجد $0 < \varepsilon < 1$ بحيث أقطاب الدالة f ليست على المستطيل التي رؤوسه $1-\varepsilon + \mathrm{i}R, -\varepsilon + \mathrm{i}R, -\varepsilon - \mathrm{i}R, 1-\varepsilon - \mathrm{i}R$.
نسمي γ_R المنحنى المغلق المعرف بحدد المستطيل و موجه في الإتجاه الموجب.

2. أ) احسب مجموع البواقي للدالة f في الأقطاب داخل المستطيل.

ب) أثبت أن $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = -2\mathrm{i}$ و استنتج أن لكل $R > 0$،

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = -2\mathrm{i}$$

3. نعرف

$$S(p,q)=\frac{1}{4q}\sum_{k=1}^{q-1}\cot\frac{k\pi p}{q}\cot\frac{k\pi}{q}. \tag{1.4}$$

استعمل مبرهنة البواقي لإثبات أن

$$S(p,q)+S(q,p)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}(\frac{p}{q}+\frac{1}{pq}+\frac{q}{p}) \tag{1.5}$$

ملاحظة 1.5.1
المجموع (1.4) يسمى مجموع *Dedekind*، و المعرف في دالة *Dedekind* المعرفة كما يلي:

$$D(z)=e^{\frac{\mathrm{i}\pi z}{12}}\prod_{k=1}^{+\infty}(1-e^{2\mathrm{i}k\pi z}).$$

تمرين 17 :
لتكن الدالة $f(z)=\pi\cot(\pi z)$.

1. أوجد أقطاب و الباقي للدالة f في هذه الأقطاب.

2. لتكن $g(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ الدالة الكسرية، بحيث $\deg Q\geq \deg P+2$ و ليكن $a_1,a_2,\dots,a_m$ أقطابها و $b_1,b_2,\dots,b_m$ البواقي على التوالي في هذه النقاط. نفترض أن a_q ليست أعداد طبيعية لكل $1\leq q\leq m$. و ليكن γ_n المربع و التي رؤوسه $\pm(n+\frac{1}{2})\pm \mathrm{i}(n+\frac{1}{2})$، $n\in\mathbb{N}_0$.

أ) أثبت أنه توجد M و K عددين ثابتين بحيث

$$|\pi\cot(\pi z)|\leq M,\quad \forall z\in\gamma_n \tag{1.6}$$

$$|g(z)|\leq\frac{K}{|z|^2},\quad \text{for } |z| \text{ big enough} \tag{1.7}$$

ب) استنتج أن $\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n}f(z)g(z)dz=0$ و

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=-n}^{n} g(p) = -\sum_{q=1}^{m}\operatorname{Res}(f(z)g(z),a_q) \qquad (1.8)$$

ملاحظة 1.5.2
المعادلة (1.7) تثبت أن $\lim\limits_{n,n'\to+\infty}\sum\limits_{-n\le p\le n'} g(p)$ موجودة. إذاً يمكن تعويض المعادلة (1.8) بما يلي:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} g(p) = -\sum_{q=1}^{m}\operatorname{Res}(f(z)g(z),a_q).$$

مثال 1.5.1
أوجد قيمة المجموع التالي: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a+bn^2}$، $a,b\in\mathbb{R}^{+,*}$.

أثبت أن النتيجة تبقي صحيحة إذا كان $\deg Q \ge \deg P + 1$. (أثبت في هذه الحالة أن $g(z)=h(z)+\frac{C}{z}$ حيث C عدد ثابت و h دالة كسرية تحقق الشرط الثاني).
أثبت أن $\int_{\gamma_n}\frac{\cot(\pi z)}{z}\,dz = 0$.

ملاحظة 1.5.3
$\lim\limits_{n,m\to+\infty}\sum\limits_{p=-n}^{m} g(p)$ لا توجد في الحالة العامة.

مثال 1.5.2
أوجد قيمة $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=-n}^{n}\frac{1}{x-p}$ و استنتج قيمة $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2-n^2}$، لكل $x\notin\mathbb{Z}$.

3. ليكن α عدد حقيقي بحيث $-\pi<\alpha<\pi$. أثبت أنه:

أ) يوجد عدد موجب M غير متغير بقيمة n بحيث $|\frac{e^{i\alpha z}}{\sin\pi z}|\le M \quad \text{on } \gamma_n$.

ب) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n}\frac{e^{i\alpha z}}{z\sin\pi z}\,dz = 0$.

أكتب) $\int_{\gamma_n} \frac{e^{i\alpha z}}{z\sin\pi z}\ dz = 2i\int_{\gamma'_n} \frac{\sin\alpha z}{z\sin\pi z}\ dz - 2i\int_{\gamma"_n} \frac{\sin\alpha z}{z\sin\pi z}\ dz$، حيث γ'_n (على التوالي $\gamma"_n$) الفترة المعرفة بما يلي: $z = (n+\frac{1}{2}) + iy$، $|y| \le n+\frac{1}{2}$ (على التوالي $z = x + i(n+\frac{1}{2})$، $|x| \le n+\frac{1}{2}$).

c) استنتج أنه إذا كانت الدالة g هي دالة كسرية تحقق الشرط 3) نجد ما يلي:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=-n}^{n}(-1)^p g(p)e^{i\alpha p} = -\pi\sum_{q=1}^{m}\text{Res}(\frac{e^{i\alpha z}g(z)}{\sin\pi z}, a_q).$$

مثال 1.5.3

لتكن الدالة $g(z) = \frac{1}{x-z}$ و أثبت أنه إذا كانت $-\pi < \alpha < \pi$ و $x \notin \mathbb{Z}$، نجد ما يلي:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos n\alpha}{x^2-n^2} = \frac{\cos\alpha x}{2x\sin\pi x} - \frac{1}{2x^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n\sin n\alpha}{x^2-n^2} = \frac{\pi\sin\alpha x}{2\sin\pi x}.$$

تمرين 18 :

1. أثبت أن $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\ dz$، $\forall\ 0 \le k \le n$، حيث γ منحنى مغلق بحيث $\text{Ind}(\gamma, 0) = 1$.
2. أثبت أن $C_{2n}^n \le 4^n$.
3. أثبت أن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n}^n}{5^n} = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{(1+z)^{2n}}{(5z)^n}\ \frac{dz}{z}$ و استنتج أن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n}^n}{5^n} = \sqrt{5}$. (يمكن أن نختار منحنى مغلق مناسب γ).
4. أثبت أن $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$ هو الجزئ الثابت في $(1+z)^n(1+\frac{1}{z})^n$، $z \neq 0$ و استنتج أن

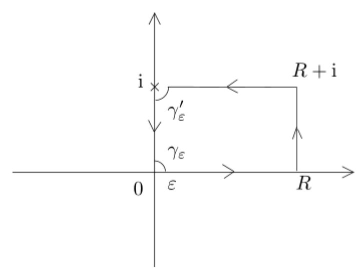
$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (1+z)^n(1+\frac{1}{z})^n\ \frac{dz}{z} = C_{2n}^n,$$

حيث γ دائرة الوحدة.

5. أثبت أن $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{n} x^n$ لكل $|x| < \frac{1}{4}$.

تمرين 19 :
أثبت أن

1. $\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)\ d\theta = 2\pi$.
2. $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\cos\theta\ d\theta = \pi.$
3. إذا كان $|a| < 1$ و $b \in \mathbb{R}$، $\int_0^{+\infty} \frac{\sinh ax}{\sinh x}\cos bx\ dx = \frac{\pi}{2}(\frac{\sin a\pi}{\cos a\pi + \cosh b\pi})$.
4. إذا كان $p \in \mathbb{R}$، $\int_0^{+\infty} \frac{\cos px}{\cosh x}\ dx = \frac{\pi}{2\cosh\frac{p\pi}{2}}$.
5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1}\ dx$ (يمكن أن نكامل الدالة $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2az}}{\mathrm{e}^{2\pi z}-1}$ على المنحنى المغلق التالي:



شكل 1.4:

تمرين 20 :
لتكن f دالة هولومرفية على نطاق Ω في $\mathbb{C}$ و ليكن $z_0 \in \Omega$.
نفترض أن z_0 هو صفر للدالة f بدرجة $m \in \mathbb{N}$.
أثبت أنه يوجد V مفتوح جوار للنقطة z_0 في Ω و دالة هولومرفية g على V بحيث $f(z) = g^m(z)$ على V و $g(z_0) = 0$ و $g'(z_0) \neq 0$.

تمرين 21 :
لتكن f و g دالتين معرفتين على مفتوح Ω.
نفترض أن الدالة g ليس لها أصفار في Ω. نعرف المتتالية $(Q_n)_n$ من الدوال الهولومرفية بما يلي:

$$Q_0 = f, \quad Q_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(f(z)g^n(z)).$$

1. ليكن $z \in \Omega$، أثبت أن لكل $r > 0$ بحيث $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$، توجد $\delta > 0$ بحيث $\forall\ s \in D(0,\delta)$، $h(w) = sg(w) - (w-z)$ لها صفر واحد في $D(z,r)$ و نرمز له بـ $w(s,z)$.

2. أ) أثبت أن إذا كان $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$، فإن

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{|w-z|=r} \frac{f(w)g^n(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw.$$

ب) ليكن K متراص في Ω. نعرف الأعداد التالية $M_1(r) = \sup\limits_{z\in K_r}|f(z)|$، $M_2(r) = \sup\limits_{z\in K_r}|g(z)|$، حيث $0 < r < d(K, \mathbb{C}\setminus\Omega)$ و $K_r = \{z \in \mathbb{C};\ d(z,K) \leq r\}$.

أثبت أن $\sup\limits_{z\in K}|Q_n(z)| \leq \dfrac{M_1 M_2^n}{r^n}$.

3. أثبت أن لكل متراص K، توجد $s > 0$ بحيث المتسلسلات $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} Q_n(z)t^n$ تتقارب لكل $z \in K$ و $|t| < s$ و مجموعها يساوي: $\dfrac{f(w(t,z))}{1 - tg'(w(t,z))}$.

مثال 1.5.4

أ) أوجد قيمة $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$، حيث $L_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^x)$، $0 < x < +\infty$. ($(L_n)_n$ متتالية كثيرات الحدود *Laguerre*).

ب) أوجد قيمة $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{H_n(x)}{n!}t^n$، حيث $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$، $(x \in \mathbb{R})$. ($(H_n)_n$ متتالية كثيرات الحدود *Hermite*).

تمرين 22 :

احسب التكامل التالي لكل $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin\lambda x}{1+x^4}dx.$$

تمرين 23 :

ليكن $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ و لكل $\alpha \in \Omega$، نعرف

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2+x+1}\, dx.$$

1. أثبت أن الدالة f معرفة جيدا على المفتوح Ω.
2. أثبت أن الدالة f هولومرفية على Ω.
3. احسب قيمة التكامل باستعمال قاعدة البواقي:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2+x+1}\, dx; \quad \text{for } 0 < \alpha < 1.$$

4. أثبت أن الدالة $\alpha \longmapsto f(\alpha)$ يمكن تمديدها كدالة ميرومرفية على $\mathbb{C}$ و أوجد أقطابها.

تمرين 24 :

1. أوجد قيم العدد α، حتى يكون التكامل التالي متقارب.

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx.$$

2. أوجد قيمة $I(\alpha)$ باستعمال قاعدة البواقي.

تمرين 25 :

لتكن f الدالة $f(z) = \dfrac{e^z-1}{e^z+1}$.

1. أثبت أنه يوجد $r > 0$ بحيث إقتصار الدالة f على جوار $\overline{D(0,r)}$ أحادية.
   لتكن h معكوس هذه الدالة.
2. أوجد قيمة $h'(z)$ و استنتج متسلسلة القوى في 0 للدالة h.
3. أثبت أنه توجد دالة هولومرفية g على D بحيث $g(z^2) = \dfrac{z}{f(z)}$ على D.
4. ليكن a_k معامل z^k في متسلسلة القوى في 0 للدالة $g^{2k+1}(z)$.
   أثبت أن

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{1}{f^{2k+1}(z)}\, dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{fo\gamma_r} \frac{2}{(1-z^2)z^{2k+1}}\, dz = 2.$$

5. ليكن $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ متسلسلة القوى في 0 للدالة g.
استنتج أن مما سبق طريقة لاحتساب المعامل b_n.
احسب b_0, b_1 و b_2.

6. أوجد نصف قطر التقارب لهذه المتسلسلة.

تمرين 26 :

a) لكل $z \in \mathbb{C}$ بحيث $0 < \operatorname{Re} z < 1$، نعرف

$$f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x}\, dx.$$

1. أثبت أن الدالة f هولومرفية على $\{z \in \mathbb{C};\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

2. احسب $f(t)$ باستعمال قاعدة البواقي لكل $t \in]0,1[$.

3. أثبت أن الدالة f يمكن تمديدها كدالة ميرومرفية على $\mathbb{C}$ و حدد أقطابها. (الدالة الممددة نسميها كذلك f).
لتكن $g_p(z) = \sum_{n=-p}^{p} \frac{(-1)^n}{z-n}$ لكل $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ و $p \in \mathbb{N}$.

4. أثبت أن المتتالية $(g_p)_p$ تتقارب بانتظام على كل متراص في $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ نحو دالة هولومرفية. (نسمي هذه النهاية g).

5. أثبت أن الدالتين f و g فردية و $f(z+1) = -f(z)$، $g(z+1) = -g(z)$ على $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

6. أثبت أن الدالة $f - g$ يمكن تمديدها كدالة هولومرفية على $\mathbb{C}$.

7. أ) أثبت أن $\lim_{y \longrightarrow +\infty, 0<x<1} f(x+\mathrm{i}y) = 0$ و g محدودة على $\{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C};\ 0 \leq x \leq 1 \text{ and } y \geq 1\}$.
ب) استنتج أن $f = g$ على $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

B)

1. لكل $z \in \mathbb{C}$ بحيث $\operatorname{Re} z > 0$، نعرف $h(z) = \int_0^1 \frac{x^{z-1}}{1+x}\, dx$.

أ) أثبت أن لكل $n \in \mathbb{N}_0$، $h(z) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{z+p} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{z+n}}{1+x}\, dx$.

ب) استنتج أن الدالة h يمكن تمديدها كدالة هولومرفية على $\mathbb{C} \setminus \{-n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$.

2. أثبت أن لكل $0 < \operatorname{Re} z < 1$

$$f(z) = \int_0^1 \frac{x^{z-1}}{1+x}\, dx + \int_0^1 \frac{x^{-z}}{1+x}\, dx = h(z) + h(1-z).$$

3. أ) أثبت أن $f(z) = g_n(z) + (-1)^n (\int_0^1 \frac{x^{-z+n}}{1+x}\, dx - \int_0^1 \frac{x^{z+n}}{1+x}\, dx)$.

ب) استنتج أن $f - g_n$ هولومرفية على $\{z \in \mathbb{C};\ -n-1 < \operatorname{Re} z < n+1\}$.

4. أثبت أن لكل متراص K في $\mathbb{C}$، المتتالية $(f - g_n)_n$ تتقارب بانتظام نحو 0 على K.

تمرين 27 :

لتكن f دالة هولومرفية على جوار $\overline{D(a,r)}$، حيث $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$.
نفترض أن $f(a) \neq 0$ و $|f(z)| \leq M$ على $\overline{D(a,r)}$.

1. ليكن $z_0 \in \mathbb{C}$. أثبت أن لكل $z \in D(z_0, \frac{r}{M})$، المعادلة $w - a = (z - z_0) f(w)$ لها حل وحيد في القرص $D(a,r)$ و نرمز له بـ $w(z)$.

2. أ) أثبت أن $w(z) = a + \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{|a-s|=r} \frac{1 - (z-z_0) f'(s)}{(s-a) - (z-z_0) f(s)} (s-a)\, ds$. (احسب التكامل باستعمال قاعدة البواقي.)

ب) استنتج أن الدالة $z \longmapsto w(z)$ هولومرفية على $D(z_0, \frac{r}{M})$.

3. أثبت أن $w(z) = a + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$، حيث $a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}n\pi} \int_{|a-s|=r} (\frac{f(s)}{(s-a)})^n\, ds = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [f^n(s)]_{|s=a}$.

4. ليكن $w(z)$ الحل الوحيد للمعادلة $w = z e^w$ في جوار $z = 0$.

أ) أوجد متسلسلة القوى للدوال $w(z)$ و $e^{w(z)}$ بجوار $z = 0$.

ب) أوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة w.

ج) أوجد نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى بجوار 0 للدوال التالية.

$\frac{1}{2-w(z)}$ i) $\quad \frac{1}{1+2w(z)}$ ii).