إتصال الدوال

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

26 نوفمبر 2016

المحتويات

1 الإتصال النقطي
- الإتصال على اليمين وعلى الشمال
- الإتصال على فترة

2 الاتصال المنتظم

3 الدوال المطردة

4 دراسة الدوال العكسية

تعريف

لتكن V مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ و $f\colon\ V \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على V.
صورة الدالة f هي المجموعة التالية

$$f(V) = \{f(x);\ x \in V\}.$$

1 نقول أن الدالة f محدودة علويا على V إذا كانت المجموعة $f(V)$ محدودة علويا.
أصغر حد علوي للمجموعة $f(V)$ يسمى أصغر حد علوي للدالة f على V, و نرمز به $\sup_V f$.

2 نقول أن الدالة f محدودة سفليا على V إذا كانت المجموعة $f(V)$ محدودة سفليا.
أكبر حد سفلي للمجموعة $f(V)$ يسمى أكبر حد سفلي للدالة f على V, و نرمز به $\inf_V f$.

3 نقول أن الدالة f محدودة على V إذا كانت المجموعة $f(V)$ محدودة.

تعريف

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و f دالة معرفة بجوار النقطة x_0. نقول أن الدالة f متصلة في النقطة x_0 إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, أو أيضا

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[;\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

مبرهنة

1. إذا كانت f و g دالتين متصلتين في النقطة x_0, فإن $f.g$ و $\alpha f+\beta g$ متصلة في النقطة x_0 لكل α و β عددين حقيقيين.
2. إذا كانت الدالة f متصلة في النقطة x_0 و $f(x_0)\neq 0$, تكون الدالة $\frac{1}{f}$ متصلة في النقطة x_0.
3. إذا كانت الدالة f متصلة في النقطة x_0 و g متصلة في النقطة $f(x_0)$, إذاً الدالة $g\circ f$ متصلة في النقطة x_0.

هذه المبرهنة هي نتيجة خواص نهايات الدوال (مبرهنة ?? و مبرهنة ?? من الباب الرابع).

مبرهنة

لتكن f دالة متصلة في النقطة $x_0 \in \mathbb{R}$.
إذا كانت $f(x_0) \neq 0$, يوجد $\alpha > 0$ بحيث $|f(x)| > 0$ لكل $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

هذه المبرهنة هي نتيجة المبرهنة ?? من الباب الرابع

مبرهنة

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و f دالة معرفة بجوار النقطة x_0.
تكون الدالة f متصلة في النقطة x_0 إلا وإذا كان لكل متتالية $(a_n)_n$ متقاربة من النقطة x_0, فإن المتتالية $(f(a_n))_n$ متقاربة من النقطة $f(x_0)$.

هذه المبرهنة هي نتيجة المبرهنة **??** من الباب الرابع.

الإتصال على اليمين وعلى الشمال

تعريف

1. لتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و f دالة معرفة على الفترة $]x_0-\alpha, x_0]$, مع $\alpha > 0$. نقول أن الدالة f متصلة على شمال النقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0 (x<x_0)} f(x) = f(x_0)$.
2. ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و f دالة معرفة على الفترة $[x_0, x_0+\alpha[$, مع $\alpha > 0$. نقول أن الدالة f متصلة على يمين النقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0 (x>x_0)} f(x) = f(x_0)$.

مبرهنة

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و f دالة معرفة على جوار النقطة x_0, تكون الدالة f متصلة في النقطة x_0 إلا و إذا كانت الدالة f متصلة على يمين وعلى شمال النقطة x_0.

الإتصال على فترة

تعريف

1 لتكن دالة f معرفة على فترة مفتوحة $I =]a, b[$.
نقول أن الدالة f متصلة على الفترة I إذا كانت متصلة في كل نقطة من I.

2 إذا كانت الدالة f معرفة على الفترة $I = [a, b]$. نقول أن الدالة f متصلة على الفترة I إذا كانت f متصلة على الفترة المفتوحة $]a, b[$ و متصلة على يسار النقطة b وعلى يمين النقطة a.
كذلك نعرف الدوال المتصلة على الفترات $]a, b]$, $[a, b[$.

مثال

لتكن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x.\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

الدالة f متصلة على $\mathbb{R}_+^*$ و على $\mathbb{R}_-^*$; يبقى أن نثبت أنها متصلة في النقطة 0.

$\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 \leq |\lim\limits_{x\to 0} |x\sin(\frac{1}{x})| = \lim\limits_{x\to 0} |f(x)|$, إذاً $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

نقول أن الدالة f هي إمتداد متصل على $\mathbb{R}$ للدالة $g(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ (g معرفة على $\mathbb{R}^*$).

مبرهنة

لتكن f دالة متصلة على الفترة المغلقة والمحدودة $I = [a, b]$, إذاً f محدودة على I وتحقق قيمتها العضمى وقيمتها الصغرى.

البرهان

إذا كانت الدالة f غير محدودة, إذاً لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $x_n \in I$ بحيث $|f(x_n)| \geq n$.
بما أن المتتالية $(x_n)_n$ محدودة، و باستعمال مبرهنة $\mathrm{Bolzano - Weirstrass}$, توجد متتالية جزئية $(x_{\varphi(n)})_n$ متقاربة. لتكن $\alpha \in I$ نهايتها. إذاً $|f(x_{\varphi(n)})| \geq \varphi(n) \geq n$ و $f(\alpha) = +\infty$; وهو غير صحيح. إذاً الدالة f محدودة.

إذا كان $m = \inf_I f$ و $M = \sup_I f$.
فإنه لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $x_n \in I$ بحيث $m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n}$ و $\exists y_n \in I$ بحيث $M - \frac{1}{n} < f(y_n) \leq M$.
المتتاليات $(x_n)_n$ و $(y_n)_n$ محدودة. إذاً توجد متتاليات جزئية $(x_{\varphi(n)})_n$ و $(y_{\psi(n)})_n$ متقاربة.
لتكن $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = c$ و $\lim_{n\to+\infty} y_{\psi(n)} = c'$. إذاً $f(c) = m = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)})$ و $f(c') = M = \lim_{n\to+\infty} f(y_{\psi(n)})$.

إذا كانت $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و $f(x) \neq 0,\ \forall x \in [a,b]$، إذاً يوجد $m > 0$ بحيث $|f(x)| \geq m,\ \forall x \in [a,b]$.

هذا لأن الدالة $|f|$ متصلة. إذا كان $m = \inf_{[a,b]} |f|$ فإنه يوجد $c \in [a,b]$ بحيث $|f(c)| = m > 0$.

إذاً $|f(x)| \geq m,\ \forall x \in [a,b]$.

مبرهنة القيمة البينية

كل دالة متصلة على فترة محدودة ومغلقة $[a, b]$ تحقق كل قيمة بين قيمتهاالعظمى وقيمتها الصغرى. أي $f[a, b] = [m, M]$ مع $m = \inf_I f$ و $M = \sup_I f$.

البرهان

إذا كانت $M = m$، فإن f ثابتة.

إذا كانت $M \neq m$, يوجد c و d في $[a, b]$ بحيث $f(c) = m$ و $f(d) = M$. يمكن أن نفترض أن $c < d$. ليكن $m < y < M$. نعرف الدالة $g(x) = f(x) - y$ و المجموعة $E = \{x \in [c, d];\ g(x) \geq 0\}$.

المجموعة E ليست المجموعة الخالية لأن $f(d) = M$ و $M - y > 0$, إذاً $d \in E$.
المجموعة E محدودة لأن $E \subset [a, b]$.
لتكن $\alpha = \inf E$. توجد متتالية $(x_n)_n$ في E تتقارب نحو α, إذاً $g(\alpha) \geq 0$.
$\alpha \in [c, d]$, $\alpha \neq c$, لأن $g(c) < 0$. إذا فرضنا أن $g(\alpha) > 0$, يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث لكل $x \in]\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \alpha + \frac{\varepsilon}{2}[$; $g(x) > 0$. إذاً α ليست أصغر حد أعلى للمجموعة E لأن $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \in E$, و هذا يتنافى مع الفرضية, إذاً $g(\alpha) = 0$ و $f(\alpha) = y$ و $\alpha \in [a, b]$.

نتيجة

لتكن f دالة متصلة على فترة $I \subset \mathbb{R}$، إذاً $]m, M[\subset f(I)$, مع $m = \inf_{x \in I} f(x)$, $M = \sup_{x \in I} f(x)$.

البرهان

ليكن $z \in]m, M[$، يوجد x و y في الفترة I بحيث $m < f(x) < z < f(y) < M$.
يمكن أن نفرض أن $x < y$, إذاً $z \in [f(x), f(y)] \subset f[x, y]$, و $z \in f(I)$.

نتيجة

صورة فترة بدالة متصلة هي فترة.

البرهان

$f(I) \supset]m, M[$، إذاً $f(I) =]m, M[$ أو $f(I) = [m, M[$ أو $f(I) = [m, M]$ أو $f(I) =]m, M]$.

مثال

كل كثيرة حدود P درجتها عدد فردي تكون شاملة على $\mathbb{R}$.
ليكن $c \in \mathbb{R}$ و $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ مع $a_n \neq 0$. لنفرض أن $a_n > 0$.
الدالة $P(x) - c$ متصلة على $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} P(x) - c = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} P(x) - c = -\infty$. إذا يوجد $s \in \mathbb{R}$ بحيث $P(s) - c = 0$.

مثال

إذا كانت $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ متصلة و إذا كان $n \in \mathbb{N}$, يوجد $c_n \in [0,1]$ بحيث $f(c_n) = c_n^n$.
هذا لأن الدالة $g(x) = f(x) - x^n$ متصلة على الفترة $[0,1]$ و $g(0) \geq 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$، إذاً يوجد $c_n \in [0,1]$ بحيث $g(c_n) = 0$.

مثال

لتكن $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة بحيث $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. أثبت أن $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

الحل

لكل $x \in \mathbb{R}$, توجد متتالية $(x_n)_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ متقاربة نحو x. بما أن $f(x_n) = 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$, فإن $f(x) = 0$.

مثال

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[0,1]$. نفرض أن $\forall x \in [0,1], g(x) > f(x) > 0$.
أثبت أنه يوجد $k > 1$ بحيث $\forall x \in [0,1],\ g(x) \geq kf(x)$.

الحل

الدالة $\frac{g}{f}$ متصلة على الفترة المغلقة والمحدودة $[0,1]$. لتكن $k = \inf_{x\in[0,1]} \frac{g(x)}{f(x)}$. يوجد $c \in [0,1]$ بحيث $k = \frac{g(c)}{f(c)}$. إذا $k > 1$ و $\forall x \in [0,1],\ g(x) \geq kf(x)$.

تعريف

نقول أن دالة $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام على الفترة I إذا توفر الشرط التالي
$\forall \varepsilon > 0$, يوجد $\alpha > 0$ بحيث لكل x, y في I و $|x-y| < \alpha$ تكون $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0;\ \forall\ x, y \in I,\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

مثال

$f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $I = \mathbb{R}$.
$|f(x) - f(y)| = |a||x - y| < \varepsilon$, يكفي أن ناخذ $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$. إذاً f متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

مثال

$f(x) = x^2$, $I = [0, 1]$.

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2|x - y| < \varepsilon,$$

يكفي أن ناخذ $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$. إذاً f متصلة بانتظام على $[0, 1]$.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على الفترة $I = [0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = x^2$. سنبرهن أن الدالة f ليست متصلة بانتظام على الفترة I. يعني
يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث لكل $\alpha > 0$ يوجد $x, y \in I$ بحيث $|x - y| < \alpha$ و $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.
ليكن $\varepsilon = 1$ و $\alpha > 0$. إذا كان $x = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{2}$ و $y = \dfrac{1}{\alpha}$، فإن $|x - y| = \frac{\alpha}{2} < \alpha$ و $|f(x) - f(y)| = |(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{2})^2 - (\frac{1}{\alpha})^2| = 1 + \frac{\alpha^2}{4} > 1$. إذاً f ليست متصلة بانتظام على الفترة $[0, +\infty[$.

ملاحظة

كل دالة متصلة بانتظام على فترة I تكون متصلة.

مبرهنة

كل دالة متصلة على فترة مغلقة ومحدودة $[a, b]$ هي متصلة بانتظام.

البرهان

لتكن f دالة متصلة على فترة $[a, b]$ و نفرض أنها ليست متصلة بانتظام. إذاً يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $\forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in [a, b]$ ، $|x - y| < \alpha$ و $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

نعطي للعدد α القيم $\frac{1}{n}$, إذاً توجد متتاليتين $(x_n)_n$ و $(y_n)_n$ في $[a,b]$ تحقق $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ و $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$.
المتتالية $(x_n)_n$ محدودة, إذاً توجد متتالية جزئية $(x_{\varphi(n)})_n$ متقاربة و لتكن $\lambda \in [a,b]$ نهايتها. المتتالية $(y_{\varphi(n)})_n$ كذلك متقاربة نحو λ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}) = 0$.
و بما أن f دالة متصلة على $[a,b]$, إذاً $(f(x_{\varphi(n)}))_n$ تتقارب نحو $f(\lambda)$ و $(f(y_{\varphi(n)}))_n$ تتقارب نحو $f(\lambda)$, إذاً
$\lim\limits_{n\to+\infty}|f(x_{\varphi(n)})-f(y_{\varphi(n)})| = 0$, و هذا لا يتطابق مع $|f(x_{\varphi(n)})-f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$.

إذا كانت $f\colon I \longrightarrow J$ دالة قابلة للإشتقاق و مشتقتها محدودة. إذاً f متصلة بانتظام.
إذا كانت $|f'| \leq M$، فباستعمال مبرهنة القيمة الوسطى

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y.$$

إذاً f متصلة بانتظام.

مثال

إذا كانت $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة ولها نهايات في $\pm\infty$ فهي محدودة و متصلة بانتظام.
إذا كان $\varepsilon > 0$ يوجد $A > 0$ بحيث لكل $x \geq A$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ إذا $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و إذا كان $x \leq -A$, $|f(x) - \ell'| \leq \varepsilon$ إذا كان $\ell' = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

الدالة f متصلة بانتظام على $[-A-1, A+1]$. إذا يوجد $1 > \alpha$ بحيث إذا كان $|x-y| \leq \alpha$ و $y \in [-A-1, A+1]$,, $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. مما ينتج أنه إذا كان $|x-y| \leq \alpha$ و $y \in \mathbb{R}$,, $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. إذا f متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.
الدالة f محدودة على $\{x \in \mathbb{R};\ |x| \geq A+1\}$ و محدودة على $\{x \in \mathbb{R};\ |x| \geq A\}$, إذا هي محدودة على $\mathbb{R}$.

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية I من $\mathbb{R}$.

1. نقول أن الدالة f تزايدية على I إذا كان $y \leq x$ في I فإن $f(x) \leq f(y)$.
2. نقول أن الدالة f تزايدية قطعيا (أو فعليا) على I إذا كان $y < x$ في I فإن $f(x) < f(y)$.
3. نقول أن الدالة f تناقصية على I إذا كانت الدالة $(-f)$ تزايدية.
4. نقول أن الدالة f مطردة إذا كانت تناقصية أو تزايدية.
5. نقول أن الدالة f مطردة قطعيا (أو فعليا) إذا كانت تناقصية قطعيا أو تزايدية قطعيا.

ملاحظات

1. إذا كانت الدالة f مطردة قطعيا على فترة I; فإن الدالة $f\colon I \longrightarrow f(I)$ هي تقابل.
2. إذا كانت $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و تزايدية فإن $f[a,b] = [f(a), f(b)]$.
هذه نتيجة من مبرهنة القيمة الوسيطة (أو مبرهنة القيمة البينية) $m = f(a)$ و $M = f(b)$ لأن f تزايدية.
3. إذا كان $a < b$ فإن $[a,b] = \{tb + (1-t)a;\, t \in [0,1]\}$.
يكفي أن نأخذ الدالة $f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة كالتالي $f(t) = tb + (1-t)a = t(b-a) + a$.
الدالة f متصلة على $[0,1]$ و تزايدية. $f(0) = a$, $f(1) = b$, إذاً $f[0,1] = [a,b]$.

مبرهنة

لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow]a, b[:f$ دالة تزايدية.

1. إذا كانت f محدودة علويا, فإن f لها نهاية على يسار b.
2. إذا كانت f محدودة سفليا فإن f لها نهاية على يمين a.

البرهان

1. لتكن $M = \sup_I f$. إذاً لكل $\varepsilon > 0$, يوجد $x_0 \in I$ بحيث $M - \varepsilon < f(x_0) \leq M$. و بما أن الدالة f تزايدية، فإن $\forall x \in]x_0, b[,\ M - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq M$, إذاً $|f(x) - M| \leq \varepsilon$.
2. الجزئ الثاني نبرهنه بنفس الطريقة.

تمرين

1. أثبن أنه إذا كانت دالة f تزايدية وغير محدودة علويا على $]a, b[$ فإن $\lim\limits_{x \to b (x < b)} f(x) = +\infty$.
2. أثبن أنه إذا كانت دالة f تزايدية وغير محدودة سفليا على $]a, b[$ فإن $\lim\limits_{x \to a (x > a)} f(x) = -\infty.$

مبرهنة

لتكن f دالة متصلة على فترة $I \subset \mathbb{R}$. تكون الدالة f أحادية على الفترة I إلا وإذا كانت f مطردة قطعيا.

البرهان

من البديهي أنه إذا كانت f مطردة قطعيا فهي أحادية.

نفرض الآن أن الدالة أحادية على الفترة I و f ليست مطردة قطعيا. إذاً يوجد $x < y < z$ في الفترة I بحيث $f(y)$ ليس بين $f(x)$ و $f(z)$.

لنفرض أن $f(y) < f(z) < f(x)$, إذاً $f(z) \in]f(x), f(y)[$. باستعمال مبرهنة القيمة الوسيطة يوجد $a \in]x, y[$ بحيث $f(a) = f(z)$ و بما أن الدالة أحادية $z = a$, وهذا مستحيل لأن $z \notin]x, y[$.

برهان ثان ليكن $a < b$ و $x < y$ في الفترة I
و لتكن الدالة φ المعرفة على الفترة $[0, 1]$ كالتالي

$$\varphi(t) = f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + tx).$$

إذًا $f(a)-f(b)=\varphi(0)$ و $f(x)-f(y)=\varphi(1)$.
إذا كان $0<(f(b)-f(a))(f(y)-f(x))$ يوجد $c\in[0,1]$ بحيث $\varphi(c)=0$. إذًا
$(1-c)(b-a)=-c(y-x)$, و هذا مستحيل.

مبرهنة

تكون دالة f مطردة على فترة $I \subset \mathbb{R}$ متصلة إلا وإذا كان $f(I)$ فترة.

البرهان

لنفرض أن الدالة f تزايدية و f غير متصلة في نقطة $a \in I$.

1. إذا كان a هي الطرف على يسار الفترة I. بما أن الدالة غير متصلة في النقطة a, إذاً $f(x) > f(a)$ $m = \lim_{x \to a (x>a)}$ و بما أنه إذا كان $x > a$, $f(a) < m \leq f(x)$, إذاً $f(I)$ لا يحتوي على أي عنصر من $]f(a), m[$, إذاً $f(I)$ ليست فترة.
نبرهن بنفس الطريقة أنه إذا كانت a هي الطرف على يسار الفترة I.
2. إذا كان $a \in I$ وليس طرفا من أطراف I. ليكن $m = \lim_{x \to a (x<a)} f(x)$ و $M = \lim_{x \to a (x>a)} f(x)$. بما أن الدالة غير متصلة في النقطة a يمكن أن نفرض $f(a) < M$, إذاً $f(I)$ لا يحتوي على أي عنصر من الفترة $]f(a), M[$, إذاً $f(I)$ ليست فترة.

مبرهنة

لتكن I و J فترتين من $\mathbb{R}$ و لتكن $f\colon I \longrightarrow J$ دالة متصلة ومطردة قطعيا و $J = f(I)$. إذاً f هي تقابل والدالة العكسية f^{-1} متصلة على الفترة J.

البرهان

بما أن الدالة f مطردة قطعيا إذاً f أحادية و بذلك تكون f تقابل من I إلى $J = f(I)$.
f^{-1} هي كذلك مطردة قطعيا من J إلى I. و بما أن $I = f^{-1}(J)$ هي فترة و باستعمال المبرهنة ?? تكون الدالة f^{-1} متصلة.

تعريف

لتكن $f\colon I \longrightarrow J$ دالة معرفة على فترة مفتوحة I نحو فترة مفتوحة J. نقول أن f هي هوميومرفية إذا كانت f و f^{-1} متصلة.

مبرهنة

إذا كانت f متصلة و تقابل على فترة I, إذاً f هي هوميومرفية من I على $f(I)$.

مثال

الدالة $f(x) = x^2$ هي ميومرفية من $\mathbb{R}_+$ على $\mathbb{R}_+$.

لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية E من $\mathbb{R}$. نعرف بيان الدالة f, المجموعة الجزئية من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ المعرفة كالتالي $G_f = \{(x, f(x));\ x \in E\}$.

مبرهنة

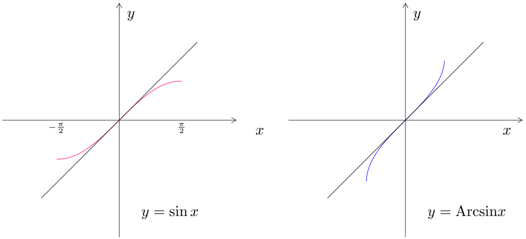
لتكن f تقابل من فترة I على فترة J. إذاً بيان الدالة f^{-1} هو نظير بيان الدالة f بالنسبة للمحور $y = x$.

أمثلة

1) $f(x) = x^n$، $x \in [0, +\infty[$، $n \geq 1$.
الدالة f متصلة و تزايدية قطعيا و الدالة $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ متصلة تزايدية قطعيا.
2) $f(x) = \sin x$ لكل $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = I$. الدالة f متصلة و تقابل من I على $J = [-1, 1]$.
الدالة $f^{-1}(x) = \mathrm{Arcsin}(x) = \sin^{-1}(x)$ هي كذلك دالة متصلة من $[-1, 1]$ على $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

إذًا $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$;$\forall x \in [-1, 1]$,$\sin^{-1}(\sin(x)) = x$,$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
$\sin^{-1}(\sin(x)) = x$ إلا إذا كان $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

1



تمرين

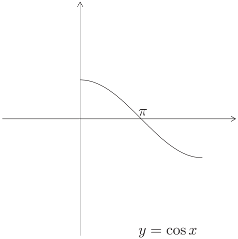
إحسب $\cos(\sin^{-1}(x))$ لكل $x \in [-1, 1]$. $\tan(\sin^{-1}(x))$ لكل $x \in]-1, 1[$.
$\cot(\sin^{-1}(x))$ لكل $x \in [-1, 1], x \neq 0$.

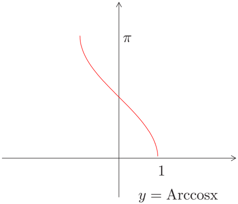
3) $f(x)=\cos(x)$, $x\in[0,\pi]$. f متصلة و تقابل من $[0,\pi]$ على $[-1,1]$ تناقصية قطعيا. و نرمز بالدالة العكسية $f^{-1}(x)=\cos^{-1}(x)$.

مبرهنة

$\cos(\cos^{-1}(x))=x$, إذا كان $x\in[-1,1]$. $\cos^{-1}(\cos(x))=x$, إذا كان $x\in[0,\pi]$. $\sin(\cos^{-1}(x))=\sqrt{1-x^2}$, إذا كان $x\in[-1,1]$.

1



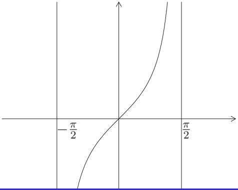


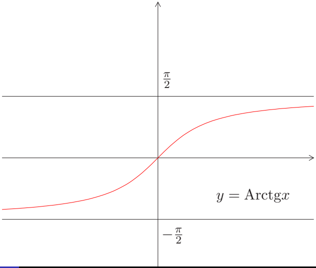
3) $f(x)=\tan(x)$; $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[=I$. $f\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$. الدالة f متصلة وتزايدية قطعيا. و نرمز بالدالة العكسية $f^{-1}=\mathrm{Arctan}=\tan^{-1}$.

إذاً $x=\tan y \iff y=\tan^{-1}x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

إذاً $\tan(\tan^{-1}(x))=x$ إذا كان $x\in\mathbb{R}$. $\tan^{-1}(\tan)(x)=x$ و$\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

1





بما أن الدالة $\cot:]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ هي تقابل نعرف الدالة $\mathrm{Arccot} = \cot^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow]0,\pi[$.

تمرين

إحسب $\tan^{-1}\frac{1}{x} + \tan^{-1}(x)$، $x \neq 0$.