فضاءات المتجهات

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

24 أفريل 2017

المحتويات

تعريف فضاء المتجهات

تعريف

نقول أن مجموعة $\mathbb{E}$ هي فضاء متجهات على $\mathbb{R}$ إذا كانت تحقق ما يلي:

1. (خاصية الإغلاق لعملية الجمع) إذا كان $u, v \in \mathbb{E}$ فإن $u + v \in \mathbb{E}$.
2. (الخاصية التجميعية لعملية الجمع) إذا كان $u, v, w \in \mathbb{E}$ فإن $u + (v + w) = (u + v) + w$.
3. (خاصية المحايد الجمعي) يوجد عنصر $0 \in \mathbb{E}$ (يسمى المحايد الجمعي) بحيث $u + 0 = 0 + u = u \forall u \in \mathbb{E}$.
4. لكل $u \in \mathbb{E}$ يوجد عنصر يرمز له بالرمز $-u$ ويسمى نظير u الجمعي و يحقق $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
5. (الخاصية الإبدالية للجمع) إذا كان $u, v \in \mathbb{E}$ فإن $u + v = v + u$.

1. (خاصية الإغلاق لعملية الضرب بعدد) إذا كان $u \in \mathbb{E}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha u \in \mathbb{E}$.
2. إذا كان $u, v \in \mathbb{E}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$.
3. إذا كان $u \in \mathbb{E}$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ فإن $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$.
4. إذا كان $u \in \mathbb{E}$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ فإن $(\alpha.\beta)u = \alpha(\beta u)$.
5. إذا كان $u \in \mathbb{E}$ فإن $1.u = u$.

أمثلة

1. $\mathbb{R}^n$ فضاء متجهات.
2. المجموعة $\{(x, y, 2x+3y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ هو فضاء متجهات.
3. مجموعة كثيرات الحدود $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$ هو فضاء متجهات.
كذلك مجموعة كثيرات الحدود بدرجة أقل أو يساوي n، $\mathcal{P}_n = \mathbb{R}_n[X]$ هو فضاء متجهات.

الفضاءات الجزئية

تعريف

ليكن V فضاء متجهات و F مجموعة جزئية من V. نقول أن F هي فضاء جزئي من V إذا كان F هو فضاء متجهات وذلك بنفس العمليات على V.

مبرهنة

ليكن V فضاء متجهات و F مجموعة جزئية من V.
F هي فضاء جزئي من V إذا تحققت الشروط التالية

1. $0 \in F$
2. إذا كان $u, v \in F$، فإن $u + v \in F$
3. إذا كان $u \in F$، $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha u \in F$.

أمثلة

1. ليكن $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2a-b \end{pmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$. F هي فضاء جزئي من $V = M_2(\mathbb{R})$.
2. لتكن $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ مصفوفة و ليكن $F = \{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = 0\}$. F هي فضاء جزئي من $V = \mathbb{R}^n$. (F هو مجموعة حلول النظام المتجانس $AX = 0$).
3. المجموعة $F = \{(x, x+1);\ x \in \mathbb{R}\}$ ليست فضاءا جزئيا من $\mathbb{R}^2$.

مثال

المجموعة $W = \{A \in M_n / \ A = 2A^T\}$ تشكل فضاءا جزئيا من M_n, حيث إن M_n هو فضاء المصفوفات المربعة من الدرجة n.

الحل إذا كانت $A, B \in W$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$2(A+B)^T = 2A^T + 2B^T = A + B$$

و

$$2(\lambda A)^T = 2\lambda A^T = \lambda A.$$

إذا W هو فضاء جزئي.

مثال

المجموعة $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ xy=0\}$ ليست فضاءا جزئيا لأن $(1,0,0)\in E$ و $(0,1,0)\in E$ ولكن $(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0)\notin E$.

تعريف

ليكن V فضاء متجهات و لتكن $v_1, \ldots, v_n \in V$ مجموعة من المتجهات. نقول أن $w \in V$ هو تركيب خطي للمتجهات $v_1, \ldots, v_n$ إذا وجد $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ بحيث

$$w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

مثال

المتجه $(4, 1, 1)$ هو تركيب خطي للمتجهات $(1, 0, 2)$,$(2, -1, 3)$, $(0, -1, 1)$ لأن

$$(4, 1, 1) = -2(1, 0, 2) + 3(2, -1, 3) - 4(0, -1, 1).$$

مبرهنة

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n) و لتكن $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ مصفوفة من الدرجة $(n, 1)$.

إذا كانت $C_1, \ldots, C_n$ هي أعمدة المصفوفة A فإن

$$AX = x_1 C_1 + \ldots + x_n C_n.$$

نتيجة

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n). عندئذ يكون النظام الخطي $AX = B$ متسقا إلا إذا كان B تركيبا خطيا لأعمدة المصفوفة A.

تعريف

لتكن $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات في فضاء متجه V.
نقول أن S تولد V إذا كان كل عنصر من V تركيبا خطيا لعناصر S.

مبرهنة

لتكن $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ و لتكن A مصفوفة من الدرجة (n, k) و $C_1, \ldots, C_k$ أعمدتها.
عندئذ المجموعة S تولد الفضاء $\mathbb{R}^n$ إلا إذا كان النظام $AX = B$ متسقا لكل $B \in \mathbb{R}^n$.

مبرهنة

لتكن $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات في فضاء متجه V ، عندئذ

1. مجموعة جميع التركيبات الخطية W لمتجهات S تشكل فضاءا جزئيا من V.
2. W هو أصغر فضاء جزئي يحتوي على S.
يسمى هذا الفضاء، الفضاء المولد بالمجموعة S و نرمز به $\langle S \rangle$ أو $\mathrm{Vect}(S)$.

مثال

ليكن في $\mathbb{R}^4$ المتجهات التالية $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ و $e_2 = (1, -2, 3, -4)$.
هل يوجد x و y حتى يكون المتجه $(x, 1, y, 1)$ عنصرا من الفضاء المولد بالمتجهات e_1, e_2؟
و هل يوجد x و y حتى يكون المتجه $(x, 1, 1, y)$ عنصرا من الفضاء المولد بالمتجهات e_1, e_2؟

الحل

حتى يكون $\langle e_1, e_2 \rangle \ni (x, 1, y, 1)$ يجب أن يكون النظام الخطي $AX = B$ متسقا مع $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. ولكن النظام ليس متسقا لأن المعادلتين الثانية والرابعة $(2a - 2b = 1,\ 4a - 4b = 1)$ لا يمكن أن تكونا صائبتين في نفس الوقت.

حتى يكون $\langle e_1, e_2 3\rangle \in (x, 1, 1, y)$ يجب أن يكون النظام الخطي $AX = B$ متسقا مع
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$ و $$B = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \\ y \end{pmatrix}.$$
وهذا النظام له حل وحيد. و في هذه الحالة $x = \frac{1}{3}$ و $y = 2$.

مثال

ليكن E الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمتجهات التالية: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ و ليكن F الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمتجهات التالية: $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

الفضائين E و F متساويان.

الحل

حتى يكن المتجه (a, b, c) في الفضاء E لا بد أن يحقق النظام الخطي التالي

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x - y = b \\ -x - 2y = c \end{cases}$$

و هذا النظان متكافئ مع النظام التالي

$$\begin{cases} x + 2y = -c \\ -3y = a + 2c \\ -7y = b + 3c \end{cases}.$$

هذا النظام يكون متسقا إلا و إذا كان $7a - 3b + 5c = 0$.

و نلاحظ أن إحداثيات المتجهات $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ تحقق هذه المعادلة. إذا $F \subset E$.

و بنفس الطريقة نثبت أن المتجهات $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ موجودة في F و هذا يثبت أن $E = F$.

مثال

هل يوجد $x, y \in \mathbb{R}$ حتى يكون المتجه $v = (-2, x, y, 5)$ موجودا في الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات التالية: $u = (1, -1, 1, 2)$ و $v = (-1, 2, 3, 1)$.

الحل

حتى يكون المتجه $v = (-2, x, y, 5)$ موجودا في الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات التالية: $u = (1, -1, 1, 2)$ و $v = (-1, 2, 3, 1)$. لا بد أن يكون النظام الخطي التالي $AX = B$ متسق مع $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ y \\ 5 \end{pmatrix}$.

و هذا النظام متسق إلا و إذا كان $\frac{y+2}{4} = x - 2 = 3$. إذا $x = 5$ و $y = 10$.

تعريف

نقول أن مجموعة من المتجهات $v_1, \dots, v_n$ في فضاء V هي مستقلة خطيا إلا إذا كان الحل الوحيد للمعادلة $a_1 v_1 + \dots, + a_n v_n = 0$ هو الحل الصفري.

مثال

$u = (1, 1, -2)$, $v = (1, -1, 2)$, $w = (3, 0, 2)$ مستقلة خطيا في $\mathbb{R}^3$.

$$xu + yv + zw = (0,0,0) \iff \begin{cases} x + y + 3z & = & 0 \\ x - y & = & 0 \\ -2x + 2y + 2z & = & 0 \end{cases}$$

هذا النظام له حل وحيد وهو الحل التافه.

مصفوفة هذا النظام هي $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ و محدد هذه المصفوفة هو -4.

تعريف

نقول أن متجهات $v_1, \ldots, v_n$ في فضاء متجهات V هي مرتبطة خطيا إذا كانت ليست مستقلة خطيا.

مثال

$u=(0,1,-2,1)$، $v=(1,0,2,-1)$، $w=(3,2,2,-1)$ مرتبطة خطيا في $\mathbb{R}^4$.

$$xu+yv+zw=(0,0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcl} y+3z &=& 0 \\ x+2z &=& 0 \\ -2x+2y+2z &=& 0 \\ x-y-z &=& 0 \end{array}\right.$$

هذا النظام له عدد لا نهائي من الحلول.

المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$ و الصيغة الدرجية الصفية لهذه المصفوفة هي: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

مبرهنة

إذا كانت $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات في فضاء متجهات V حيث $n \geq 2$. عندئذ S مرتبطة خطيا إذا وفقط إذا كان أحد متجهاتها تركيبا خطيا لبقية المتجهات.

مبرهنة

لتكن $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$ و لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n) و أعمدتها متجهات S. عندئذ تكون S مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان النظام المتجانس $AX = 0$ له حل وحيد و هو الحل التافه.

أمثلة

1. إذا كانت A مصفوفة من الدرجة (m, n) و $n > m$ فإنه يوجد عدد غير منته من الحلول للنظام $AX = 0$.
2. إذا كانت $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$ و $n > m$ فإن S مرتبطة خطيا.

الأساس والبعد

تعريف

لتكن $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات في فضاء متجهات V.
نقول أن S هي أساس للفضاء V إذا حققت الشرطين التاليين:

1. S تولد V
2. S مستقلة خطيا.

مبرهنة

إذا كانت $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V و كان $v \in V$ فإن v يكتب كتركيب خطي للمتجهات $v_1, \ldots, v_n$ بطريقة وحيدة.

ملاحظة

لتكن $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ المجموعة التالية من المتجهات في الفضاء $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

المجموعة S هي أساس للفضاء $\mathbb{R}^n$ و يسمى الأساس المعتاد أو الأساس الطبيعي للفضاء $\mathbb{R}^n$.

تمرين

أثبت أن $S = \{1, X, \dots, X^n\}$ أساسا لفضاء المتجهات $\mathcal{P}_n$.

مثال

ليكن $v_1 = (\lambda, 1, 1)$، $v_2 = (1, \lambda, 1)$ و $v_3 = (1, 1, \lambda)$. أوجد قيم $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث $\{v_1, v_2, v_3\}$ تكون أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$؟

الحل

المجموعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقلة خطيا إذا كان الحل الوحيد للمعادلة

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$$

هو الحل التافه و هذا متكافئ مع أن المصفوفة التالية لها معكوس: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

إذا $\lambda \notin \{-2, 1\}$.

المجموعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مولدة للفضاء $\mathbb{R}^n$ لأن النظام الخطي $AX = B$ متسق لكل $B \in \mathbb{R}^n$ لأن المصفوفة A لها معكوس.

مبرهنة

ليكن $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V و $T = \{u_1, \ldots, u_m\}$ مجموعة من المتجهات.
إذا كان $m > n$ فإن T مرتبطة خطيا.

نتيجة

إذا كانت كل من $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و $T = \{u_1, \ldots, u_m\}$ أساسا للفضاء V فإن $m = n$.

تعريف

إذا كان $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V فإن عدد المتجهات n في S يسمى بعد الفضاء V و نكتب $\dim V = n$.

مبرهنة

إذا كان V فضاء متجهات و بعده n و إذا كانت $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات في الفضاء V عندئذ

1. إذا كانت S مستقلة خطيا فإن S أساس للفضاء V.
2. إذا كانت S تولد V فإن S أساس للفضاء V.

مبرهنة

إذا كانت $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة مولدة للفضاء V فإن S تحتوي على أساس للفضاء
V.

ملاحظة

إذا كانت $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ مجموعة مولدة فإن كلا من الخوارزميتين التاليتين تزودنا بأساس للفضاء الجزئي المولد بالمجموعة S.

خوارزمية 1

1. كون مصفوفة A صفوفها متجهات S
2. استخدم طريقة جاوس أو جاوس جوردن لوضع A على صيغة درجية صفية أو صيغة درجية صفية مختزلة و لتكن C.
3. عندئذ صفوف C الغير صفرية هي أساس للفضاء الجزئي $\langle S \rangle$.

خوارزمية 2

1. كون مصفوفة A أعمدتها متجهات S
2. استخدم طريقة جاوس أو جاوس جوردن لوضع A على صيغة درجية صفية أو صيغة درجية صفية مختزلة و لتكن C.
3. لتكن C_1 مجموعة المتجهات المكونة من الأعمدة ذات العناصر المتقدمة في C ولتكن S_1 مجموعة المتجهات المكونة من الأعمدة في A المقابلة لعناصر C_1 عندئذ S_1 أساس للفضاء الجزئي $\langle S\rangle$.

مبرهنة

1. إذا كانت $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعة مولدة لفضاء المتجهات V فإن S تحتوي على أساس للفضاء V.
2. إذا كانت $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا في فضاء متجهات V فإنه يوجد أساس T للفضاء V يحتوي على S.

مثال

ليكن W الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^5$ المولد بالمتجهات التالية:
$v_1 = (1, 0, 2, -1, 2)$، $v_2 = (2, 0, 4, -2, 4)$، $v_3 = (1, 2, -1, 2, 0)$،
$v_4 = (1, 4, -4, 5, -2)$.

1. أوجد أساسا للفضاء W محتوى في $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
2. أوجد أساسا للفضاء $\mathbb{R}^5$ يحتوي على $\{v_1, v_3\}$.

الحل

1. لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ والتي أعمدتها هي احداثيات المتجهات v_1, v_2, v_3, v_4.

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

إذا $\{v_1, v_3\}$ هو أساس للفضاء W.

2. إذا كان $e_1 = (1,0,0,0,0)$، $e_2 = (0,1,0,0,0)$، $e_3 = (0,0,1,0,0)$.
إذًا $\{v_1, v_3, e_1, e_2, e_3\}$ هو أساس للفضاء $\mathbb{R}^5$ و يحتوي على $\{v_1, v_3\}$.

مثال

ليكن $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ 2x + y + z = 0,\ x - y + z = 0\}$

1. أثبت أن W هو فضاء جزئي من $\mathbb{R}^4$
2. أوجد أساسا للفضاء W.

الحل

1. W هو مجموع الحلول للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ مع $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. إذا W هو فضاء جزئي من $\mathbb{R}^4$.

$$X \in W \iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ z = 3y \end{cases}$$ 2

$$\iff X = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

إذًا $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ هو أساس للفضاء الجزئي W.

مثال

ليكن الفضاء $V = \mathbb{R}^3$.
إعط مجموعة جزئية S مستقلة خطية و ليست مولدة و إعط مجموعة جزئية T مولدة و ليست مستقلة خطية.

الحل

يمكن أن نأخذ $S = \{(1,0,0)\}$ و $T = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$.

الإحداثيات وتغيير الأساس

تعريف

إذا كانت $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V و كان $v \in V$ حيث

$$v = x_1 v_1 + \ldots x_n v_n$$

فإن $(x_1, \ldots x_n)$ تسمى إحداثيات المتجه v بالنسبة للأساس S و نرمز

$$[v]_S = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

و يسمى المتجه الإحداثي للمتجه v بالنسبة للأساس S.

مبرهنة

إذا كان $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و $C = \{u_1, \ldots, u_n\}$ أساسين للفضاء V. و إذا كانت ${}_CP_B$ مصفوفة من الدرجة n أعمدتها $[v_1]_C, \ldots, [v_n]_C$ عندئذ المصفوفة ${}_CP_B$ لها معكوس و

$$[v]_C = {}_CP_B[v]_B$$

لكل $v \in V$.
تسمى المصفوفة ${}_CP_B$ مصفوفة الإنتقال من الأساس B إلى الأساس C.

تمرين

ليكن $B = \{v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,-2), v_3 = (1,1,0)\}$ أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$ وليكن $C = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$.

1. أوجد كلا من ${}_CP_B$ و ${}_BP_C$.
2. أوجد $[v]_B$ إذا كان $[v]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

تمرين

1. $${}_CP_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad {}_BP_C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. $$[v]_B = {}_BP_C[v]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

مثال

أثبت أن في $\mathbb{R}^3$، المتجهات $u = (1, 0, 1)$، $v = (-1, -1, 2)$ و $w = (-2, 1, -2)$ تكون أساسا و أوجد إحداثيات المتجه $X = (x, y, z)$ في هذا الأساس.

الحل

المصفوفة التي أعمدتها المتجهات $u = (1, 0, 1)$، $v = (-1, -1, 2)$ و $w = (-2, 1, -2)$ هي $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

بما أن $|A| = -3$ فإن $u = (1, 0, 1)$، $v = (-1, -1, 2)$ و $w = (-2, 1, -2)$ تكون أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.

إذا كان $X = au + bv + cw$ فإن $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1}X = \begin{pmatrix} 2y + z \\ \frac{-x+z}{3} \\ \frac{-x+3y+z}{3} \end{pmatrix}$.

مثال

أثبت أن المتجهات $S = \{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$ تمثل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.
أوجد إحداثيات المتجهات التالية $(1,0,0)$، $(1,0,1)$ و $(0,0,1)$. في هذا الأساس.

الحل :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

إذًا S تمثل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.

$$(1,0,0) = \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{3}(-1,1,0) + \frac{1}{3}(1,0,-1).$$

إذا إحداثياته في الأساس S هي $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

الحل

$(0,0,1) = \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{3}(-1,1,0) - \frac{2}{3}(1,0,-1)$.
إذا إحداثياته في الأساس S هي $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.
$(1,0,1) = (1,0,0) + (0,0,1)$.
إذا إحداثياته في الأساس S هي $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

تعريف

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n).
يسمى الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^n$ المولد بصفوف المصفوفة A، الفضاء الصفي للمصفوفة A و يرمز له بالرمز $\mathrm{row}(A)$.
يسمى الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^m$ المولد بأعمدة المصفوفة A، الفضاء العمودي للمصفوفة A و يرمز له بالرمز $\mathrm{col}(A)$.

مبرهنة

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n). إذا كانت B هي المصفوفة التي نحصل عليهامن A بإجراء عمليات أولية على صفوف المصفوفة A فإن $\text{row}(A) = \text{row}(B)$.

مبرهنة

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n) و كانت B هي صيغة درجية صفية للمصفوفة A فإن مجموعة الصفوف الغير صفرية في المصفوفة B مستقلة خطيا.

تعريف

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n).
نسمي بعد الفضاء الصفي للمصفوفة A رتبة المصفوفة و نرمز به
$\text{rank}(A) = \dim(\text{row}(A))$.

ملاحظة

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n).
رتبة المصفوفة هو عدد العناصر المتقدمة في أي صيغة درجية صفية للمصفوفة A.

مبرهنة

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n) فإن

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{row}(A)) = \dim(\text{col}(A)).$$

نتيجة

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n) فإن

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T).$$

نتيجة

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة (m, n) و P مصفوفة لها معكوس من الدرجة m و Q مصفوفة لها معكوس من الدرجة n فإن

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(PAQ).$$

البرهان

نعلم أن إجراء عملية أولية على صفوف المصفوفة A يكافئ ضرب المصفوفة A من اليسار بمصفوفة أولية. و بما أن المصفوفة P هي حاصل ضرب مصفوفات أولية فإنه يمكن الحصول على PA بمتتالية من العمليات الصفية الأولية. لذا فإن

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(PA).$$

و باستعمال النتيجة السابقة نستنتج

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(PAQ).$$

مبرهنة

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة (m, n) فإن العبارات التالية متكافئة

1. للنظام $AX = 0$ حل وحيد وهو الحل التافه.
2. أعمدة المصفوفة A مستقلة خطيا.
3. $\operatorname{rank}(A) = n.$
4. للمصفوفة A^TA معكوس.

مبرهنة

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n) فإن العبارات التالية متكافئة

1. النظام $AX = B$ متسق لكل $B \in \mathbb{R}^m$.
2. أعمدة المصفوفة A تولد $\mathbb{R}^m$.
3. $\operatorname{rank}(A) = m.$
4. للمصفوفة AA^T معكوس.

تعريف

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n). الفضاء الجزئي

$$\{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = 0\}$$

يسمى الفضاء الصفري للمصفوفة A و نرمز له بالرمز $N(A)$ ويسمي بعده صفرية المصفوفة A و نرمز له بالرمز $\text{nullity}(A)$.
كذلك الفضاء الجزئي

$$\{AX;\ X \in \mathbb{R}^n\}$$

يسمى صورة المصفوفة A و نرمز له بالرمز $\text{Im}(A)$.

مبرهنة

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n) فإن $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{col}(A)$.

مبرهنة البعد للمصفوفات

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n) فإن

$$\operatorname{nullity}(A) + \operatorname{rank}(A) = n.$$

مثال

لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. أوجد أساسا للفضاء الصفري للمصفوفة.
2. عين أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة.
3. أوجد رتبة المصفوفة A.

الحل

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ هو أساس للفضاء الصفري للمصفوفة.

2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو أساس للفضاء العمودي للمصفوفة.

3. رتبة المصفوفة A هي 2.

مثال

ليكن $e_1 = (0,1,-2,1)$، $e_2 = (1,0,2,-1)$، $e_3 = (3,2,2,-1)$، $e_4 = (0,0,1,0)$ و $e_5 = (0,0,0,1)$ متجهات في $\mathbb{R}^4$. هل العبارات التالية صحيحة:

1. $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0) \in \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} \cap \mathrm{Vect}\{e_2, e_3, e_4\}$.
3. $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} + \mathrm{Vect}\{e_2, e_3, e_4\} = \mathbb{R}^4$.

الحل

1. لتكن المصفوفة A والتي صفوفها أحداثيات المتجهات e_1, e_2, e_3.
الفضاء $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ يمثل الفضاء الصفي للمصفوفة A.
الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
إذا $\dim \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} = 2$.
يكون $\mathrm{Vect}\{(1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\} = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ إلا
و إذا كانت رتبة المصفوفة التالية B هو 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة B هي $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

إذا

$$\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\}.$$

2. $(1,1,0,0)=e_1+e_2$، $2(1,1,0,0)=e_3-e_2$. إذا $(1,1,0,0)\in \mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}\cap \mathrm{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}$.

3. $(1,1,0,0)\in \mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}\cap \mathrm{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}$ و $e_2\in \mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}\cap \mathrm{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}$. إذا $\dim \mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}\cap \mathrm{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}=2$ و

$$\dim \mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}+\mathrm{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}\leq 3$$

إذا $\mathrm{Vect}\{e_1,e_2\}+\mathrm{Vect}\{e_2,e_3,e_4\}\neq \mathbb{R}^4$.

مثال

ليكن في $\mathbb{R}^3$، $u_1 = (1,2,1)$، $u_2 = (1,3,2)$، $u_3 = (1,1,0)$، $u_4 = (3,8,5)$.
وليكن $F = \text{Vect}(u_1,u_2)$ و $G = \text{Vect}(u_3,u_4)$. أثبت أن $F = G$.

الحل

بما أن المتجهان u_1, u_2 مستقلان خطيا و كذلك المتجهان u_3, u_4 مستقلان خطيا فإن $\dim E = \dim F = 2$.

$F = G$ إلا و إذا كانت رتبة المصفوفة التالية 2، $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة لهذه المصفوفة هي $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

إذا $F = G$.