نهاية الدوال

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

9 نوفمبر 2016

المحتويات

تعريف

1. نقول أن مجموعة A هي جوار لنقطة $a \in A$ إذا وجد $\alpha > 0$ بحيث $]a-\alpha, a+\alpha[\subset A$.
2. نقول أن مجموعة A هي جوار لـ $+\infty$ إذا وجد $\mathbb{R} \ni \alpha$ بحيث $]\alpha, +\infty[\subset A$.
3. نقول أن مجموعة A هي جوار لـ $-\infty$ إذا وجد $\mathbb{R} \ni \alpha$ بحيث $]-\infty, \alpha[\subset A$.

تعريف

لتكن دالة f معرفة بجوار نقطة $a \in \mathbb{R}$ مع احتمال أن الدالة f غير معرفة في النقطة a.
نقول أن الدالة f لها نهاية ℓ عند النقطة a إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0;\ \forall\ x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\};\ f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[. \quad (1)$$

و نرمز بذلك $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة كالتالي $f(0) = 2$ و $f(x) = x^2$ إذا كان $x \in \mathbb{R}^*$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ لأنه لكل $\varepsilon > 0$، و لكل $x \in]-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}[\setminus\{0\}$ فإن $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

مبرهنة

لتكن دالة f معرفة بجوار نقطة $a \in \mathbb{R}$ مع احتمال أن الدالة f غير معرفة في النقطة a.
إذا كانت الدالة f لها نهاية عند النقطة a فإن النهاية وحيدة.

البرهان

لتكن ℓ_1 و ℓ_2 نهايتين للدالة و ليكن $\varepsilon > 0$, **يوجد** $\alpha_1 > 0$ **بحيث** $\forall x \in]a-\alpha_1, a+\alpha_1[\setminus\{a\};\ |f(x)-\ell_1| < \varepsilon$ و **يوجد** $\alpha_2 > 0$ **بحيث** $\forall x \in]a-\alpha_2, a+\alpha_2[\setminus\{a\}\ |f(x)-\ell_2| < \varepsilon$.

ليكن $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2) > 0$. إذاً إذا كان $x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$, فإن $|f(x)-\ell_1| < \varepsilon$ و $|f(x)-\ell_2| < \varepsilon$.

و نستنتج أن $|\ell_1-\ell_2| \leq |f(x)-\ell_1| + |f(x)-\ell_2| < 2\varepsilon$.

إذاً $\ell_1 = \ell_2$.

مبرهنة

لتكن دالة f معرفة بجوار نقطة $a \in \mathbb{R}$ مع احتمال أن الدالة f غير معرفة في النقطة a.
إذا كانت الدالة f لها نهاية ℓ عند النقطة a فإن

1. f محدودة بجوار النقطة a.
يوجد $\alpha > 0$ و $M > 0$ بحيث $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\};\ |f(x)| \leq M$.
2. إذا كانت $\ell \neq 0$ يوجد $\alpha > 0$ بحيث
   - $f(x) > \frac{\ell}{2}$ لكل $x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$ إذا كان $\ell > 0$.
   - $f(x) < \frac{\ell}{2}$ لكل $x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$ إذا كان $\ell < 0$.
3. إذا كانت $f(x) \leq 0$ بجوار النقطة a فإن $\ell \leq 0$.

البرهان

1. باستعمال التعريف و عندما يكون $\varepsilon = 1$, يوجد $\alpha > 0$ بحيث $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$; $|f(x) - \ell| < 1$, إذاً $|f(x)| \leq 1 + |\ell|$, $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$. يكفي أن ناخذ $M = \max(1+|\ell|, |f(a)|)$.
2. إذا كانت $\ell \neq 0$, نأخذ $\varepsilon = |\frac{\ell}{2}| > 0$. يوجد $\alpha > 0$ بحيث لكل $x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$ و $|f(x) - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$, أو أيضا $\ell - \frac{|\ell|}{2} < f(x) < \ell + \frac{|\ell|}{2}$, $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$.
إذا كان $\ell > 0$, نستنتج أن $f(x) > \frac{\ell}{2}$, $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$.
إذا كان $\ell < 0$, نستنتج أن $f(x) < \frac{\ell}{2}$, $\forall x \in]a-a, a+a[\setminus\{a\}$.
3. إذا كان $\ell > 0$ باستعمال 2) $f(x) > \dfrac{\ell}{2}$ على $]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$, وهو مخالف للفرضيات. إذاً $\ell \leq 0$.

مبرهنة

لتكن دالة f معرفة على مجموعة U جوار لنقطة $a \in \mathbb{R}$ مع احتمال أن الدالة f غير معرفة في النقطة a. إذًا الدالة f لها نهاية ℓ عند النقطة a إلا وإذا كان لكل متتالية $(u_n)_n \in U \setminus \{a\}$ متقاربة نحو a فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$

البرهان

إذا كان للدالة f نهاية ℓ عند النقطة a, فإنه لكل $\varepsilon > 0$, يوجد $\alpha > 0$ بحيث إذا كان $0 < |x-a| < \alpha$, فإن $|f(x)-\ell| < \varepsilon$. و بما أن المتتالية $(x_n)_n$ متقاربة نحو a, إذًا لكل $\alpha > 0$, يوجد $N \in \mathbb{N}$, بحيث إذا كان $n \geq N$, نجد $0 < |x_n - a| < \alpha$.

و خلاصة ما وجدنا هو أن $\forall \varepsilon > 0$, يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث إذا كان $n \geq N$, $|f(x_n)-\ell| < \varepsilon$.

إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq \ell$, يوجد $\varepsilon_0 > 0$ بحيث $\forall \alpha > 0$, يوجد $x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$ و $|f(x)-\ell| \geq \varepsilon_0$. إذا كان $\alpha = \frac{1}{n}$, يوجد $x_n \neq a$ بحيث $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ و $|f(x_n)-\ell| \geq \varepsilon$. المتتالية $(x_n)_n$ متقاربة نحو a و $(f(x_n))_n$ ليست متقاربة من ℓ.

مبرهنة

لتكن f, g, h دوال معرفة على مجموعة U جوار لنقطة $a \in \mathbb{R}$ مع احتمال أن الدالات f غير معرفة في النقطة a بحيث $f \leq g \leq h$. إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \lambda$ فإن $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lambda$.

البرهان

لتكن $(x_n)_n$ متتالية متقاربة نحو a و $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

بما أن $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و بما أن

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} h(x_n) = \lambda$$

إذاً $\lim_{n \to +\infty} g(x_n) = \lambda$ و $\lim_{x \to a} g(x) = \lambda$.

مثال

لتكن $f(x)=1$ إذا كان $x\in\mathbb{Q}$ و $f(x)=0$ إذا كان $x\notin\mathbb{Q}$.

الدالة f ليس لها نهاية في أي نقطة $x\in\mathbb{R}$.

بما أن $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$, توجد متتالية $(x_n)_n\in\mathbb{Q}$ و متتالية $(y_n)_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ متقاربة من a. و بما $f(x_n)=1$ و $f(y_n)=0$، إذاً f ليس لها نهاية عند النقطة a.

مبرهنة (معيار كوشي)

لتكن دالة f معرفة على مجموعة U جوار لنقطة $a \in \mathbb{R}$ مع احتمال أن الدالة f غير معرفة في النقطة a. إذاً الدالة f لها نهاية عند النقطة a إلا وإذا كان

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 /\ \forall x, y \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\},\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

البرهان

إذا كان للدالة f نهاية ℓ عند النقطة a، إذًا $\forall \varepsilon > 0$, يوجد $\alpha > 0$ بحيث لكل $0 < |x-a| < \alpha$, يكون $|f(x)-\ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ كذلك إذا كان $0 < |y-a| < \alpha$ فإن $|f(y)-\ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. إذًا $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

لنفرض الآن أن $\forall \varepsilon > 0$, يوجد $\alpha > 0$ بحيث إذا كان $0 < |x-a| < \alpha$ و $0 < |y-a| < \alpha$, فإن $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث إذا كان $n \geq N$، $\frac{1}{n} < \alpha$. نستنتج أنه إذا كان $n \geq N$ و $m \geq N$، $|f(a+\frac{1}{n}) - f(+\frac{1}{m})| < \varepsilon$. إذًا المتتالية $(f(a+\frac{1}{n}))_n$ هي كوشي، إذًا هي متقاربة. لتكن ℓ نهايتها.

نريد أن نثبت أن $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

إذا كان $0 < |x-a| < \alpha$ و إذا كان $n \geq N$;

$|f(x)-\ell| \leq |f(x)-f(a+\frac{1}{n})| + |f(a+\frac{1}{n})-\ell| < 2\varepsilon$.

مبرهنة

لتكن دالتين f و g معرفة على مجموعة U جوار لنقطة $a \in \mathbb{R}$ مع احتمال أن الدالة f غير معرفة في النقطة a بحيث $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lambda$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lambda'$, إذاً

1. $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \lambda + \lambda'$.
2. $\lim\limits_{x\to a} (f.g)(x) = \lambda.\lambda'$.
3. إذا كان $\lambda \neq 0$, فإن $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lambda}$.

مبرهنة

لتكن دالة f معرفة على مجموعة U جوار لنقطة $a \in \mathbb{R}$ مع احتمال أن الدالة f غير معرفة في النقطة a بحيث $\lim_{x\to a} f(x) = b$ و إذا كانت دالة g معرفة على مجموعة V جوار لنقطة b مع احتمال أن الدالة g غير معرفة في النقطة b بحيث $\lim_{x\to b} g(x) = \lambda$ و $f(U\setminus\{a\}) \subset V\setminus\{b\}$. إذاً $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = \lambda$.

للبرهان نأخذ متتالية نهايتها a ولا تساوي a و نستعمل المبرهنة ?? في الباب الثالث و المبرهنة 12.

تعريف

لتكن دالة f معرفة على فترة $]a, b[$.

1 نقول أن الدالة لها نهاية ℓ على يسار b إذا توفر الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0;\ \forall x \in]b-\alpha, b[;\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

و نرمز بذلك $\ell = \lim\limits_{x \to b, (x<b)} f(x)$ أو $\ell = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.

2 نقول أن الدالة لها نهاية ℓ' على يمين a إذا توفر الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0;\ \forall x \in]a, a+\alpha[;\ |f(x) - \ell'| < \varepsilon.$$

و نرمز بذلك $\ell' = \lim\limits_{x \to a, (x>a)} f(x)$ أو $\ell' = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

مبرهنة

لتكن دالة f معرفة على مجموعة U جوار لنقطة $a \in \mathbb{R}$ مع احتمال أن الدالة f غير معرفة في النقطة a. إذًا الدالة f لها نهاية عند النقطة a إلا وإذا كانت لها نهاية على يمين وعلى شمال النقطة a و هذه النهايات متساوية.

البرهان

من البديهي أنه إذا كان للدالة نهاية عند النقطة a فإن لها نهاية على يمين وعلى شمال النقطة a و هذه النهايات متساوية.

إذا كان للدالة نهاية على يمين وعلى شمال النقطة a و هذه النهايات متساوية، إذًا

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0;\ \forall x \in]a-\alpha, a[;\ |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

و

$$\exists \beta > 0;\ \forall x \in]a, a+\beta[;\ |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

إذا كان $\delta = \min(\alpha, \beta)$ فإن

$$\forall x \in]a-\delta, a+\delta[;\ |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

مثال

لتكن الدالة $f(x) = 1 - xE(\dfrac{1}{x})$. نريد أن نبحث على $\lim_{x\to 0} f(x)$.

إذا كان $x > 0$,

$$E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} < E(\frac{1}{x}) + 1,$$

إذاً

$$xE(\frac{1}{x}) \leq 1 < xE(\frac{1}{x}) + x$$

و

$$1 - x < xE(\frac{1}{x}) \leq 1.$$

إذاً $\lim_{x\to 0^+} xE(\frac{1}{x}) = 1$.

إذا كان $x < 0$,

$$E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} < E(\frac{1}{x}) + 1,$$

إذًا

$$xE(\frac{1}{x}) \geq 1 > xE(\frac{1}{x}) + x$$

و

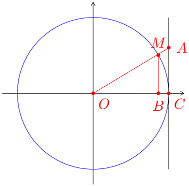
$$1 - x > xE(\frac{1}{x}) \geq 1.$$

إذًا $\lim_{x\to 0^-} xE(\frac{1}{x}) = 1$ و $\lim_{x\to 0} xE(\frac{1}{x}) = 1$.

مثال

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1



الدالة $\frac{\sin x}{x}$ هي دالة زوجية، إذًا يكفي أن نعطي البرهان عندما تكون $0 < x < \frac{\pi}{2}$. $\sin x = MB$, $\tan x = AC$. مساحة المثلث MOB هي أصغر من مساحة القطاع MOC وهي بنفسها أصغر من مساحة المثلث OAC. و نستنتج أن

$$\cos x \sin x < x < \tan x.$$

نقسم بالعدد $\sin x > 0$ و نستنتج $\cos x < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, إذًا $\lim\limits_{x\to 0,(x>0)} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

تعريف

1 إذا كانت دالة f معرفة على مجموعة U جوار لنقطة $a \in \mathbb{R}$ مع احتمال أن الدالة f غير معرفة في النقطة a. نقول أن الدالة f لها نهاية $+\infty$ عند النقطة a إذا توفر الشرط التالي
$\forall M > 0, \exists \alpha > 0$ بحيث إذا كان $0 < |x - a| < \alpha$ فإن $f(x) > M$. و نرمز بذلك $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

2 إذا كانت دالة f معرفة على مجموعة U جوار لـ $+\infty$. نقول أن الدالة f لها نهاية $+\infty$ عند $+\infty$ إذا توفر الشرط التالي
$\forall M > 0, \exists A > 0$ بحيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x) > M$. و نرمز بذلك $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

تمرين

إعط تعريف النهايات التالية

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lambda$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lambda$.

ملاحظات

إذا كان a عدد حقيقي فإن

1. إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, إذًا $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$ و $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = +\infty$.
2. إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, فإن $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$ و $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = +\infty$.
3. إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \lambda$, $\lambda \neq 0$, إذًا $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = \mathrm{sig}(\lambda)\infty$, مع $\mathrm{sig}(\lambda) = 1$ إذا كان $\lambda > 0$ و $\mathrm{sig}(\lambda) = -1$ إذا كان $\lambda < 0$.
4. إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \lambda$, إذًا $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

حالات خاصة

1. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, لا يمكن الجزم بالنهاية التالية $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$. (نقول أنها صيغة عدم تعيين).
2. إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, لا يمكن الجزم بالنهاية التالية $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (نقول أنها صيغة عدم تعيين).

$a = 0$

1 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{-1}{x^2}$, $f + g = 0$.

2 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{-2}{x^2}$, $f + g = \dfrac{-1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to 0}(f + g) = -\infty$.

3 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, إذاً $\dfrac{f}{g} = 1$.

4 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^4}$, إذاً $\dfrac{f}{g} = x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ و $\dfrac{g}{f} = \dfrac{1}{x^2} \to +\infty$.