أنظمة المعادلات الخطية

د. المنجي بلال

4 أكتوبر 2017

المحتويات

باب 1

أنظمة المعادلات الخطية

1.1 مدخل للأنظمة الخطية

لنبدأ بطرح المسألة التالية:
نريد معرفة عمر الأب و عمر الإبن إذا كانت لنا المعطيات التالية:
إذا أخذنا أربعة أضعاف عمر الإبن و طرحنا منها عمر الأب نجد 5، و إذا أخذنا ضعف عمر الأب و طرحنا منها سبع أضعاف عمر الإبن نجد 3.
الجواب إذا كان عمر الأبن هو x و عمر الأب هو y نجد المعدلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 4x & - & y & = & 5 \\ -7x & + & 2y & = & 3 \end{cases}$$

هاتين المعادلتين تسمى نظام خطي، و x, y تسمى المجاهيل.
سنعطي طريقتين لحل هذا النظام:
الطريقة الأولى
المعادلة الأولى متكافئة مع المعادلة التالية: $8x - 2y = 10$ و بجمع هذه المعادلة مع المعادلة الثانية نجد أن $x = 13$ و بتعويض قيمة x في أي معادلة نجد أن $y = 47$.
الطريقة الثانية
النظام الخطي السابق متكافئ مع الكتابة التالية

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ فإن النظام الخطي متكافئ مع $AX = B \iff X = A^{-1}B$.
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ و $X = \begin{pmatrix} 13 \\ 47 \end{pmatrix}$.

1.2 طريقة جاوس و جاوس جوردن

تعريف 1.2.1
إذا كانت $(a_{j,k})$ $(1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n)$ أعدادا حقيقية و إذا كانت $x_1, \ldots, x_n$ مجاهيل و إذا كانت $b_1, \ldots, b_n$ أعدادا حقيقية، يمكن كتابة نظام معادلات خطية كما يلي

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \cdots & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \cdots & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & a_{m,2}x_2 & \cdots & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

و يمكن كتابة هذا النظام الخطي في صيغة مصفوفات كما يلي: $AX = B$ مع

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

تعريف 1.2.2

1. نقول أن نظامين من المعادلات الخطية متكافئان إذا كان لها نفس مجموعة الحلول.
2. نقول أن نظام خطي متسقا أو متآلفا إذا كان له حل و نقول أنه غير متسق إذا لم يكن له حل.

سنقوم بتوسيع المصفوفة A و ذلك باضافة المصفوفة B و نحصل على مصفوفة $[A|B]$ وتسمى المصفوفة الموسعة

1.2.1 طريقة جاوس

لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة $[A|B]$ على صيغة درجية صفية و نحصل على نظام خطي مثلثي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس لحل النظام الخطي.

1.2.2 طريقة جاوس جوردن

لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة $[A|B]$ على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة و نحصل على نظام خطي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس جوردن لحل النظام الخطي.

1.3 الأنظمة الخطية المتجانسة

تعريف 1.3.1
نقول أن نظام خطي $AX = B$ متجانس إذا كان $B = 0$.

ملاحظات 1.3.1

1. كل نظام خطي متجانس متسق لأن الحل التافه هو حل لهذا النظام.
2. إذا كان X_1 و X_2 حلان للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ فإن $X_1 + \lambda X_2$ هو حل للنظام الخطي لكل $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. إذا كان للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ حل غير صفري فإن النظام له عدد ما لا نهائي من الحلول.

مبرهنة 1.3.1
إذا كان للنظام الخطي $AX = B$ حل X_0 إذا كل حل X للنظام الخطي سيكون على الصيغة $X = X_0 + X_1$ حيث X_1 حل للنظام المتجانس $AX = 0$.

1.4 قاعدة كرامر

مبرهنة 1.4.1
إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n ولها معكوس إذا الحل الوحيد للنظام الخطي $AX = B$ هو

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

حيث A_j هي المصفوفة A_j هي المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة A بوضع العمود B عوضا عن العمود C_j

1.5 تمارين الباب االثالث

تمرين 1 :

1. أوجد حلول النظام الخطي التالي في $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x+2y-z &= -4 \\ -x+y &= -2 \\ y-z &= -4 \end{cases}$$

2. أوجد حلول النظام الخطي التالي في $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} x+2y-z+t &= 1 \\ 3x-y+5y-t &= 2 \\ 5x+3y+3z+t &= \alpha \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

تمرين 2 :

1. أوجد حلول الانظمة الخطية التالية في $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} -2y+3z &= 0 \\ 2x-4y+2z &= 0 \\ -x-2y+5z &= 0 \\ x-2y-z &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2y+3z &= 0 \\ 2x-4y+2z &= 1 \\ -x-2y+5z &= 0 \\ x-2y &= 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x+2y+3z &= -1 \\ x-y+(m-1)z &= 2 \\ m^2x+3y+4z &= -2 \\ x+4y+(m^2+4)z &= -3 \end{cases}$$

$m \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 6x+3y-z &= 2 \\ -4x+y-6z &= 0 \\ x+2y-5z &= -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y+3z-2t &= 0 \\ 2x+y-4z+3t &= 0 \\ 2x+3y+2z-t &= 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x+my+(m-1)z &= m+1 \\ 3x+2y+mz &= 3 \\ (m-1)x+my+(m+1)z &= m-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ 2x+(a+3)y+3z &= 3 \\ x+(-a+3)y+(a-2)z &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+my+(m-1)z &= m+1 \\ 3x+2y+mz &= 3 \\ (m-1)x+my+(m+1)z &= m-1 \end{cases}$$

2. أوجد حلول النظام الخطي التالي في $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} x+y-z+t &= 0 \\ z-2t &= 0 \end{cases}$$

تمرين 3 :

أوجد حلول الأنظمة الخطية التالية بالستعمال طريقة جاوس جوردن

1. $$\begin{cases} x+y+2z &= 8 \\ -x-2y+z &= 1 \\ 3x-7y+4z &= 10 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x-y+2z-w &= -1 \\ 2x+y-2z-2w &= -2 \\ -x+2y-4z+w &= 1 \\ 3x-3w &= -3 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 2x+2y+2z &= 0 \\ -2x+5y+2z &= 0 \\ -7x+7y+z &= 0 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 2x-3y &= -2 \\ 2x+y &= 1 \\ 3x+2y &= 1 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 3x+2y-z &= -15 \\ 5x+3y+2z &= 0 \\ 3x+y+3z &= 11 \\ 11x+7y &= -30 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 4x-8y &= 12 \\ 3x-6y &= 9 \\ -2x+4y &= -6 \end{cases}$$

تمرين 4 :

1. أوجد علاقة بين a, b, و c حتى يكون النظام التالي متسق.

$$\begin{cases} x+y+2z &= a \\ x+z &= b \\ 2x+y+3z &= c \end{cases}$$

2. أثبت أنه إذا كان $ad-bc \neq 0$, فإن الصيغة الدرجية الصبية للمصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ هي

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

تمرين 5 :

1. عين كل من $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ التي من أجلها يكون $(1, -1, 2)$ حلا للنظام الخطي

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + z = -1 \\ ax + 3y - cz = -1 \end{cases}.$$

2. أثبت أن $(\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{2})$ هو حلا وحيدا للنظام الخطي في الفقرة (1).

تمرين 6 :

لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

أ) أوجد المصفوفة $B = \text{adj}A$ و محدد المصفوفة A.

ب) أوجد معكوس المصفوفة A إن أمكن ذلك.

تمرين 7 :

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

أوجد قيمة العدد a بحيث $A^2 - AB + aI_3 = 0$ واستنتج معكوس المصفوفة A.

تمرين 8 :

استخدم طريقة جاوس جوردان لإيجاد مجموعة الحلول للنظام الخطي التالي

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 11 \\ x + 2y + z + t = 9 \\ x + y + z + 2t = 6 \\ 2x + y + z + t = 14 \end{cases}$$

تمرين 9 :

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ و لها معكوس فأثبت أن $\text{adj}(\text{adj}A) = (\det A)^{n-2}A.$

تمرين 10 :

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. أثبت أن النظام الخطي $AX = B$ متسق إلا وإذا كان $b - a = c - b$.

1.6 إصلاح تمارين الباب االثالث

حل التمرين 1:

1. المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

هي صيغة درجية صفية لهذه المصفوفة. إذا باستعمال طريقة جاوس، النظام له حل وحيد وهو $x = 1, y = -1, z = 3.$
و الصيغة الدرجية الصفية لهذه المصفوفة هي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

إذا باستعمال طريقة جاوس جوردن، النظام له حل وحيد وهو $x = 1, y = -1, z = 3$.

2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-4 \end{array}\right]$$

هي صيغة درجية صفية لهذه المصفوفة.
إذا كان $m \neq 4$ النظام غير متسق. و إذا كان $m = 4$ النظام له عدد غير منته من الحلول.

$$\{(\frac{5}{7} - \frac{9}{7}z + \frac{1}{7}t, \frac{1}{7} + \frac{8}{7}z - \frac{4}{7}t, z, t) \in \mathbb{R}^4\}.$$

حل التمرين 2:

1. المصفوقة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right]$

الصيغة الدرجية الصفية:

$1R_{1,2}$, $-3R_{1,3}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right]$

$-R_2$, $10R_{2,3}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -32 & -104 \end{array}\right]$

$$:-\frac{1}{32}r_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array}\right]$$

$$:(-1)R_{2,1} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array}\right]$$

$$:3R_{3,2}, (-5)R_{3,1} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array}\right].$$

الحل هو $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{3}{4}$, $z = \frac{13}{4}$.

2. المصفوقة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$.

الصيغة الدرجية الصفية:

$$:(-2)R_{1,2}, 1R_{1,3}, (-3)R_{1,4} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$:R_{2,3}, (-3)R_{2,3}, (-3)R_{2,4} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$:1R_{2,1} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

الحل هو $x = u - 1$, $y = 2s$, $z = s$, $t = u$.

3. الحل هو $x = -3t$, $y = -4t$, $z = 7t$.

4. النظام غير متسق.

5. $x = -4$, $y = 2$, $z = 7$.

6. $x = 3 + 2t$, $y = t$.

7. المصفوقة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right]$.

الصيغة الدرجية الصفية: $(-1)R_{1,2}, (-2)R_{1,3}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & -1 & c-2a \end{array}\right]$.

$1R_{2,3}$ ،$(-1)R_2$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right]$.

إذا لا يكون النظام متسقا إلا إذا كان $-a-b+c=0$.

حل التمرين 3:

1. $(1,-1,2)$ هو حل للنظام الخطي إلا و إذا كان $a=2$، $b=-1$ و $c=0$.

2. بما أن مصفوفة النظام الخطي

$$\begin{cases} 2x-y-3z=-3 \\ -2x+y+z=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$$

لها معكوس إذا النظام الخطي له حل وحيد.
(محدد المصفوفة يساوي 16)

حل التمرين 4:

أ) $B=\mathrm{adj}A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ و $|A|=2$.

ب) $A^{-1}=\frac{1}{2}B$.

حل التمرين 5:

$$A-B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$A(A-B)=2I_3$.

$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-B)$.

حل التمرين 6:

المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

إذا $x=6,\ y=1,\ z=3,\ t=-2$.