متتاليات الأعداد الحقيقية

المنجي بلال

المحتويات

باب 1

متتاليات الأعداد الحقيقية

1.1 تمهيد

ليكن $n \in \mathbb{N}$, نريد معرفة مجموع الأعداد التالية

$$\begin{array}{rcl} S_{n,0} & = & 1+1+\ldots+1 \\ S_{n,1} & = & 1+2+\ldots+n \\ S_{n,2} & = & 1+2^2+\ldots+n^2 \\ S_{n,3} & = & 1+2^3+\ldots+n^3 \\ S_{n,3} & = & 1+2^4+\ldots+n^4 \end{array}$$

$S_{n,0} = n$ أما $S_{n,1}$ فيمكن أن نلاحظ أن مجموع العدد الأول والأخير هو $(n+1)$ ، كذلك مجموع العدد الثاني والعدد القبل الأخير وهكذا. زنستنتج أن $S_{n,1} = \frac{n(n+1)}{2}$. أما لمعرفة قيمة $S_{n,2}$ فنستعمل المعادلة التالية $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ و نكتب

$$\begin{array}{rcl} S_{n,0} & = & 1+1+\ldots+1 \\ 3S_{n,1} & = & 3(1+2+\ldots+n) \\ 3S_{n,2} & = & 3(1+2^2+\ldots+n^2) \\ S_{n,3} & = & 1+2^3+\ldots+n^3 \end{array}$$

ونستنتج
$S_{n,3} + 3S_{n,2} + 3S_{n,1} + S_{n,0} = S_{n,3} - 1 + (n+1)^3$ وبذلم نجد

$$S_{n,2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2) ليكن $r \in \mathbb{R}$ أو في $\mathbb{C}$ و $n \in \mathbb{N}$ ونريد معرفة قيمة $S_n = 1 + r + \ldots + r^n$. نلاحظ أنه إذا كان $r = 1$, فإن $S_n = n + 1$. أما إذا كان $r \neq 1$, نلاحظ أن $(1-r)S_n = 1 - r^{n+1}$. إذا

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{r}.$$

1.2 نهاية المتتاليات

تعريف 1.2.1

لتكن $f\colon \mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجموع الأعداد الطبيعية. نرمز بـ u_n = $f(n)$ و نقول أن الدالة f هي متتالية من الأعداد الحقيقية. و العدد u_n يسمى الحد النوني للمتتالية. و نرمز بهذه المتتالية كالتالي $(u_n)_n$.

أمثلة 1.2.1

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,$u_n = c \in \mathbb{R}$ تمثل متتالية ونقول أنها متتالية ثابتة.
2. إذا كانت $(u_n)_n$ متتالية وإذا كان $p \in \mathbb{N}$ فإن $(v_n = u_{n+p})_n$ تمثل متتالية كذلك.
3. إذا كانت $f\colon I \longleftrightarrow I$ دالة معرفة على فترة I و إذا كانت المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة كالتالي $u_1 = a$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل $n \in \mathbb{N}$. نقول أن هذه المتتالية هي متتالية ؟؟؟.

• في الحالة الخاصة $f(x) = x + r$ تسمى المتتالية متتالية حسابية والعدد r يسمى أساس المتتالية. الحدد النوني للمتتالية في هذه الحالة هو $u_n = a + (n-1)r$ و

$$u_1 + \ldots + u_n = na + r(1 + \ldots (n-1)) = na + \frac{n(n-1)}{2}.$$

• في الحالة الخاصة $f(x) = rx$ تسمى المتتالية متتالية هندسية والعدد r يسمى أساس المتتالية. الحدد النوني للمتتالية في هذه الحالة هو $u_n = ar^{n-1}$ و إذا كان $r \neq 1$

$$u_1 + \ldots + u_n = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

4. إذا كانت $(u_n)_n$ متتالية فإن لكل $p \in \mathbb{N}$ نعرف المتتالية $(v_n)_n$ كالتالي $v_n = u_{n+p}$.

تعريف 1.2.2

نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة ونهايتها $\ell \in \mathbb{R}$ إذا توفر الشرط التالي:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ |u_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

العدد ℓ يسمى نهاية المتتالية $(u_n)_n$ و نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

مبرهنة 1.2.1

إذا كان لمتتالية نهاية فإن هذه النهاية وحيدة.

البرهان

إذا كانت ℓ_1 و ℓ_2 نهايتين للمتتالية $(u_n)_n$ و إذا كان $\varepsilon <$ يوجد $N_1 \in \mathbb{N}$ و $N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N_1$, $|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$ و لكل $n \geq N_2$, $|u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$. إذا كان $n \geq \max(N_1, N_2)$, $|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$ و $|u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$. إذا

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \leq 2\varepsilon$$

لكل $\varepsilon > 0$. إذا $\ell_1 = \ell_2$. □

أمثلة 1.2.2

1. المتتالية $(\frac{1}{n})_n$ متقاربة ونهايتها صفر.
نعرف أن لكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $N\varepsilon \geq 1$. إذا لكل $n \geq N$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$.
2. المتتالية $(r^n)_n$ متقاربة ونهايتها صفر إذا كانت $0 < r < 1$.
لقد بينا أنه لكل $x \geq 0$, $(1+x)^n \geq nx$. إذا $r^n = \dfrac{1}{(1+\frac{1-r}{r})^n} \leq \dfrac{r}{n(1-r)}$. نعرف أن لكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $N\varepsilon \geq 1$. إذا لكل $n \geq N$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$.
3. المتتالية $((-1)^n)_n$ غير متقاربة.
لنفرض أنها متقاربة ونهايتها ℓ.
ليكن $\varepsilon = \frac{1}{2}$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{2}$. إذا $|u_{2N} - \ell| = |1 - \ell| \leq \dfrac{1}{2}$ و $|u_{2N+1} - \ell| = |1 + \ell| \leq \dfrac{1}{2}$ و هذا يعطي $\ell \geq \frac{1}{2}$ و $\ell \leq -\frac{1}{2}$ وهذا غير ممكن. إذا المتتالية $((-1)^n)_n$ غير متقاربة.

تعريف 1.2.3

1. نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ محدودة من أعلى إذا وجد عدد حقيقي M بحيث

$$u_n \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ محدودة من أسفل إذا وجد عدد حقيقي m بحيث

$$u_n \geq m, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ محدودة إذا كانت محدودة من أعلى و من أسفل.

مبرهنة 1.2.2

كل متتالية متقاربة محدودة والعكس غير صحيح.

البرهان
ليكن ℓ هي نهاية المتتالية $(u_n)_n$ وليكن $\varepsilon = 1$، يوجد حد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N,$ $|u_n - \ell| \leq 1$. إذا إذا كان $M = \max\{u_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \leq N-1\}$, فإن

$$|u_n| \leq \max(1 + |\ell|, M),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

مثال 1.2.1

لقد بينا أن المتتالية $((-1)^n)_n$ غير متقاربة وهي بالطبع محدودة.
نعطي مثلا آخر مهم وهي المتتالية $(u_n = \sin n)_n$.
نعرف المتتالية $(v_n = \cos n)_n$. نعلم أن

$u_{n+1} = \sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \sin 1 \cos n = u_n \cos 1 + v_n \sin 1$ و $v_{n+1} = \cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin 1 \sin n = v_n \cos 1 - u_n \sin 1$. إذا ، إذا كانت واحدة منها متقاربة فلأخرى متقاربة. لنفرض أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة ونهايتها ℓ والمتتالية $(v_n)_n$ متقاربة ونهايتها ℓ'. و بما أن $u_n^2 + v_n^2 = 1$ فإن $\ell^2 + {\ell'}^2 = 1$. كذلك حسب ما سبق $\ell = \ell \cos 1 + \ell' \sin 1$ و $\ell' = \ell' \cos 1 - \ell \sin 1$.
النظام الخطي $\begin{cases} \ell(1-\cos 1) - \ell' \sin 1 = 0 \\ \ell \sin 1 + \ell'(1-\cos 1) = 0 \end{cases}$ هو نظام كرامر ، إذا $\ell = \ell' = 0$ وهذا يتناقض مع العلاقة $\ell^2 + {\ell'}^2 = 1$.

مبرهنة 1.2.3

إذا كانت متتالية $(u_n)_n$ تحقق $u_n \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$. فإن $\ell \leq M$.

البرهان
لنفرض أن $M < \ell$. إذا كان $\varepsilon = \frac{\ell - M}{2} > 0$ ، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $-\varepsilon \leq U_n - \ell$ لكل $n \geq N$.
هذا يعطي $U_n \geq \frac{\ell + M}{2} > M$

□

مبرهنة 1.2.4

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين متقاربتين ، و إذا كانت $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ، إذا

1. المتتالية $(u_n + v_n)_n$ متقاربة نحو $\ell + \ell'$.
2. المتتالية $(u_n.v_n)_n$ متقاربة نحو $\ell.\ell'$.
3. إذا كانت $\ell > 0$, يوجد n_0 بحيث لكل $n \geq n_0$, $u_n > 0$ والمتتالية $(\frac{1}{u_n})_{n>n_0}$ متقاربة نحو $\frac{1}{\ell}$.

البرهان

1. ليكن $\varepsilon > 0$, يوجد $N_1 \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.
يوجد $N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N_2$, $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$. ليكن $N = \max(N_1, N_2)$. لكل $n \geq N$, $|u_n + v_n - \ell - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \varepsilon$.

2. المتتاليتين محدودتين ، إذا يوجد $M > 0$ بحيث لكل $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M$.
ليكن $\varepsilon > 0$, يوجد $N_1 \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2M}$, يوجد $N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N_2$, $|v_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2M}$. لكل $n > \max(N_1, N_2)$, $|u_n.v_n - \ell.\ell'| \leq |u_n - \ell|.|v_n| + |\ell||v_n - \ell'| \leq M.\frac{\varepsilon}{2M} + M.\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$.

3. ليكن $\delta = \frac{\ell}{2} > 0$; يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq n_0$ لنا $-\frac{\ell}{2} < u_n - \ell < \frac{\ell}{2}$, إذا $u_n > \frac{\ell}{2} > 0$ لكل $n \geq n_0$.
ليكن $\varepsilon > 0$, يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon \ell^2}{2}$. لكل $n \geq \max(n_0, N)$ $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}| \leq |\frac{u_n - \ell}{\ell u_n}| < \varepsilon$.

نتيجة 1.2.5

ليكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين متقاربتين ، و إذا كانت $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ، إذا

1. إذا كانت $\ell < \ell'$, لنا $u_n < v_n$ بعد حد معين.

2. إذا كان $u_n \leq v_n$ لكل n, إذا $\ell \leq \ell'$.

3. إذا كانت $a < u_n < b$, إذا $a \leq \ell \leq b$.

مبرهنة 1.2.6

ليكن $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ ثلاث متتاليات تحقق $u_n \leq v_n \leq w_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا كانت المتتاليات $(u_n)_n$ و $(w_n)_n$ متقاربة ولها نفس النهاية ، إذا المتتالية $(v_n)_n$ متقاربة ولها نفس نهاية $(u_n)_n$ و $(w_n)_n$.

البرهان
لتكن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. لكل $\varepsilon > 0$, يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$, $-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell \leq \varepsilon$. ونستنتج أن المتتالية $(v_n)_n$ متقاربة نحو ℓ.
□

1.2.1 تطبيقات

1. إذا كان $0 < a < 1$, إذا المتتالية $(a^n)_n$ متقاربة نحو 0. ولنبرهن ذلك ، ليكن $a = \dfrac{1}{1+b}$, مع $b > 0$. وبما أن $(1+b)^n > 1 + nb$, إذا $0 < a^n < \dfrac{1}{1+nb}$. المتتالية $(\dfrac{1}{1+nb})_n$ متقاربة نحو 0, وكذلك المتتالية $(a^n)_n$ متقاربة نحو 0.

2. لكل $a > 0$, المتتالية $(a^{\frac{1}{n}})_n$ متقاربة نحو 1.

إذا كان $a > 1$, نكتب $a^{\frac{1}{n}} = 1 + b_n$, وهذا يعطي $a = (1+b_n)^n > nb_n$, إذا $b_n < \dfrac{a}{n}$.
و نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

إذا كان $a < 1$, إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = 1$, و $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, و لنبرهن عن ذلك نكتب $n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$, ليكن $(1+a_n)^n = n$. ولكن $n = (1+a_n)^n > 1 + na_n + \dfrac{n(n-1)}{2}a_n^2$. و نستنتج أن $a_n^2 < \dfrac{2}{(n-1)}$, و $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

مبرهنة 1.2.7

1. لكل عدد حقيقي x توجد متتالية من الأعداد النسبية تتقارب نحو x. (نقول أن $\mathbb{Q}$ كثيف في $\mathbb{R}$).

2. ليكن $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, إذا لكل $x \in \mathbb{R}$, توجد متتالية $(x_n)_n \in \mathbb{Z}$ بحيث

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{q^n} = x.$$

البرهان

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, يوجد $x_n \in \mathbb{Q} \cap [x, x + \frac{1}{n}]$, إذا $|x_n - x| \leq \frac{1}{n}$. وبذلك نستنتج أن المتتالية $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ متقاربة نحو x.

2. يمكن أن نأخذ $x > 0$, يوجد عدد صحيح x_n بحيث $x_n \leq q^n x < x_n + 1$, إذا

$$\frac{x_n}{q^n} \leq x < \frac{x_n}{q^n} + \frac{1}{q^n}.$$

إذا المتتالية $(\frac{x_n}{q^n})_n$ متقاربة نحو x.

□

ملاحظة **1.2.1** (تطبيق على المفكوك العشري للأعداد الحقيقية)

لكل عدد حقيقي x, نرمز بـ $E(x)$ الجزئه الصحيح لـ x.
ليكن x عدد حقيقي موجب, إذا كان $x_0 = E(x)$, إذا $0 \leq x - x_0 < 1$. نرمز بـ $x_1 = E\big(10(x - x_0)\big)$, إذا $0 \leq x - x_0 - \frac{x_1}{10} < \frac{1}{10}$. و لكل عدد صحيح $n \geq 2$ العدد $x_n = E\Big(10^n(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{10^k})\Big)$. إذا

$$0 \leq x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k} < \frac{1}{10^k}.$$

الأعداع x_j تحقق $0 \leq x_j \leq 9$.
الكتابة $x_0, x_1 \ldots x_n \ldots$ تسمى المفكوك العشري للعدد الحقيقي x. (هذا المفكوك وحيد)

1.2.2 المتتاليات المطردة

تعريف **1.2.4**

1. نقول أن متتالية $(u_n)_n$ هي تزايدية إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq u_{n+1}$.

2. نقول أن متتالية $(u_n)_n$ هي تناقصية إذا كان $\forall \ n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq u_{n+1}$.

مبرهنة **1.2.8**

1. في $\mathbb{R}$, كل متتالية تزايدية محدودة علويا هي متقاربة.

2. في $\mathbb{R}$, كل متتالية تناقصية محدودة سفليا هي متقاربة.

البرهان

1. لتكن $(u_n)_n$ متتالية تزايدية و محدودة علويا. المجموعة $E = \{u_1, \ldots\} = \{u_n; \ n \in \mathbb{N}\}$ محدودة علويا. ليكن $\ell = \sup E$. إذا كان $\varepsilon > 0$, $\ell - \varepsilon < \ell$, و باستعمال تعريف أصغر حد علوي ، يوجد $u_{n_0} \in E$ بحيث $\ell - \varepsilon < u_{n_0} \leq \ell$. وبما أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية فإن $\ell \geq u_n \geq u_{n_0} > \ell - \varepsilon$ لكل $n \geq n_0$. إذا $|\ell - u_n| < \varepsilon$ لكل $n \geq n_0$. وبذلك نستنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نحو ℓ.

2. لتكن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية و محدودة سفليا ، غذا المتتالية $(v_n)_n$ المعرفة كالتالي $v_n = -u_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ هي متتالية تزايدية و محدودة علويا ، إذا هي متقاربة ، وهذا يبرهن أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.

ملاحظة 1.2.2

ليكن x عدد حقيقي موجب ، إذا المتتالية $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k}\right)_n$ المعرفة في الملاحظة 1.2.1 هي تزايدية وتتقارب نحو x.

1.2.3 المتتاليات المتجاورة

تعريف 1.2.5

نقول أن متتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ هما متجاورتين إذا
أ) (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ،
ب) المتتالية $(u_n - v_n)_n$ متقاربة نحو 0.

نستنتج من التعريف أن $u_n \leq v_n$, لكل $n \in \mathbb{N}$.

مبرهنة 1.2.9

متتاليتين متجاورتين متقاربة و لهما نفس النهاية.

البرهان
المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة ومحدوودة علويا بـ v_1 و المتتالية $(v_n)_n$ متناقصة ومحدوودة سفليا بـ u_1.
إذا المتتاليتين متقاربة لهما نفس النهاية.
□

تمرين 1.2.1

لتكن $(u_n)_{n\geq 2}$ و $(v_n)_{n\geq 2}$ متتاليتين معرفة كالتالي

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. أثبت أن المتتاليتين متجاورتين و ليكن e نهايتها.
2. أثبت أن e ليس عدد كسري.

الحل

1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$, إذا المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية والمتتالية $(v_n)_n$ تناقصية.
2. إذا كان $e = \frac{p}{q}$, مع p و q عددين صحيحين و ليس لهما قاسم مشترك. بما أن المتتاليين متجاورتين إذا لكل $n \in \mathbb{N}$, $u_n < e < v_n$ و كحالة خاصة $u_q < \frac{p}{q} < v_q$. إذا $q!u_q < \frac{pq!}{q} < q!v_q$ و $q!u_q$ و $q!v_q$ هما عددين صحيحين متتاليين و $\frac{pq!}{q}$ هو عدد صحيح وهذا غير صحيح.

مبرهنة 1.2.10 مبرهنة الفترات المغلقة والتناقصية

ليكن $(I_n = [a_n, b_n])_n$ متتالية من الفترات المغلقة في $\mathbb{R}$ و تحقق ما يلي:

1. $I_{n+1} \subset I_n,\ \forall\, n \geq 1.$
2. $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0.$

إذا $\bigcap_n I_n$ تحتوي على عنصر وحيد.

البرهان
بما أن $I_{n+1} \subset I_n$, إذا $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ و هذا يبرهن أن المتتاليتين $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$ متجاورتين. إذا يوجد $x \in \mathbb{R}$ بحيث $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = x$; $\{x\} \subset \bigcap_n I_n$. Si $y \in \bigcap\limits_n I_n$, إذا لكل $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq y \leq b_n$. مما ينتج عنه أن $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = y = x$. إذا $\{x\} = \bigcap_n I_n$.

□

1.3 المتتاليات الجزئية

تعريف 1.3.1

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين. نقول أن المتتالية $(v_n)_n$ هي متتالية جزئية من المتتالية $(u_n)_n$ إذا وجدت دالة $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ تزايدية مطلقا بحيث $v_n = u_{\varphi(n)}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

مثال 1.3.1

$(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$,$(u_{3n})_n$ تمثل متتاليات جزئية من المتتالية $(u_n)_n$.

مبرهنة 1.3.1

كل متتالية جزئية من متتالية متقاربة هي متقاربة و لها نفس النهاية.

البرهان
ليكن $\varepsilon > 0$, يوجد حد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$; $|u_n - \ell| < \varepsilon$. و بما أن φ تزايدية مطلقا فإن $\varphi(N) \geq N$ و بذلك لكل $n \geq N,\ \varphi(n) \geq N \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$.

ملاحظة 1.3.1

يمكن أن تكون متتالية $(u_n)_n$
غير متقاربة و لها متتالية جزئية متقاربة.

مثال 1.3.2

$u_n = (-1)^n$, مع $n \in \mathbb{N}$. $u_{2n} = 1$ و $u_{2n+1} = -1$, إذا المتتاليتين $(u_{2n})_n$ و $(u_{2n+1})_n$ متقاربة و لكن المتتالية $(u_n)_n$ متباعدة.

تمرين 1.3.1

1. أثبت أنه إذا كانت $(u_n)_n$ متتالية بحيث المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_n$ و $(u_{2n+1})_n$ متقاربة و لها نفس النهاية ℓ, فإن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نحو ℓ.

2. أثبت أنه إذا كانت $(u_n)_n$ متتالية بحيث كل المتتاليات الجزئية التالية $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ و $(u_{3n})_n$ متقاربة. إذا المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.

الحل

1. ليكن $\varepsilon > 0$, يوجد حد N بحيث لكل $n \geq N$, $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ و $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$. إذا لكل $n \geq 2N+1$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. و بذلك نستنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نحو ℓ.

2. ليكن $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$, $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ و $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n}$. المتتالية $(u_{6n}$ هي متتالية جزئية من $(u_{2n})_n$ و من $(u_{3n})_n$. إذا $\ell_1 = \ell_3$. و ببنفس المنطق المتتالية $u_{6n+3} = u_{3(2n+1)} = u_{2(3n+1)+1}$ هي متتالية جزئية من المتتالية $(u_{2n+1})_n$ و $(u_{3n})_n)$. إذا $\ell_2 = \ell_3$. و هذا المطلوب.

مبرهنة تمهيدية 1.3.2

لتكن $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$ متتاليتين بحيث

-1 $a_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

-2 المتتالية $(a_n)_n$ تزايدية و المتتالية $(b_n)_n$ تناقصية.

-3 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0.$

إذا المتتاليتين $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$ متقاربة ولهما نفس النهاية.

البرهان
بما أن المتتالية $(a_n)_n$ تزايدية و المتتالية $(b_n)_n$ تناقصية فإن $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$ وهذا يبين أن المتتاليتين $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$ محدودةز إذا متقاربة. و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ إذالهما نفس النهاية.

□

تعريف 1.3.2

لتكن $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$ متتاليتين. نقول أن متتالية $(b_n)_n$ هي متتالية جزئية من متتالية $(a_n)_n$ إذا وجدت دالة تزايدية $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ بحيث $b_n = a_{\varphi(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

مثال 1.3.3

المتتاليات $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$, $(a_{4n})_n$ هي متتاليات جزئية من المتتالية $(a_n)_n$.

ملاحظات 1.3.1

كل دالة تزايدية $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ تحقق $\varphi(n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. و نبهن هذا بالإستقراء.

مبرهنة 1.3.3

كل متتالية جزئية من متتالية متقاربة فهي متقاربة ولهما نفس النهاية.

البرهان
إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ و إذا

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ |u_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

و بما أن $\varphi(n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ إذا $\varphi(n) \geq N$ لكان $n \geq N$.
إذا $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.

□

ملاحظة 1.3.2

إذا كانت متتالية $(a_n)_n$ لها متتاليتين جزئيتين و لها نهايات مختلفة. إذا المتتالة $(a_n)_n$ متباعدة.

مبرهنة 1.3.4 (مبرهنة $\mathrm{Bolzano-Wieirstrass}$)

لكل متتالية محدودة لها متتالية جزئية متقاربة.

البرهان
ليكن

$$E = \{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

1– إذا كانت المجموعة E تحتوي على عدد محدود من العناصر ، إذا يوجد عنصر يتكلرر ما لا نهائي مرة في المتتالية. إذا توجد متتالية جزئية ثابتة ، إذا فهي متقاربة.

2– إذا كانت المجموعة E تحتوي على عدد غير محدود من العناصر. بما أن المجموعة محدودة ، توجد فترة $[a, b]$ تحتوي على المجموعة E.
أحد الفترتين $[a, \frac{a+b}{2}]$ أو $[\frac{a+b}{2}, b]$ على الأقل يحتوي على عدد ما لا نهائي من عناصر E.
نسمى هذه الفترة $[a_1, b_1]$ التي تحتوي على عدد ما لا نهائي من عناصر E.
نعيد هذه العملية ما لا نهائي مرة و هذا يعطي متتالية من الفترات $[a_n, b_n]$ تحقق ما يلي:
$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ و تحتوي هذه الفترة على عدد ما لا نهائي من عناصر E.
لناخذ $a_{n_1} \in E \cap [a_1, b_1]$ و بما أن الفترة $[a_2, b_2]$ تحتوي على عدد ما لا نهائي من عناصر E فإنه يوجد $n_2 > n_1$ و $u_{n_2} \in [a_2, b_2]$.
بهذه الطريقة نجد متتالية جزئية $(u_{n_k})_k$ تحقق $u_{n_k} \in [a_k, b_k]$.
المتتالية $(a_n)_n$ تزايدية و المتتالية $(b_n)_n$ تناقصية و لهما نفس النهاية. إذا

$$\lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} b_k.$$

□

1.4 متتاليات كوشي

تعريف 1.4.1

نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ هي متتالية كوشي إذا توفر الشرط التالي:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall m, n \geq N,\ |u_n - u_m| \leq \varepsilon. \qquad (1.1)$$

مبرهنة 1.4.1

كل متتالية متقاربة هي كوشي.

البرهان
إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, إذا لكل $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ بحيث $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$, إذا لكل $n \geq N$ و $m \geq N$, $|u_n - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| < \varepsilon$.

□

مبرهنة 1.4.2

كل متتالية كوشي محدودة.

البرهان
ليكن $\varepsilon = 1$, يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$, $|u_n - u_N| \leq 1$. إذا لكل $n \geq N$; $|u_n| \leq |u_N| + 1$. إذا كان $M = \max(|u_0|, \ldots, |u_N|, |u_N| + 1)$ نجد أن $|u_n| \leq M,\ \forall n \geq 0$.

□

مبرهنة 1.4.3
كوشي محدودة كل متتالية

مبرهنة 1.4.4

كل متتالية كوشي فهي متقاربة.

البرهان
لتكن $(u_n)_n$ متتالية كوشي ، إذا فهي محدودة. باستعمال مبرهنة Bolzano − Weirstrass توجد متتالية جزئية $(u_{\varphi(n)})_n$ متقاربة. إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \lambda$, إذا $\forall\varepsilon > 0$; $\exists N_1$ بحيث إذا كان $n \geq N_1$, $|u_{\varphi(n)} - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\exists N_2$ بحيث إذا كان $n \geq N_2$ و $m \geq N_2$ نجد أن $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.
ليكن $N = \max(N_1, N_2)$, إذا لكل $n \geq N$, $|u_n - \lambda| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \lambda| < \varepsilon$
لأنه إذا كان $n \geq N$; $\varphi(n) \geq N$. و نستنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.

□

1.4.1 مثال

1. معادلة KEPLER

نعتبر المعادلة التالية

$$x = q\sin x + a, \qquad 0 \leq q < 1, a \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

لايجاد حل لهذه المعادلة ، نعرف المتتالية $(x_n)_n$ التالية. $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_{n+1} = q\sin x_n + a$, $n \geq 1$.

المتتالية $(x_n)_n$ هي كوشي:

$$(x_{n+1} - x_n) = q(\sin x_n - \sin x_{n-1}) = 2q\sin[\frac{x_n - x_{n-1}}{2}]\cos[\frac{x_n + x_{n-1}}{2}].$$

إذا $|x_{n+1}-x_n| \leq q|x_n-x_{n-1}|$, و هذا يعطي $|x_n-x_{n-1}| \leq q^{n-1}|x_1-x_0|$, لكل $n \geq 2$.

ليكن n و m عددين صحيحين بحيث $m > n$.

$$\begin{aligned} |x_m-x_n| &\leq |x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\dots|x_{n+1}-x_n| \\ &\leq (q^{m-1}+\dots q^{n-1})|x_2-x_1| \leq \frac{q^{n-1}}{1-q}|x_2-x_1|. \end{aligned}$$

إذا $\lim_{n,m\to+\infty}(x_n-x_m)=0$ وهذا يبين أن المتتالية $(x_n)_n$ هي متتالية كوشي ، إذا متقاربة.

ليكن x نهايتها. هذه النهاية تحقق المعادلة (1.2) ويمثل الحل الوحيد لهذه المعادلة لأنه إذا كان y حل آخر, يكون لنا $|x-y| = q|\sin x - \sin y| \leq q|x-y| \Rightarrow x = y$ لأن $0 \leq q < 1$.

2. متتالية Fibonacci لتكن المتتالية $(a_n)_n$ المعرفة كالتالي $a_0 = a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, لكل $n \geq 1$. هذه المتتالية تسمى متتالية $Fibonacci$.

نعرف المتتالية $(x_n)_n$ كالتالي $x_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ لكل $n \in \mathbb{N}_0$. إذا $x_0 = 1$ و $x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n}$.

المتتالية $(x_n)_n$ متقاربة و تتقارب نحو العدد $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ و يسمى العدد الذهبي. ولبيان أن المتتالية متقاربة سنبين أنها متتالية كوشي.

باستعمال الاستقراء الرياضي نبين أن $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

إذا كان $n \leq m$,

$$|x_n-x_m| \leq \sum_{k=m}^{n-1}|x_{k+1}-x_k|$$

و

$$|x_{k+1}-x_k| \leq \frac{1}{1+x_k}-\frac{1}{1+x_{k-1}} = \frac{|x_k-x_{k-1}|}{(1+x_k)(1+x_{k-1})} \leq \frac{|x_k-x_{k-1}|}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})} = \frac{4}{9}|x_k-x_{k-1}|.$$

ونستنتج المطلوب بنفس الطريقة في المثال الأول.

نهاية هذه المتتالية ℓ تحقق المعادلة $\ell = \dfrac{1}{1+\ell}$, إذا $\ell = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1.5 إمتداد تعريف نهاية المتتاليات

تعريف 1.5.1

1. نقول أن متتالية $(u_n)_n$ تنتهي لـ (أو تقترب من) $+\infty$ إذا توفر الشرط التالي:

$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ بحيث $\forall n \geq N$, $u_n \geq A$. و نرمز بذلك بـ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. نقول أن متتالية $(u_n)_n$ تنتهي لـ (أو تقترب من) $-\infty$ إذا كانت المتتالية $(-u_n)_n$ تنتهي لـ $+\infty$ و نرمز بذلك بـ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

تمرين 1.5.1

أثبت أن

1. كل متتالية تزايدية غير محدودة علويا تنتهي لـ $+\infty$.
2. كل متتالية تناقصية غير محدودة سفليا تنتهي لـ $-\infty$.

الحل

لتكن $(u_n)_n$ متتالية تزايدية غير محدودة علويا ، إذا $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ بحيث $u_N \geq A$.
إذا كان $n \geq N$, $u_n \geq u_N \geq A$. إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1.5.1 النهاية العلوية والنهاية السفلية لمتتالية

لتكن $(u_n)_n$ متتالية محدودة من الأعداد الحقيقية. نعرف المتتاليتين $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ كما يلي:

$$v_n = \sup\{u_j;\ j \geq n\}\ w_n = \inf\{u_j;\ j \geq n\},\ n \geq 1.$$

بما أن $\{u_j;\ j \geq n+1\} \subset \{u_j;\ j \geq n\}$ المتتالية $(v_n)_n$ تناقصية والمتتالية $(w_n)_n$ تزايدية و $w_n \leq v_n$. إذا المتتاليات $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ متقاربة.
نسمي نهاية المتتالية $(v_n)_n$ النهاية العلوية للمتتالية $(u_n)_n$ و نرمز بها $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ و نسمي نهاية المتتالية $(v_n)_n$ النهاية العلوية للمتتالية $(u_n)_n$ و نرمز بها $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$.

ملاحظات 1.5.1

1. المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة إلا ةإذا كانت $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$.
2. إذا كانت المتتالية $(u_n)_n$ غير محدودة نعرف بنفس الطريقة النهاية العلوية والنهاية السفلية للمتتالية $(u_n)_n$ لأن في كل الحالات المتتالية $(v_n)_n$ تناقصية والمتتالية $(w_n)_n$ تزايدية ولها نهاية.

تعريف 1.5.2 نقطة ملاصقة

نقول أن عدد x هو نقطة ملاصقة لمتتالية $(u_n)_n$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$, يوجد عدد ما لا نهائي من عناصر المتتالية في المجال $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.
نقول أن عدد x هو نقطة تراكم لمتتالية $(u_n)_n$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$, يوجد عدد ما لا نهائي من عناصر المتتالية في $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \setminus \{x\}$.

كل نقطة تراكم هي نقطة ملاصقة.

مثال 1.5.1

$u_n = [(-1)^n + 1](a + \frac{1}{n}) + [(-1)^{n+1} + 1](b + \frac{1}{n})$.
$2a$, $2b$ هي نقاط تراكم للمتتالية $(u_n)_n$.

مبرهنة 1.5.1

كل نقطة ملاصقة لمتتالية $(u_n)_n$ هي نهاية لمتتالية جزئية من المتتالية $(u_n)_n$.

البرهان
ليكن x نقطة ملاصقة للمتتالية $(u_n)_n$. ليكن u_{n_1} عنصر من المتتالية في المجال $[x-1, x+1]$.
يوجد $n_2 > n_1$ بحيث $u_{n_1} \in [x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}]$ لأن المجال $[x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}]$ يحتوي على عدد ما لا نهائي ن عناصر المتتالية.
و بهذه الطريقة نكون متتالية جزئية تتقارب من x. $\square$

تمرين 1.5.2

كل متتالية محدودة و تحتوي على عدد ما لا نهائي من العناصر المختلفة لها نقطة تراكم.

الحل مشابه لبرهان مبرهنة $\mathrm{Bolzano-Weierstrass}$

1.6 تمارين الباب الثالث

تمرين 1 : ($Fibonacci$ متتالية)

لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ و $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, لكل $n \in \mathbb{N}$.
لتكن E مجموعة المتتاليات المعرفة بـ $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, لكل $n \in \mathbb{N}$.

1. أثبت أن المجموعة E تحتوي على متتاليتين هندسية و أول عناصرها 1 و أساسها q_1 و q_2.
2. لكل متتالية $(v_n)_n$ في E, أثبت أنه يوجد عددين حقيقيين a و b بحيث $v_n = aq_1^n + bq_2^n$, لكل $n \in \mathbb{N}$.
3. أثبت أن لكل $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n$.
4. أثبت أن $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ متقاربة و أوجد نهايتها.

تمرين 2 :
لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_1 = 1$ و $u_{n+1}^2 = \dfrac{n^3 u_n^2 + 2n + 1}{(n+1)^3}$. نعرف المتتالية $(v_n)_n$ بـ $v_n = n^3 u_n^2$.

1. أ) أثبت أن $v_{n+1} - v_n = 2n + 1$.
   ب) استنتج صيغة u_n بالنسبة لـ n.
2. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n$.

تمرين 3 :
لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_1 \in [0, 1[$ و $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + u_n}{2}}$.

1. أثبت أنه يوجد $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ وحيد بحيث $u_n = \cos(\dfrac{\theta}{2^n})$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
2. لتكن $(v_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $v_n(\theta) = u_1 u_2 \ldots u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} u_k$.
   أثبت أن $v_n(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})}$.
3. استنتج أن المتتالية $(v_n)_n$ متقاربة وأوجد نهايتها.
4. أوجد نهاية المتتالية $(v_n)_n$ في حالة ما إذا كان $u_1 = 0$.

تمرين 4 :
لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_1 = 1$ و $u_{n+1}^2 = \dfrac{n^3 u_n^2 + 2n + 1}{(n+1)^3}$. نعرف المتتالية $(v_n)_n$ بـ $v_n = n^3 u_n^2$.

1. أ) أثبت أن $v_{n+1} - v_n = 2n + 1$.
   ب) استنتج صيغة u_n بالنسبة لـ n.

2. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

تمرين 5 :

لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_1 \in [0,1[$ و $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$.

1. أثبت أنه يوجد $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ وحيد بحيث $u_n = \cos(\dfrac{\theta}{2^n})$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
2. لتكن $(v_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $v_n(\theta) = u_1u_2\dots u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} u_k$.
   أثبت أن $v_n(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{2^n\sin(\frac{\theta}{2^n})}$.
3. استنتج أن المتتالية $(v_n)_n$ متقاربة وأوجد نهايتها.
4. أوجد نهاية المتتالية $(v_n)_n$ في حالة $u_1 = 0$.

تمرين 6 :

لتكن المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بـ $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$, لكل $n \in \mathbb{N}$.

1. احسب u_1, u_2, u_3.
2. أثبت أن $0 \le u_n \le 1$, لكل $n \in \mathbb{N}$.
   لتكن $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ المتتاليات المعرفة بـ $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$.
3. أثبت أن $v_{n+1} = \dfrac{1+v_n}{2+v_n}$ و $w_{n+1} = \dfrac{1+w_n}{2+w_n}$.
4. أثبت أن المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية والمتتالية $(w_n)_n$ تناقصية.
5. استنتج أن المتتاليات $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ متقاربة نحو نفس النهاية. ℓ و أوجد قيمة ℓ.
6. أثبت أن $\left|u_{n+1} - \ell\right| \le \dfrac{2|u_n - \ell|}{1+\sqrt{5}}$.
7. استنتج أن $\left|u_n - \ell\right| \le \left(\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}$.

تمرين 7 :

لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_1 = \alpha$ و $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}$.

1. أوجد قيم α حتى تكون المتتالية $(u_n)_n$ معرفة جيدا.
2. أثبت أن لكل $n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge 1$.
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية لكل $n \ge 1$.
4. استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و أوجد نهايتها.

تمرين 8 :

ليكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ المتتاليات المعرفة بـ $u_1 = 5$ و $v_1 = 3$ ، $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ و $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ ، لكل $n \in \mathbb{N}$.

1. أثبت أن المتتاليات $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ معرفة جيدا و $u_n > 0$ ، $v_n > 0$ ، لكل $n \in \mathbb{N}$.
2. أثبت أن $u_n \geq v_n > 0$ ، لكل $n \in \mathbb{N}$.
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية والمتتالية $(v_n)_n$ تزايدية.
4. أثبت أن المتتاليات $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متقاربة نحو نفس النهاية ℓ.
5. أثبت أن $(u_n v_n)_n$ هي متتالية ثابتة و استنتج قيمة ℓ.

تمرين 9 :

لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})}$.

1. أ) أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية.
   ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.
2. أ) أثبت أن $u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   ب) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3. لتكن $(v_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{u_k}{k}$.
   أثبت أن المتتالية $(v_n)_n$ متقاربة واحسب نهايتها.

تمرين 10 :

لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!}$.

1. أثبت أن $u_n \leq \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

   لتكن $(v_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية.
   ب) أثبت أن $\dfrac{2}{(n+1)(n+2)} = 2(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2})$.
   ج) استنتج أن المتتالية $(v_n)_n$ متقاربة.
3. أ) أثبت أن $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n(n+1)}$.
   ب) استنتج أن المتتالية $(w_n)_n$ المعرفة بـ $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{u_k}}{k}$ متقاربة.

تمرين 11 :
لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_1 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. أثبت باستعمال الاستقراء الرياضي أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية.
2. أثبت أن $u_n \leq 2$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
3. استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة وأوجد نهايتها.

لتكن $(v_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $v_1 = 1$ و $v_{n+1} = \sqrt{n+v_n}$.

4. أثبت أن $\sqrt{n}+1 \leq 2\sqrt{n+1}$.
5. أ) أثبت باستعمال الاستقراء الرياضي أن لكل $n \in \mathbb{N}$; $v_n \leq 2\sqrt{n}$.

ب) أثبت أن $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$ متقاربة و أوجد نهايتها.

لتكن $(a_n)_n$ المتتالية الموجبة و $(w_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ

$$w_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{a_n}}}}.$$

6. إذا كانت $a_n = \lambda^{2^{n+1}}$, مع $\lambda > 0$.

أثبت أن $w_n = \lambda u_n$.

7. استنتج أن المتتالية $(w_n)_n$ متقاربة و أوجد نهايتها.

تمرين 12 :
لتكن المتتالية من الاعداد الكسرية $(\frac{p_n}{q_n})_n$, مع $p_1 = q_1 = 1$ et $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ و $q_{n+1} = p_n + q_n$.

1. أثبت أن p_n و q_n هما أوليين فيما بينهما لكل n.
2. أثبت أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$.

تمرين 13 :
ليكن a_0 و b_0 عددين حقيقيين بحيث $0 < a_0 < b_0$. لكل عدد صحيح $n \in \mathbb{N}$, لنا

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$.
2. أثبت أن المتتالية $(a_n)_n$ تزايدية والمتتالية $(b_n)_n$ تناقصية.
3. أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N}$; $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$.
4. استنتج أن المتتاليات $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$ متلاصقة.

استنتج .

تمرين 14 :
احسب النهايات التالية .
$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1}$ لكل $x \in]-2, +\infty[$;
$g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos^{2n} x}{1 + \sin^{2n} x}$ لكل $x \in \mathbb{R}$
و $h(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\lim\limits_{m\to+\infty} (\cos m!\pi x)^{2n})$ مع $x \in \mathbb{R}$. (ناقش الحالات $x \in \mathbb{Q}$ و $x \notin \mathbb{Q}$).

تمرين 15 :
لتكن المتتالية $(u_n)_n$ معرفة بـ $u_0 \in \mathbb{R}$ و

$$u_n = \frac{u_{n-1} - 6}{u_{n-1} - 4}, \qquad n \geq 1.$$

1. أوجد كل قيم u_0 بحيث تكون المتتالية $(u_n)_n$ ثابتة. (لتكن α و β هذه القيم).
2. نفرض أن $u_0 \neq \alpha$ و $u_0 \neq \beta$. احسب $\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ باعتبار $\dfrac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} - \beta}$.
استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و أوجد نهايتها.

تمرين 16 :
لتكن $(u_n)_n$ متتالية معرفة بـ $u_1 \in \mathbb{R}$,

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}, \qquad n \geq 1.$$

1. أوجد حلول المعادلة التالية في $\mathbb{C}$

$$\lambda = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}. \qquad (1.3)$$

2. إذا كانت المعادلة (1.3) لها جذرين مختلفين α و β. أثبت أن

$$\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k\frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} - \beta} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, k \in \mathbb{C}.$$

3. إذا كانت المعادلة (1.3) لها جذر متكرر α, أثبت أن

$$\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_{n-1} - \alpha} + k.$$

4. ادرس وجود نهاية المتتالية $(u_n)_n$.

تمرين 17 :
ادرس المتتالية المعرفة بـ $2u_{n+1} = u_n + \dfrac{a^2}{u_n}$ لكل $n \geq 1$ و $u_0 \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}^*$. (يمكن دراسة المتتالية $v_n = \dfrac{u_n - a}{u_n + a}$).

تمرين 18 :
لتكن المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بـ u_0, u_1 و

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2}, \qquad n \geq 2.$$

1. أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$ محدودة.
2. أثبت أن $u_n + \frac{u_{n-1}}{2}$ هو عدد ثابت واستنتج بأن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و أوجد نهايتها.

تمرين 19 :
لتكن S دائرة الوحدة و P_n مضلع محدب له n ضلع متساوية و رؤوسه على S, مع $n \geq 3$. لتكن u_n مساحة P_n و v_n محيطها.

1. احسب u_n و v_n.
2. أثبت أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pi$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2\pi$.
3. اعط قيمة تقريبية لـ π عند احتسابك لـ u_{100}.

تمرين 20 :
نعتزم دراسة المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بـ

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

1. أثبت أن $(u_{2n})_n$ تزايدية و محدودة علويا بـ 1.
2. أثبت أن $(u_{2n+1})_n$ تناقصية و محدودة سفليا بـ $\frac{1}{2}$.
3. أثبت أن $u_{2n} < u_{2n-1}$ لكل $n \geq 1$ و المتتاليات (u_{2n}) و (u_{2n+1}) لها نفس النهاية.

تمرين 21 :
ليكن λ عدد حقيقي و $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ
$u_0 = \lambda$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_n)^2 - 2u_n + 3$.

1. أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. أثبت أنه إذا كان $\lambda \in [\frac{2}{3}, 2]$, المتتالية $(u_n)_n$ تقترب نحو 2.
4. نفرض أن $\lambda \notin [\frac{2}{3}, 2]$.
   a) أثبت أن $u_n > 2$, لكل $n \geq 1$.
   b) لكل $n \geq 1$, ليكن $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   أثبت أن المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية و $v_1 > 0$.
   c) استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متباعدة.

تمرين 22 :
لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{2}$.

1. لتكن a بحيث $0 < a < 1$, و لتكن المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بـ $u_0 = a$) و $u_{n+1} = \frac{1}{2}(3 - u_n^2)$ لكل $n \geq 1$.
   أثبت باستعمال الاستقراء الرياضي أن $0 < u_{2n} < 1$, $\forall n \geq 0$ و $1 < u_{2n+1} < \frac{3}{2}$.

2. اكتب u_n بدلالة u_{n-2}, ثم اوجد أشارة $u_n - u_{n-2}$ (يمكن أن نلاحظ أن كثيرة الحدود $P(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$ له جذر بتعدد 3.)

3. استنتج أن المتتاليات $(u_{2n})_n$ و $(u_{2n+1})_n$ متقاربة.

4. أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و أوجد نهايتها.

تمرين 23 :
لتكن $(u_n)_n$ متتالية بحيث $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $-1 < \lambda < 1$.
أثبت أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
تطبيق أوجد نهاية المتتالية $\frac{a^n}{n!}$, إذا كان $a \in \mathbb{R}$.

تمرين 24 :
لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$ ليست متتالية كوشي. (يمكن أن ندرس المتتالية $((u_{2n} - u_n))n$).
أثبت أن نهايتها هي $+\infty$.

تمرين 25 :
لتكن $a_n = (2+\sqrt{2})^n\pi$ و $b_n = (2-\sqrt{2})^n\pi$.
أثبت أنه يوجد $\alpha \in \mathbb{Z}$ بحيث $a_n + b_n = 2\alpha\pi$.
استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_n$, غذا كان $u_n = \sin[(2+\sqrt{2})^n\pi]$.

تمرين 26 :
أوجد نقاط التراكم في $\mathbb{R}$ للمتتاليات $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ إذا كان $u_n = \frac{1}{n+1}$ و $v_n = \frac{1}{n} + \cos\frac{2n\pi}{3}$.

تمرين 27 :
لتكن $a \in \mathbb{R}$ و $(x_n)_n$ متتالية بحيث $x_n \neq a$ لكل n.
أثبت أنه إذا كان $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, إذا a نقطة التراكم الوحيدة للمتتالية.
هل العكس صحيح ؟

تمرين 28 :
لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_1 \in [0,1]$ و لكل $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$.

1. أثبت أن لكل $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

2. أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و أوجد نهايتها.

3. لتكن $u_1 = \cos\varphi$ مع $\varphi \in [0, \pi/2]$.
   أثبت أن $u_n = \cos(\frac{\varphi}{2^n})$.
   جد من جديد نتيجة السؤال 2.

تمرين 29 :
لتكن المتتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ المعرفة بـ u_0 و v_0 و

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \; v_n = \frac{u_n + v_{n-1}}{2}.$$

1. أوجد علاقة بين $(u_n - v_n)$ و $(u_{n-1} - v_{n-1})$.
استنتج قيمة $(u_n - v_n)_n$.

2. أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متلاصقة ؟؟.

3. أوجد نهاية اتلمتتاليات.

تمرين 30 :
لتكن $(x_n)_n$ متتالية محدودة في $\mathbb{R}$. نعرف المتتالية $y_n = \inf\{x_m;\ m \geq n\}$, $z_n = \sup\{x_m;\ m \geq n\}$.

1. احسب y_n و z_n في الحالات التالية:
a) $(x_n)_n$ تزايدية.
b) $(x_n)_n$ تناقصية.
c) $x_n = (-1)^n$.

2. أثبت أن $(y_n)_n$ تزايدية و $(z_n)_n$ تناقصية.

3. أثبت تكافؤ $(x_n)_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $(y_n)_n$ و $(z_n)_n$ متلاصقة.

تمرين 31 :
أوجد في $\mathbb{R}$, $\inf_n u_n$, $\sup_n u_n$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ و $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ في الحالتين التالية
i) $u_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$
و
ii) $u_n = \frac{1}{n} + \cos\frac{2n\pi}{3}$.

تمرين 32 :
ليكن $k \in]0,1[$ و $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية من الأعداد الحقيقية حيث $|x_n - x_{n-1}| \leq k|x_{n-1} - x_{n-2}|$, لكل $n \geq 2$.

1. أثبت أن المتتالية $(x_n)_n$ هي متتالية كوشي.

2. لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$; $u_0 = 1$.
أثبت أن
a) $\frac{3}{2} < u_n < 2$, لكل $n \geq 0$.
b) $|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{4}{9}|u_{n-1} - u_{n-2}|$, لكل $n \geq 2$.
استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة وأوجد نهايتها.

3. أوجد النتيجة للسؤال الماضي بالطريقة التالية
لتكن a أحد جذور المعادلة التالية $x^2 - x - 1 = 0$. أوجد العلاقة الاستقرائية للمتتالية $(x_n)_n$ إذا كان

$$x_n = \frac{u_n - a}{1 + au_n}.$$

استنتج نهاية المتتالية $(x_n)_n$ و بعدهانهاية المتتالية $(u_n)_n$.

تمرين 33 :

1. أثبت أنه إذا كان المتتالية $(u_n)_n$ تتقارب نحو ℓ إذا المتتالية $(v_n)_n$ المعرفة بـ

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}$$

تتقارب نحو ℓ. ($\ell \in [-\infty, +\infty]$).

2. أثبت أن المتتالية $(v_n)_n$ يمكن أن تتقارب ولكن المتتالية $(u_n)_n$ تتباعد.

3. أثبت أنه إذا كانت المتتالية $(u_n)_n$ مطردة و المتتالية $(v_n)_n$ تتقارب, فإن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.

4. نفرض أن المتتالية $(u_n)_n$ تتقارب نحو ℓ.
أثبت أن المتتالية $(S_n)_n$ المعرفة بـ

$$S_n = \frac{u_1 + 2u_2 + ... + nu_n}{n^2}$$

تتقارب نحو $\frac{\ell}{2}$.

5. نفرض أن المتتالية $(u_{n+1} - u_n)_n$ تتقارب نحو λ.
أثبت أن المتتالية $\frac{u_n}{n}$ تتقارب نحو λ.

تمرين 34 :

1. أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

هي كوشي.

2. أثبت أن المتتالية $(v_n)_n$

$$v_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n = 1+\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k}+\log\frac{k-1}{k}) = 1+\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k}+\log(1-\frac{1}{k}))$$

تناقصية و متقاربة.

3. أثبت أن $u_{2p} = v_{2p} + \log 2p - \log p - v_p$, و استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \log 2$.

تمرين 35 :
لتكن $(u_n)_n$ متتالية معرفة بـ $u_0 = u_1 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$ غير متقاربة.
2. أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ (-1)^n = u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}$.
3. لكل $n \in \mathbb{N}$, نعرف $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_{n+1} - v_n)$.
4. أثبت أن المتتاليات $(v_{2n})_n$ و $(v_{2n+1})_n$ متلاصقة.
احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

1.7 حلول تمارين الباب الثالث

حل التمرين 1:

1. لتكن المتتالية $(v_n)_n$ في E المعرفة بـ $v_n = q^n$, مع $q \neq 0$.

إذا $q^2 = q + 1$ و $q = q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أو $q = q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. إذا المتتاليات الهندسية $(q_1^n)_n$ و $(q_2^n)_n$ موجودة في E.

2. لتكن $(v_n)_n$ متتالية في E. إذا كان $v_1 = \alpha$ و $v_2 = \beta$. نبحث عن حلول النظام الخطي $\begin{cases} a & + & b = \alpha \\ aq_1 & + & bq_2 = \beta \end{cases}$. هذا النظام هو نظام كرامر $q_1 \neq q_2$. إذا له حل وحيد. لنفرض أن $v_{n-1} = aq_1^{n-1} + bq_2^{n-1}$ و $v_n = aq_1^n + bq_2^n$, إذا

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_{n+1} + v_n \\ &= aq_1^{n-1} + aq_1^n + bq_2^{n-1} + bq_2^n \\ &= aq_1^{n-1}(1+q_1) + bq_2^{n-1}(1+q_2) \\ &= aq_1^{n+1} + bq_2^{n+1}. \end{aligned}$$

3. العلاقة صحيحة بالنسبة لـ $n = 0$. نفرض $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n$ إذا

$$\begin{aligned} u_{n+2}^2 - u_{n+1}u_{n+3} &= u_{n+2}^2 - u_{n+1}(u_{n+2} + u_{n+1}) \\ &= u_{n+2}(u_{n+2} - u_{n+1}) - u_{n+1}^2 \\ &= u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

4. نذكر $u_n = aq_1^n + bq_2^n$, مع $1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} = q_1$ و $1 < |\frac{1-\sqrt{5}}{2}| = |q_2|$. إذا $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{aq_1^{n+1} + bq_2^{n+1}}{aq_1^n + bq_2^n}$ تتقارب نحو q_1.

حل التمرين 2:

1. أ) $v_{n+1} - v_n = n^3u_n^2 + 2n + 1 - n^3u_n^2 = 2n + 1$.

ب) نبرهن باستعمال الاستقراء الرياضي أن $v_n = n^2$.

هذه العلاقة صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$, $v_1 = 0$. نفرض أن $v_n = n^2$, إذا $v_{n+1} = v_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. مما ينتج عنه أن $u_n = \frac{1}{n}$.

2. $\lim_{n \to +\infty} nu_n = 1$.

حل التمرين 3:

1. يوجد حل وحيد $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ بحيث $u_1 = \cos(\theta)$. نفرض أن $u_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$. بما أن $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, غذا $u_{n+1} = \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$.

2. نذكر بأن $2\cos\alpha\sin\alpha = \sin(2\alpha)$, إذا

$$2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n = 2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})\cos(\frac{\theta}{2^n}) = 2^{n-1}\sin(\frac{\theta}{2^{n-1}}).$$

نفرض أن $2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n \dots u_{n-p+1} = 2^{n-p}\sin(\frac{\theta}{2^{n-p}})$. إذا

$$2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n \dots u_{n-p+1}u_{n-p} = 2^{n-p}\sin(\frac{\theta}{2^{n-p}})\cos(\frac{\theta}{2^{n-p}}) = 2^{n-p-1}\sin(\frac{\theta}{2^{n-p-1}}).$$

إذا $2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n \dots u_1 = \sin\theta$ و $v_n(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{2^n\sin(\frac{\theta}{2^n})}$.

3. بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin(\frac{\theta}{2^n}) = \theta$, إذا المتتالية $(v_n)_n$ متقاربة نحو $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

4. في حالة ما إذا كان $u_1 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ نهاية المتتالية $(v_n)_n$ est $\dfrac{2}{\pi}$.

حل التمرين 4:

1. أ) $v_{n+1} - v_n = n^3u_n^2 + 2n + 1 - n^3u_n^2 = 2n+1$.
ب) نبرهن باستعمال الاستقراء الرياضي أن $v_n = n^2$.
هذه العلاقة صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$, $v_1 = 0$. نفرض أن $v_n = n^2$, إذا $v_{n+1} = v_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. مما ينتج عنه أن $u_n = \dfrac{1}{n}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$.

حل التمرين 5:

1. يوجد $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ وحيد بحيث $u_1 = \cos(\theta)$. نفرض أن $u_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$. بما أن $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, إذا $u_{n+1} = \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$.

2. نذكر بأن $2\cos\alpha\sin\alpha = \sin(2\alpha)$, إذا

$$2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n = 2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})\cos(\frac{\theta}{2^n}) = 2^{n-1}\sin(\frac{\theta}{2^{n-1}}).$$

نفرض أن $2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n \dots u_{n-p+1} = 2^{n-p}\sin(\frac{\theta}{2^{n-p}})$. إذا

$$2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n \dots u_{n-p+1}u_{n-p} = 2^{n-p}\sin(\frac{\theta}{2^{n-p}})\cos(\frac{\theta}{2^{n-p}}) = 2^{n-p-1}\sin(\frac{\theta}{2^{n-p-1}}).$$

إذا $2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n \dots u_1 = \sin\theta$ و $v_n(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})}$.

3. بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin(\frac{\theta}{2^n}) = \theta$, إذا المتتالية $(v_n)_n$ تتقارب نحو $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

4. في حالة أن $u_1 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ نهاية المتتالية $(v_n)_n$ هي $\dfrac{2}{\pi}$.

حل التمرين 6:

1. $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_3 = \frac{2}{3}$.

2. نبرهن على النتيجة بالاستقراء الرياضي u_1 تحقق الخاصية. نفرض أن $0 \leq u_n \leq 1$, إذا $0 \leq \frac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+u_n} = u_{n+1}$, لأن $u_n \leq 1$ و $\dfrac{1}{1+u_n} = u_{n+1} \leq 1$ لأن $u_n \geq 0$.

3. إذا كان $n \geq 1$, $\dfrac{1+u_{n-1}}{2+u_{n-1}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+u_{n-1}}} = \dfrac{1}{1+u_n} = u_{n+1}$. إذا المتتاليات $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ تحقق ما يلي $v_{n+1} = \dfrac{1+v_n}{2+v_n}$ و $w_{n+1} = \dfrac{1+w_n}{2+w_n}$

4. الدالة $f(x) = \dfrac{1+x}{2+x} \longmapsto x$ المعرفة على $]0,+\infty[$ تزايدية لأن $f'(x) = \dfrac{1}{(2+x)^2} \geq 0$. بما أن $v_{n+1} = f(v_n)$ و $w_{n+1} = f(w_n)$, إذا باستعمال الاستقراء الرياضي إشارة $v_{n+1} - v_n$ هي نفس إشارة $v_2 - v_1$ وإشارة $w_{n+1} - w_n$ هي نفس إشارة $w_2 - w_1$.
$v_2 - v_1 = \frac{1}{2} \geq 0$ و $w_2 - w_1 = \frac{2}{3} - 1 \leq 0$, إذا المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية والمتتالية $(w_n)_n$ تناقصية.

5. المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية ومحدودة علويا بـ 1, إذا متقاربة والمتتالية $(w_n)_n$ تناقصية وموجبة إذا متقاربة. بما أن f متصلة, المتتاليات $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ متقاربة ولها نفس النهاية ℓ, مع $\dfrac{1}{1+\ell} = f(\ell) = \ell$. الحل الوحيد و موجب للمعادلة هو العدد $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

6. $\left|u_{n+1} - \ell\right| = \left|\dfrac{1}{1+u_n} - \dfrac{1}{1+\ell}\right| = \dfrac{|u_n - \ell|}{(1+u_n)(1+\ell)} \leq \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}|u_n - \ell|$.

7. باستعمال الاستقراء الرياضي نريد أن نبرهن أن $\left|u_n - \ell\right| \leq \left(\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}$.

النتيجة بديهية بالنسبة لـ $n = 1$ لأن $\dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \ell$. لنفرض أن $\left|u_n - \ell\right| \leq \left(\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}$, إذا

$$\left|u_{n+1} - \ell\right| \leq \frac{2}{1+\sqrt{5}}|u_n - \ell| \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}.$$

حل التمرين 7:

1. u_n معرفة إذا كان $\alpha > 0$ و إذا كانت هذا الشرط المتتالية $(u_n)_n$ معرفة جيدا. و نبين باستعمال الاستقراء الرياضي أن $u_n > 0$, لكل $n \in \mathbb{N}$.

2. $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} - 1 = \dfrac{1+u_n-2\sqrt{u_n}}{2\sqrt{u_n}} = \dfrac{(1-\sqrt{u_n})^2}{2\sqrt{u_n}} \geq 0$.

3.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} - u_n \\
&= \frac{1+u_n-2u_n\sqrt{u_n}}{2\sqrt{u_n}} \\
&\leq \frac{2u_n-2u_n\sqrt{u_n}}{2\sqrt{u_n}} \\
&= \frac{2u_n(1-\sqrt{u_n})}{2\sqrt{u_n}} \leq 0.
\end{aligned}$$

إذا المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية لكل $n \geq 1$.

4. المتتالية $(u_n)_n$ موجبة و تناقصية إذا هي متقاربة. إذا $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, إذا $2\ell^3 - \ell^2 - 1 = (\ell-1)(2\ell^2+\ell+1)$ و $\ell = 1$ car $2\ell^2+\ell+1 \neq 0$.

حل التمرين 8:

1. لنا $u_1 > 0$ و $v_1 > 0$. لنفرض أن $u_n > 0$ و $v_n > 0$، إذا $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} > 0$ و $v_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} > 0$. و ينتج عنه أن المتتالية $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ معرفة جيدا.

2. $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} - \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = \dfrac{(u_n+v_n)^2-4u_nv_n}{2(u_n+v_n)} = \dfrac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \geq 0$. إذا $u_n \geq v_n > 0$.

3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n-u_n}{2} \leq 0$, إذا المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n(u_n-v_n)}{u_n+v_n} \geq 0$, إذا المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية.

4. المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية محدودة سفليا بـ v_1 و المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية محدودة علويا بـ u_1, إذا المتتاليات $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متقاربة.

إذا كان $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. بما أن $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$, إذا $\ell = \ell'$.

5. $u_{n+1}v_{n+1} = (\dfrac{u_n+v_n}{2})(\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}) = u_nv_n$. إذا المتتالية $(u_nv_n)_n$ ثابتة و $\ell^2 = u_1v_1$, $\ell = \sqrt{u_1v_1}$.

حل التمرين 9:

1. أ) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n+1}} < 1$. إذا المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية.
ب) المتتالية $(u_n)_n$ موجبة تناقصية إذا متقاربة.
2. أ) بما أن $\sqrt{p} \le (1+\sqrt{p})$, إذا $u_n \le \frac{1}{1+\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$.
ب) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. إذا كان $\varepsilon > 0$, يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \ge N$, $u_n \le \frac{\varepsilon}{2}$. إذا لكل $n \ge N$, $v_n \le \frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} \le \varepsilon$. إذا المتتالية $(v_n)_n$ متقاربة نحو 0.

حل التمرين 10:

1. نبرهن باستعمال الاستقراء الرياضي أن $1!+2!+\ldots n! \le (2n)!$.

هذه المتباينة صحيحة عندما تكون $n=1$. نفرض أن $1!+2!+\ldots+n! \le 2.n!$, إذا $1!+2!+\ldots n!+(n+1)! \le (2n)!+(n+1)! = n!(2+n+1) \le n!(2n+2) = 2.(n+1)!$.

2. أ) $v_{n+1}-v_n = u_{n+1} \ge 0$, إذا المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية.
ب) عندنا $\frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$.

بما أن $u_n \le \frac{2}{(n+1)(n+2)}$, إذا $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+2)} \le 2$. إذا المتتالية $(v_n)_n$ محدودة علويا. إذا متقاربة.

3. أ) بما أن $(n+1) \ge (n+2)$, إذا $u_n \le \frac{2}{(n+1)(n+2)} \le \frac{2}{(n+1)^2}$ و $\frac{\sqrt{u_n}}{n} \le \frac{\sqrt{2}}{n(n+1)}$.
ب) المتتالية $(w_n)_n$ تزايدية. لبيان أنها متقاربة ، يكفي أن نبين أنها محدودة علويا.
$w_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{u_k}}{k} \le \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2}}{k(k+1)} = \sqrt{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \le \sqrt{2}$.

حل التمرين 11:

1. $u_1 = \sqrt{2} \ge 1 = u_1$. نفرض أن $u_n \ge u_{n-1}$. إذا

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_{n-1}} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{(1+u_n)(1+u_{n-1})}} \ge 0.$$

إذا المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية.

2. $2 \leq 1 = u_1$. نفرض أن $u_n \leq 2$, إذا $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{3} \leq 2$.
3. المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية و محدودة علويا إذا متقاربة.

إذا كانت $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$, إذا $\ell^2 = 1+\ell$ و $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ يسمى العدد الذهبي).

4. $(\sqrt{n}+1)^2 - 4(n+1) = -3n-3+2\sqrt{n} \leq 0$. كثيرة الحدود $P(x) = -3x^2+2x-3$ سالب إذا $\sqrt{n}+1 \leq 2\sqrt{n+1}$.
5. أ) $v_1 = 1 \leq 2 \leq 2\sqrt{1}$. نفرض أن $v_n \leq 2\sqrt{n}$, إذا $v_{n+1}^2 = n + v_n \leq (n+2\sqrt{n}) \leq 2\sqrt{n}(\sqrt{n}+1) \leq 4\sqrt{n}\sqrt{n+1} \leq 4(n+1)$. إذا $v_{n+1} \leq 2\sqrt{n+1}$.

ب) إذا كان ℓ هي نهاية المتتالية $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$, إذا $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ و $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

إذا كان $x_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}$, $\frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} = \frac{n(n+v_n)}{(n+1)v_n^2}$. الدالة $f(x) = \frac{n+x}{x^2}$ تناقصية على الفترة $]0, 2\sqrt{n}]$, إذا $\frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} \geq 1$. المتتالية $(x_n)_n$ تزايدية لأن $x_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\sqrt{1+x_n}$. لأن $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\sqrt{n}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6. نلاحظ أن $a_n = \lambda^{2^{n+1}} = a_{n-1}^2$, إذا $w_n = \lambda u_n$.
7. $(w_n)_n$ تتقارب نحو $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

حل التمرين 12:

1. نستعمل الاستقراء الرياضي لاثبات النتيجة. p_2 و q_2 أوليين فيما بينهما. لنفرض أن p_n و q_n أوليين فيما بينهما و لتكن p عدد أولي p بحيث $p_{|p_{n+1}}$ و $p_{|q_{n+1}}$. عندنا $q_n = p_{n+1} - q_{n+1}$ و $q_n = 2q_{n+1} - p_{n+1}$. إذا $p_{|q_n}$ و $p_{|p_n}$, و هذا يعطي $p = \pm 1$ و p_n و q_n أوليين فيما بينهما.
2. $\frac{p_1}{q_1} \leq \sqrt{2}$. نفرض أن $x = \frac{p_n}{q_n} \leq \sqrt{2}$.

$$1 \leq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \sqrt{2} = \frac{x+2-x\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x+1} = \frac{(1-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x+1} \leq 0.$$

مع هذا المتتالية $(\frac{p_n}{q_n})_n$ تزايدية, لأن $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{x+2-x^2-x}{x+1} = \frac{2-x^2}{x+1} \geq 0$.

إذا كان ℓ هي نهاية المتتالية $(\frac{p_n}{q_n})_n$, إذا $\ell = \frac{\ell+2}{\ell+1}$ و $\ell = \sqrt{2}$.

حل التمرين 13:

لكل $x \in]-2, 0[$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} = -1$, $f(0) = 0$ و $f(x) = 1$ لكل $x > 0$.

لكل $x \in \pi\mathbb{Z}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos^{2n} x}{1+\sin^{2n} x} = 1$ و $g(x) = 0$ إذا كان $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

لكل $x \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}) = 1$ و $h(x) = 0$ إذا كان $x \notin \mathbb{Q}$.

حل التمرين 14:

1. $0 < u_1 < v_1$. نفرض أن $u_n \leq v_n$, إذا
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} - \frac{u_n + v_n}{2} = -\frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \leq 0.$$

2. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \dfrac{u_n(v_n - u_n)}{\sqrt{u_n v_n} + u_n} \geq 0$ و $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} \leq 0$.
إذا المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية و $(v_n)_n$ تناقصية.

3. بما أن $u_n \leq v_n$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} \leq \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$.

4. باستعمال الاستقراء الرياضي $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_1 - u_1}{2^n} = 0$. إذا المتتاليات $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متلاصقتان ؟؟؟.

حل التمرين 15:

1. إذا كان $u_1 = u_2$, المتتالية $(u_n)_n$ ثابتة. ولكن $u + 0 = 2 \iff u_1 = u_2$ أو $u_1 = 3$.
ليكن $\alpha = 2$ و $\beta = 3$

2. $\dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$, إذا $\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{u_1 - \alpha}{u_1 - \beta}$. La متتالية $(u_n)_n$ متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2 = \alpha$.

حل التمرين 16:

1. $c\lambda^2 + (d-a)\lambda - b = 0 \iff \lambda = \dfrac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$.
إذا كان $c = 0$, $d = a$ و $b = 0$, كل عدد مركب هو حل للمعادلة (??) لأن $f(z) = z$.
إذا كان $c \neq 0$ و $\Delta = (d-a)^2 + 4bc > 0$, حلول المعادلة (??) هي $\alpha = \dfrac{a - d + \sqrt{\Delta}}{2c}$ و $\beta = \dfrac{a - d - \sqrt{\Delta}}{2c}$.
إذا كان $c \neq 0$ و $\Delta = (d-a)^2 + 4bc = 0$, حل المعادلة (??) هي $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$.
إذا كان $c \neq 0$ و $\Delta = (d-a)^2 + 4bc < 0$, حلول المعادلة (??) هي $\alpha = \dfrac{a - d + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2c}$ و $\beta = \dfrac{a - d - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2c}$.

2.
$$\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}\frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} - \beta} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. إذا كانت المعادلة (??) لها حل متكرر α, إذا $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$. نبرهن أن

$$\frac{1}{u_n-\alpha} = \frac{1}{u_{n-1}-\alpha} + \frac{2c}{a+d}.$$

($a+d \neq 0$ لأن $ad-bc \neq 0$ و $\Delta = 0$).

4. $\dfrac{1}{u_n-\alpha} = \dfrac{1}{u_0-\alpha} + \dfrac{2nc}{a+d}$.

إذا وجد $m \in \mathbb{N}^*$ بحيث $u_n = \alpha$, إذا $u_n = \alpha$ لكل $n \geq m$.

إذا كان لكل $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \alpha$ و $c \neq 0$, إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

حل التمرين 17:

$u_n = a\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$, إذا $v_{n+1} = v_n^2 = v_1^{2^{k+1}}$.

إذا كان $|v_1| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

إذا كان $|v_1| > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -a$.

v_1 لا يمكن أن تساوي 1 أو -1.

حل التمرين 18:

1. $|u_3| \leq \max(|u_1|,|u_2|)$. نفرض أن $|u_{n-2}| \leq \max(|u_1|,|u_2|)$ و $|u_{n-1}| \leq \max(|u_1|,|u_2|)$.
بما أن $u_n = \dfrac{u_{n-1}+u_{n-2}}{2}$, إذا $|u_n| \leq \max(|u_{n-1}|,|u_{n-2}|) \leq \max(|u_1|,|u_2|)$.

2. $2u_n + u_{n-1} = 2u_{n-1} + u_{n-2} = 2u_2 + u_1 = 2\alpha$, إذا $2u_n + u_{n-1}$ ثابت.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}2^k\left(u_k + \frac{u_{k-1}}{2}\right) &= (-1)^{n+1}2^n u_n - 2u_1 = \alpha\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}2^k \\ &= -4\alpha\frac{1-(-2)^{n-1}}{3}.\end{aligned}$$

إذا $u_n = \dfrac{2(-1)^{n+1}u_1}{2^n} + \dfrac{4\alpha(-1)^n}{3.2^n} + \dfrac{2\alpha}{3}$. المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و ونهايتها هي $\dfrac{2\alpha}{3}$.

حل التمرين 19:

1. $u_n = \dfrac{n}{2}\sin(\dfrac{2\pi}{n})$ و $v_n = 2n\sin(\dfrac{\pi}{n})$.

2. $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \pi$ و $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 2\pi$.

3. $u_{100} = 50\sin(\dfrac{\pi}{50}) = 3.14159265358979$.

حل التمرين 20:

لتكن $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$.

1. $v_{n+1}-v_n=u_{2n+2}-u_{2n}=\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+2}>0$.

$u_{2n}=1-\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1})-\frac{1}{2n}\leq 1$.

إذا المتتالية $(u_{2n})_n$ تزايدية و محدودة علويا بـ 1, إذا هي متقاربة.

2. $w_{n+1}-w_n=u_{2n+3}-u_{2n+1}=\dfrac{1}{2n+3}-\dfrac{1}{2n+1}<0$.

$u_{2n+1}=1-\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2})+\frac{1}{2n+1}\geq\frac{1}{2}$.

إذا المتتالية $(u_{2n+1})_n$ تناقصية و محدودة سفليا بـ $\frac{1}{2}$, إذا هي متقاربة.

3. $u_{2n}-u_{2n-1}=-\frac{1}{2n}$ و تتقارب نحو 0. إذا المتتاليات (u_{2n}) و (u_{2n+1}) متقاربة نحو نفس النهاية. المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.

حل التمرين 21:

1. المميز للمعادلة $\frac{3}{4}x^2-2x+3=0$ يساوي $\Delta=-5<0$, إذا $\forall n\geq 2, u_n>0$.

2. $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3}{4}u_n^2-3u_n+3=\dfrac{3}{4}(u_n-2)^2$. إذا المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية.

3. إذا كان $\lambda\in[\frac{2}{3},2]$, $u_1-2=\dfrac{3}{4}\lambda^2-2\lambda+1\leq 0$ و $u_1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{4}\lambda^2-2\lambda+\dfrac{7}{3}\geq 0$.

نفرض أن $\dfrac{2}{3}\leq u_n\leq 2$, و بنفس الادلة $\dfrac{2}{3}\leq u_{n+1}\leq 2$. إذا المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.

إذا كان $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$, إذا $\ell=\frac{3}{4}\ell^2-3\ell+3$ و $\ell=2$.

4. نفرض أن $\lambda\notin[\frac{2}{3},2]$.

a) جذور المعادلة $\frac{3}{4}x^2-2x+1=0$ هي $\frac{2}{3}$ و 2 و $\frac{3}{4}x^2-2x+1>0$ لكل $x<\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}x^2-2x+1>0$ لكل $x>2$. $u_n>2$, لكل $n\geq 2$.

b) $v_1=u_2-u_1=\frac{3}{4}(u_1-2)^2>0$. كذلك $v_{n+1}-v_n=u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=(u_{n+2}-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_n)=\frac{3}{4}(u_{n+1}-2)^2-\frac{3}{4}(u_n-2)^2=\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n-4)$.

بما أن $(u_{n+1}+u_n-4)>0$, إذا $\text{signe}(u_{n+2}-u_{n+1})=\text{signe}(u_{n+1}-u_n)=\text{signe}(v_1)>0$. إذا المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية.

c) بما أن $u_{n+1}-u_n\not\longrightarrow 0$, المتتالية $(u_n)_n$ متباعدة.

حل التمرين 22:

1. على $[0,+\infty[$, f تناقصية و $f([0,1])=[1,\frac{3}{2}]$ و $f([1,\frac{3}{2}])=[\frac{3}{8},1]$. إذا $u_1\in[1,\frac{3}{2}]$.

نفرض أن $u_{2n}\in]0,1[$ و $u_{2n+1}\in]1,\frac{3}{2}[$. إذا $u_{2n+2}=f(u_{2n+1})\in]0,1[$ و $u_{2n+3}=f(u_{2n+2})\in]1,\frac{3}{2}[$.

2. $u_n=f\circ f(u_{n-2})=\dfrac{3-u_{n-2}^4+6u_{n-2}}{8}$ و

$u_n-u_{n-2}=\dfrac{3-u_{n-2}^4-2u_{n-2}}{8}=\dfrac{(1-u_{n-2})(3+u_{n-2}+u_{n-2}^2)}{8}$.

3. إذا كان n فردي, $u_n - u_{n-2} \leq 0$ و إذا كان n زوجي, $u_n - u_{n-2} \geq 0$. إذا المتتالية $(u_{2n})_n$ تزايدية و محدودة , إذا متقاربة. المتتالية $(u_{2n+1})_n$ تناقصية و محدودة إذا متقاربة.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ هو النقطة الثابتة للدالة f والتي تساري 1.

حل التمرين 23:
إذا كان $\varepsilon = \frac{1-|\lambda|}{2} > 0$, يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$, $|u_{n+1}| \leq (|\lambda| + \varepsilon)|u_n|$, إذا لكل $n \geq N$, $|u_n| \leq (\dfrac{1+|\lambda|}{2})^{n-N}|u_N|$. بما أن $\dfrac{1+|\lambda|}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
إذا كان $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

حل التمرين 24:
$u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$. إذا المتتالية $(u_n)_n$ ليست متتالية كوشي. و بما أنها تزايدية, إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

حل التمرين 25:

1. لتكن $a_n = (2+\sqrt{2})^n\pi = \pi\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} 2^{\frac{k}{2}}$ و $b_n = (2-\sqrt{2})^n\pi = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k 2^{n-k} 2^{\frac{k}{2}}$.
إذا $a_n + b_n = 2\pi \sum\limits_{2k\leq n} C_n^k 2^{n-k}$.

2. $|u_n| = |\sin[(2+\sqrt{2})^n\pi]| = |\sin[(2-\sqrt{2})^n\pi]| \leq (2-\sqrt{2})^n\pi$. بما أن $0 < 2-\sqrt{2} < 1$, إذا المتتالية $(u_n)_n$ تتقارب نحو 0.

حل التمرين 26:
0 هو نقطة التراكم الوحيدة للمتتالية $(u_n)_n$.
إذا كان $n \equiv 0[mod\, 3]$, $v_n = 1 + \frac{1}{n}$.
إذا كان $n \equiv 1[mod\, 3]$, $v_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$.
إذا كان $n \equiv 2[mod\, 3]$, $v_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$,
إذا 1 و $-\frac{1}{2}$ هما نقاط التراكم للمتتالية $(v_n)_n$.

حل التمرين 27:

1. بما أن كل نقطة تراكم للمتتالية $(u_n)_n$ هي نهاية لمتتالية جزئية للمتتالية $(u_n)_n$, إذا إذا كان $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = a$, a هي نقطة التراكم الوحيدة للمتتالية $(u_n)_n$.

2. العكس غير صحيح. لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة ب $u_{2n} = 0$ و $u_{2n+1} = n$. نقطة التراكم الوحيدة للمتتالية $(u_n)_n$ هي 0 ولكن المتتالية ليست متقاربة.

حل التمرين 28:

1. يوجد $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ وحيد بحيث $u_1 = \cos(\theta)$. نفرض أن $u_n = \cos(\dfrac{\theta}{2^n})$. بما أن $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, إذا $u_{n+1} = \cos(\dfrac{\theta}{2^{n+1}})$.

2. نذكر أن $2\cos\alpha\sin\alpha = \sin(2\alpha)$, إذا

$$2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n = 2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})\cos(\frac{\theta}{2^n}) = 2^{n-1}\sin(\frac{\theta}{2^{n-1}}).$$

نفرض أن $2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n \ldots u_{n-p+1} = 2^{n-p}\sin(\frac{\theta}{2^{n-p}})$. إذا

$$2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n \ldots u_{n-p+1}u_{n-p} = 2^{n-p}\sin(\frac{\theta}{2^{n-p}})\cos(\frac{\theta}{2^{n-p}}) = 2^{n-p-1}\sin(\frac{\theta}{2^{n-p-1}}).$$

إذا $2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})u_n \ldots u_1 = \sin\theta$ و $v_n(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})}$.

3. بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin(\frac{\theta}{2^n}) = \theta$, إذا المتتالية $(v_n)_n$ تتقارب نحو $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

4. في حالة $u_1 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ نهاية المتتالية $(v_n)_n$ هي $\dfrac{2}{\pi}$.

حل التمرين 29:

$$u_n = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2},\ v_n = \frac{u_n+v_{n-1}}{2}.$$

1. $u_n - v_n = \dfrac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} - \dfrac{u_n+v_{n-1}}{2} = -\dfrac{u_n-u_{n-1}}{2} = \dfrac{u_{n-1}-v_{n-1}}{2}$.
$u_n - v_n = \dfrac{1}{2^n}(u_0-v_0)$.

2. $u_n - u_{n-1} = -\dfrac{1}{2}(u_{n-1}-v_{n-1}) = -\dfrac{1}{2^n}(u_0-v_0)$,
$v_n - v_{n-1} = \dfrac{1}{2}(u_n-v_{n-1}) = \dfrac{1}{2}(u_{n-1}-v_{n-1}) = \dfrac{1}{2^n}(u_0-v_0)$. إذا المتتالية $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متلاصقة.

3. لتكن $w_n = u_n - u_{n-1}$, إذا $\sum\limits_{k=0}^{n} w_k = u_n - u_0 = -(u_0-v_0)\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k} = -2(u_0 - v_0)(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})$.
إذا كانت ℓ هي النهاية المشتركة, إذا $\ell = u_0 - 2(u_0-v_0) = 2v_0 - u_0$.

حل التمرين 30:

1. a) إذا كانت $(x_n)_n$ تزايدية $y_n = x_n$ و $z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
b) إذا كانت $(x_n)_n$ تناقصية, $y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ و $z_n = x_n$.
c) إذا كانت $x_n = (-1)^n$, $y_n = -1$ و $z_n = 1$.

2. بما أن $\{x_m;\ m \geq n+1\} \subset \{x_m;\ m \geq n\}$, المتتالية $(y_n)_n$ تزايدية و المتتالية $(z_n)_n$ تناقصية.

3. إذا كانت المتتالية $(x_n)_n$ متقاربة ونهايتها ℓ, إذا لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$ لكل $n \geq N$. إذا $|y_n - \ell| \leq \varepsilon$ و $|z_n - \ell| \leq \varepsilon$ لكل $n \geq N$ و المتتاليات $(y_n)_n$ و $(z_n)_n$ متلاصقة.

   إذا كان المتتاليات $(y_n)_n$ و $(z_n)_n$ كتلاصقة و ℓ نهايتها. إذا لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $0 \leq z_n - \ell \leq \varepsilon$ و $0 \leq \ell - y_n \leq \varepsilon$ لكل $n \geq N$.

   بما أن $y_n \leq x_n \leq z_n$, إذا $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$ لكل $n \geq N$.

حل التمرين 31:

i) إذا كان $u_n = (-1)^n(1 + \dfrac{1}{n})$, $\inf\limits_n u_n = -2$, $\sup\limits_n u_n = \dfrac{3}{2}$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = -1$ و $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = 1$.

ii) $u_n = \frac{1}{n} + \cos\frac{2n\pi}{3}$, $\inf_n u_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sup_n u_n = \frac{1}{3} + 1$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = 1$.

حل التمرين 32:

1. باستعمال الاستقراء الرياضي سنثبت أن $|x_n - x_{n-1}| \leq k^{n-1}|x_1 - x_0|$ لكل $n \geq 2$.

   هذه الخاصية محققة إذا كان $n = 2$. نفرض أن هذه الخاصية محققة للحد $n - 1$.

   بما أن $|x_n - x_{n-1}| \leq k|x_{n-1} - x_{n-2}|$, إذا هذه الخاصية محققة للحد n.

   لتكن $m \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
|x_{n+m} - x_n| &\leq \sum_{j=1}^{m} |x_{n+j} - x_{n+j-1}| \\
&\leq |x_1 - x_0| \sum_{j=1}^{m} k^{n+j-1} \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k}.
\end{aligned}
$$

   إذا المتتالية $(x_n)_n$ هي متتالية كوشي.

2. لتكن $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة بـ $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$; $u_0 = 1$.

a) $u_1 = 2$ و نفرض أن $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$, إذا $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \leq u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + \frac{2}{3} \leq 2$.

b) $|u_n - u_{n-1}| = \dfrac{|u_{n-1} - u_{n-2}|}{u_{n-1}.u_{n-2}} \leq \dfrac{4}{9}|u_{n-1} - u_{n-2}|$. إذا المتتالية $(u_n)_n$ هي كوشي إذا هي متقاربة. إذا كانت ℓ نهايتها, $\ell = 1 + \frac{1}{\ell}$. إذا $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. $x_n = \frac{u_n - a}{1 + au_n}$, نبين أن $x_{n+1} = -\frac{1}{a^2}x_n$. إذا كان $|a| > 1$, المتتالية $(x_n)_n$ متقاربة نحو 0. و إذا كان $|a| < 1$, المتتالية $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$. ولكن $u_n = \dfrac{x_n + a}{1 - ax_n}$. إذا كان $|a| > 1$, $(u_n)_n$ c تتقارب نحو a و إذا كان $|a| < 1$, $(u_n)_n$ تتقارب نحو $-\frac{1}{a}$.

حل التمرين 33:

1. إذا كان $\ell \in \mathbb{R}$, إذا لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
لتكن $n > N$,

$$|v_n - \ell| \leq \frac{|(u_0-\ell)+(u_1-\ell)+\ldots+(u_N-\ell)|}{n+1} + \varepsilon\frac{n-N}{n+1}.$$

بما أن $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|(u_0-\ell)+(u_1-\ell)+\ldots+(u_N-\ell)|}{n+1} = 0$, يوجد $N' \geq N$ بحيث لكل $n \geq N'$, $\displaystyle\frac{|(u_0-\ell)+(u_1-\ell)+\ldots+(u_N-\ell)|}{n+1} \leq \varepsilon$. إذا لكل $n \geq N'$, $|v_n - \ell| \leq 2\varepsilon$.

إذا كان $\ell = +\infty$, إذا لكل $A > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$, $u_n \geq A$.
إذا كان $n > 2N$, $v_n \geq \frac{u_0+u_1+\ldots+u_N}{n+1} + A\frac{n-N}{n+1} \geq\geq \frac{u_0+u_1+\ldots+u_N}{n+1} + \frac{1}{2} \geq \frac{u_0+u_1+\ldots+u_N}{n+1} + A\frac{n-N}{n+1}$.

بما أن $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_0+u_1+\ldots+u_N|}{n+1} = 0$, إذا $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. بنفس الطريقة إذا كانت $\ell = -\infty$.

2. إذا كان $u_n = (-1)^n$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ و المتتالية $(u_n)_n$ غير متقاربة.

3. نفرض أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية و المتتالية $(v_n)_n$ متقاربة. يمكن أن نفرض أن المتتالية $(u_n)_n$ موجبة. إذا إذا كان M حد أعلى للمتتالية $(v_n)_n$, $\displaystyle\frac{u_n}{2} \leq \frac{u_n+\ldots u_{2n}}{2n+1} \leq M$. إذا المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.

4. نفرض أن المتتالية $(u_n)_n$ تتقارب نحو ℓ. إذا لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
لتكن $n > N$,

$$\left|S_n - \frac{n(n+1)\ell}{2n^2}\right| \leq \frac{|(u_1-\ell)+2(u_2-\ell)\ldots+N(u_N-\ell)|}{n^2} + \varepsilon\frac{n-N}{n^2}.$$

بما أن $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|(u_1-\ell)+2(u_2-\ell)\ldots+N(u_N-\ell)|}{n^2} = 0$, يوجد $N' \geq N$ بحيث لكل $n \geq N'$, $\displaystyle\frac{|(u_1-\ell)+2(u_2-\ell)\ldots+N(u_N-\ell)|}{n^2} \leq \varepsilon$. إذا لكل $n \geq N'$, $|S_n - \frac{n(n+1)\ell}{2n^2}| \leq 2\varepsilon$. إذا المتتالية $(S_n)_n$ تتقارب نحو $\frac{\ell}{2}$.

5. نفرض أن المتتالية $(u_{n+1} - u_n)_n$ تتقارب نحو λ.
المتتالية $(v_n)_n$ المعرفة بـ $\displaystyle v_n = \frac{u_{n+1}-u_0}{n+1}$. إذا المتتالية $\frac{u_n}{n}$ تتقارب نحو λ.

حل التمرين 34:

1. بما أن $u_n-u_{n+2p} = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{p}(\frac{1}{n+2k-1} - \frac{1}{n+2k})\right)$. $(\frac{1}{n+2k-1} - \frac{1}{n+2k}) \geq 0$, إذا $|u_n - u_{n+2p}| \leq \frac{1}{n}$. بنفس الطريقة نبين أن $|u_n - u_{n+2p+1}| \leq \frac{1}{n}$.
إذا المتتالية $(u_n)_n$ هي كوشي.

2. $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} + \log(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1} + \log(1 - \frac{1}{n+1})$. بما أن $x + \log(1-x) \leq 0$ لكل $0 \leq x < 1$, إذا المتتالية $(v_n)_n$ تناقصية. و $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{x} = \log(n+1)$. إذا $v_n \geq 0$ و متقاربة.

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} &= \sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k}.
\end{aligned}$$

إذا $u_{2p} = v_{2p} + \log 2p - \log p - v_p$. بما أن $\lim_{n\to+\infty} v_{2p} - v_p = 0$, إذا $\lim_{n\to+\infty} u_n = \log 2$.

حل التمرين 35:
لتكن $(u_n)_n$ متتالية $u_0 = u_1 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. $u_0 = u_1 = 1$. نفرض أن $u_n \geq n$ و $u_{n+1} \geq n+1$, إذا $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geq n+1+n \geq n+2$. إذا المتتالية $(u_n)_n$ غير متقاربة.

2. النتيجة صحيحة إذا كان $n = 1$. نفرض أن النتيجة صحيحة للحد n,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n &= u_{n+1}^2 - u_n(u_{n+1} + u_n) \\
&= u_{n+1}^2 - u_n u_{n+1} - u_n^2 \\
&= u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) - u_n^2 \\
&= u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 \\
&= (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(v_{n+1} - v_n) &= \lim_{n\to+\infty}(\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n}) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1}u_n} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}u_n} = 0.
\end{aligned}$$

4. لنا $v_{2n+1}-v_{2n}\leq 0$، $v_{2n+1}-v_{2n-1}=\dfrac{1}{u_{2n-1}u_{2n-2}}-\dfrac{1}{u_{2n+1}u_{2n}}\geq 0$ و $v_{2n+2}-v_{2n}=\dfrac{1}{u_{2n+2}u_{2n+1}}-\dfrac{1}{u_{2n}u_{2n-1}}\leq 0$. إذا المتتالية $(v_{2n})_n$ و $(v_{2n+1})_n$ متلاصقة.
إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell$، إذا $\ell=1+\frac{1}{\ell}$ و $\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.