

## أنظمة المعادلات الخطية

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

3 فيفري 2018

## المحتويات

1 طريقة جاوس و جاوس جوردن

2 الأنظمة الخطية المتجانسة

3 قاعدة كرامر

4 إصلاح تمارين الباب الثالث

## مدخل للأنظمة الخطية

لنبدأ بطرح المسألة التالية:

نريد معرفة عمر الأب و عمر الإبن إذا كانت لنا المعطيات التالية:

إذا أخذنا أربعة أضعاف عمر الإبن و طرحنا منها عمر الأب نجد 5، و إذا أخذنا ضعف عمر

الأب و طرحنا منها سبع أضعاف عمر الإبن نجد 3.

الجواب إذا كان عمر الأب  $x$  و عمر الإبن هو  $y$  نجد المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ -7x + 2y = 3 \end{cases}$$

هاتين المعادلتين تسمى نظام خطي، و  $x, y$  تسمى المجاهيل.

سنعطي طريقتين لحل هذا النظام:

## الطريقة الأولى

المعلة الأولى متكافئة مع المعادلة التالية:  $8x - 2y = 10$  و بجمع هذه المعادلة مع المعادلة الثانية نجد أن  $x = 13$  و بتعويض قيمة  $x$  في أي معادلة نجد أن  $y = 47$ .

## الطريقة الثانية

النظام الخطي السابق متكافئ مع الكتابة التالية

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

إذا كانت  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  و  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  فإن النظام الخطي متكافئ مع  $AX = B \iff X = A^{-1}B$   
 $X = \begin{pmatrix} 13 \\ 47 \end{pmatrix}$  و  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

## طريقة جاوس و جاوس جوردن

### تعريف

إذا كانت  $(a_{j,k})$  أعدادا حقيقية ( $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$ ) و إذا كانت  $x_1, \dots, x_n$  مجاهيل و إذا كانت  $b_1, \dots, b_m$  أعدادا حقيقية. يمكن كتابة نظام معادلات خطية كما يلي

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

و يمكن كتابة هذا النظام الخطي في صيغة مصفوفات كما يلي:  $AX = B$  مع

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

لتكن المصفوفة  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  و المصفوفة  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  و نبحث عن مصفوفة من درجة  $(2, 3)$  بحيث  $AB = C$ .  
إذا كانت  $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \end{pmatrix}$  نتحصل على النظام الخطي التالي:

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ x - 2t = 1 \\ y - u = 1 \\ y - 2u = 2 \\ z - v = 2 \\ z - 2v = 3 \end{cases}$$

إذاً

$$x = t = -1, y = 0, u = -1, z = 1, v = -1.$$



## تعريف

1 نقول أن نظامين من المعادلات الخطية متكافئان إذا كان لها نفس مجموعة الحلول.

2 نقول أن نظام خطي متسقاً أو متآلفاً إذا كان له حل و نقول أنه غير متسق إذا لم يكن له حل.

## طريقة جاوس

سنقوم بتوسيع المصفوفة  $A$  و ذلك باضافة المصفوفة  $B$  و نحصل على مصفوفة  $[A|B]$  وتسمى المصفوفة الموسعة  
لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة  $[A|B]$  على صيغة درجية صفية و نحصل على نظام خطي مثلثي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس لحل النظام الخطي.

## طريقة جاوس جوردن

لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة  $[A|B]$  على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة و نحصل على نظام خطي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس جوردن لحل النظام الخطي.

## الأنظمة الخطية المتجانسة

### تعريف

نقول أن نظام خطي  $AX = B$  متجانس إذا كان  $B = 0$ .

### ملاحظات

- 1 كل نظام خطي متجانس متسق لأن الحل التافه هو حل لهذا النظام.
- 2 إذا كان  $X_1$  و  $X_2$  حلان للنظام الخطي المتجانس  $AX = 0$  فإن  $X_1 + \lambda X_2$  هو حل للنظام الخطي لكل  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- 3 إذا كان للنظام الخطي المتجانس  $AX = 0$  حل غير صفري فإن النظام له عدد ما لا نهائي من الحلول.

## مبرهنة

إذا كان للنظام الخطي  $AX = B$  حل  $X_0$  إذا كل حل  $X$  للنظام الخطي سيكون على الصيغة  $X = X_0 + X_1$  حيث  $X_1$  حل للنظام المتجانس  $AX = 0$ .

## قاعدة كرامر

### مبرهنة

إذا كانت  $A$  مصفوفة مربعة من الدرجة  $n$  ولها معكوس إذا الحل الوحيد للنظام الخطي  $AX = B$  هو

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

حيث  $A_j$  هي المصفوفة  $A_j$  هي المصفوفة التي نتحصل عليها من المصفوفة  $A$  بوضع العمود  $B$  عوضا عن العمود  $C_j$

استخدم قاعدة كرامر لحساب  $x, y, z$  التي تحقق النظام التالي

$$\begin{cases} 3x - 2z = 2 \\ -2x + 3y - 2z = 3 \\ -5x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -8 = x, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -13 = z, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -13 = y$$

1 أوجد حلول الأنظمة الخطية التالية

$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ -x + y = -2 \\ y - z = -4 \end{cases}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ 3x - y + 5z - t = 2 \\ 5x + 3y + 3z + t = \alpha \end{cases} \quad 2$$

$$\begin{cases} -2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ -x - 2y + 5z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases} , \quad 3$$



$$\begin{cases} -2y + 3z & = 0 \\ 2x - 4y + 2z & = 0 \\ -x - 2y + 5z & = 0 \\ x - 2y - z & = 1 \end{cases} \quad 4$$

$$\begin{cases} x + y - z + t & = 0 \\ z - 2t & = 0 \end{cases} \quad 5$$

$$\begin{cases} 6x + 3y - z & = 2 \\ -4x + y - 6z & = 0 \\ x + 2y - 5z & = -1 \end{cases}, \quad 6$$

$$\begin{cases} y + 3z - 2t = 0 \\ 2x + y - 4z + 3t = 0 \\ 2x + 3y + 2z - t = 1 \end{cases}, \quad 7$$

$$\begin{cases} x + my + (m - 1)z = m + 1 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m - 1)x + my + (m + 1)z = m - 1 \end{cases} \quad 8$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + (a + 3)y + 3z = 3 \\ x + (-a + 3)y + (a - 2)z = 0 \end{cases} \quad 9$$

أوجد حلول الأنظمة الخطية التالية بالاستعمال طريقة جاوس جوردن

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases} \quad 1$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases} \quad 2$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 0 \\ -7x + 7y + z = 0 \end{cases} \quad 3$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \quad 4$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -15 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + 3z = 11 \\ 11x + 7y = -30 \end{cases} \quad 5$$

$$\begin{cases} 4x - 8y = 12 \\ 3x - 6y = 9 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases} \quad 6$$

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 11 \\ x + 2y + z + t = 9 \\ x + y + z + 2t = 6 \\ 2x + y + z + t = 14 \end{cases} \quad 7$$

1 أوجد علاقة بين  $a, b, c$  حتى يكون النظام التالي متسق.

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

2 أثبت أنه إذا كان  $ad - bc \neq 0$ , فإن الصيغة الدرجية الصية للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{هي} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1 عين كل من  $a, b, c$  التي من أجلها يكون  $(1, -1, 2)$  حلا للنظام الخطي

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + z = -1 \\ ax + 3y - cz = -1 \end{cases} .$$

2 أثبت أن  $(1, -1, 2)$  هو حلا وحيدا للنظام الخطي في الفقرة (1).

$$.B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ لتكن المصفوفة}$$

أثبت أن النظام الخطي  $AX = B$  متسق إلا وإذا كان  $b - a = c - b$ .

## 1 المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right]$$

و المصفوفة

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

هي صيغة درجية صافية لهذه المصفوفة. إذا باستعمال طريقة جاوس، النظام له حل وحيد وهو  $x = 1, y = -1, z = 3$ .  
و الصيغة الدرجية الصافية المختزلة لهذه المصفوفة هي

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$



إذا باستعمال طريقة جاوس جوردن، النظام له حل وحيد وهو  $x = 1, y = -1, z = 3$ .

2

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-4 \end{array} \right]$$

هي صيغة درجية صافية لهذه المصفوفة.  
إذا كان  $m \neq 4$  النظام غير متسق. و إذا كان  $m = 4$  النظام له عدد غير منته من الحلول.

$$\left\{ \left( \frac{5}{7} - \frac{9}{7}z + \frac{1}{7}t, \frac{1}{7} + \frac{8}{7}z - \frac{4}{7}t, z, t \right) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array} \right] \quad \text{المصفوفة الموسعة للنظام هي:} \quad \mathbf{3}$$

الصيغة الدرجية الصفية:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array} \right] \quad -3R_{1,3}, 1R_{1,2}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -32 & -104 \end{array} \right] \quad :10R_{2,3}, -R_2$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array} \right] : -\frac{1}{32}r_3 \\ & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array} \right] : (-1)R_{2,1} \\ & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array} \right] : 3R_{3,2}, (-5)R_{3,1} \\ & \text{الحل هو } z = \frac{13}{4}, y = \frac{3}{4}, x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right] \cdot \text{المصفوفة الموسعة للنظام هي:} \quad 4$$

الصيغة الدرجية الصفية:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array} \right] : (-3)R_{1,4}, 1R_{1,3}, (-2)R_{1,2}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] : (-3)R_{2,4}, (-3)R_{2,3}, R_{2,3}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] : 1R_{2,1}$$

الحل هو  $t = u, z = s, y = 2s, x = u - 1$

5 الحل هو  $z = 7t, y = -4t, x = -3t$

6 النظام غير متسق.

7  $z = 7, y = 2, x = -4$

8  $y = t, x = 3 + 2t$

9 المصفوفة الموسعة للنظام هي: 
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array} \right]$$

الصيغة الدرجية الصفية:  $(-1)R_{1,2}, (-2)R_{1,3}$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b - a \\ 0 & -1 & -1 & c - 2a \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a - b \\ 0 & 0 & 0 & c - a - b \end{array} \right] : 1R_{2,3}, (-1)R_2$$

إذا لا يكون النظام متسقاً إلا إذا كان  $-a - b + c = 0$ .

1 (1, -1, 2) هو حل للنظام الخطي إلا و إذا كان  $a = 2$ ,  $b = -1$  و  $c = 0$ .

2 بما أن مصفوفة النظام الخطي

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -3 \\ -2x + y + z = -1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

لها معكوس إذا النظام الخطي له حل وحيد.  
(محدد المصفوفة يساوي 16)

$$|A| = 2 \text{ و } B = \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$
$$.A^{-1} = \frac{1}{2}B \blacktriangleleft$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$
$$.A(A - B) = 2I_3$$
$$.A^{-1} = \frac{1}{2}(A - B)$$



## المصفوفة الموسعة

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -8 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

إذا  $x = 6, y = 1, z = 3, t = -2$ .