المحددات

د. المنجي بلال

4 أكتوبر 2017

المحتويات

باب 1

المحددات

1.1 تعريف المحدد

تعريف 1.1.1
إذا كانت $A = (a_{j,k})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n نرمز $A_{j,k}$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n-1$ نحصل عليها من المصفوفة A بحذف الصف j والعمود k.

مثال 1.1.1
إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ فإن $A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

تعريف 1.1.2

1. إذا كانت مصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$|A| = det(A) = ad - bc.$$

2. إذا كانت مصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

3. إذا كانت مصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{m,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$\begin{aligned} |A| = \det(A) &= a_{1,1}\det A_{1,1} - a_{1,2}\det A_{1,2} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \det A_{1,n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1,j}. \end{aligned}$$

أمثلة 1.1.1

1. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, محدد المصفوفة A هو

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 * 3 - 5 * 2 = 2.$$

2. إذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

محدد المصفوفة A هو

$$|A| = det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

3. إذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

محدد المصفوفة A هو

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

4.

تعريف 1.1.3 إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n, يسمى المحدد $\det A_{j,k}$ مصغر العنصر $a_{j,k}$ ويسمى العدد $C_{j,k} = (-1)^{j+k}\det A_{j,k}$ المعامل المصاحب للعنصر $a_{j,k}$

ملاحظات 1.1.1

.1 إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n, محدد المصفوفة A يساوي

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} C_{1,j}.$$

.2 بإعادة ترتيب الحدود نخلص إلى

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} C_{1,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} C_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} C_{k,j}. \end{aligned}$$

.3 إذا كانت $n = 3$ و المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array} \right.$$

$$\det A = a_{1,1}(a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}$$

مثال 1.1.2

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 7 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & -6 \end{array} \right. \Rightarrow \det = 3 \cdot 7 \cdot 1 + (-4) \cdot 6 \cdot 2 - (-6) \cdot 6 \cdot 3 = 81$$

1.2 خواص المحددات

مبرهنة 1.2.1

.1 إذا كانت مصفوفة A مربعة فإن $\det A^T = \det A$.

.2 إذا كانت مصفوفة A مربعة وتحتوي على صف أو عمود صفري فإن محددها يساوي صفر.

3. إذا كانت مصفوفة A مثلثية علوية أو سفلية فإن محددها يساوي

$$a_{1,1}\ldots a_{n,n}.$$

4. إذا كانت مصفوفة A مربعة وتحتوي على صف مضاعف لصف آخر أو عمود مضاعف لعمود آخر فإن محددها يساوي صفر.

5. إذا حصلنا على مصفوفة B من مصفوفة A بتبديل صفين (أو عمودين) فإن $\det B=-\det A$.

6. إذا حصلنا على مصفوفة B من مصفوفة A بضرب صف بعدد وإضافة الناتج لصف آخر فإن $\det B=\det A$.

مثال 1.2.1

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 3 & 1\\ 3 & 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &\overset{(-2)R_{1,2},(-3)R_{1,3},(-1)R_{1,4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -1 & -1\\ 0 & -6 & -2 & -1\\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\\
&= -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1\\ 6 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}\\
&\overset{(-1)R_{1,2}}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}\\
&= -\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 2 & 1 \end{vmatrix}\\
&= -1.
\end{aligned}$$

مثال 1.2.2

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -2 & -1\\ -2 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 1 & -4\\ 1 & -2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} &\overset{(2)R_{1,2},(-3)R_{1,3},(-1)R_{1,4},(-1)R_{1,5}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 9 & -3 & -2\\ 0 & 3 & -13 & 6 & 2\\ 0 & 1 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} -1 & 9 & -3 & -2\\ 3 & -13 & 6 & 2\\ 1 & -3 & 3 & -3\\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\\
&\overset{3R_{1,2},1R_{1,3}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 9 & -3 & -2\\ 0 & 14 & -3 & -4\\ 0 & 6 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} 14 & -3 & -4\\ 6 & 0 & -5\\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 14 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -2 \end{vmatrix} \\
&\overset{(-1)R_{1,2},2R_{1,3}}{=} \begin{vmatrix} 14 & 6 & 1 \\ -17 & -6 & 0 \\ 24 & 7 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -17 & -6 \\ 24 & 7 \end{vmatrix} | \\
&\overset{1R_{1,2}}{=} \begin{vmatrix} -17 & -6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 42 - 17 = 25.
\end{aligned}
$$

مثال 1.2.3

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
|A| = \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3.
\end{aligned}
$$

مثال 1.2.4

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
|A| = \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

مبرهنة 1.2.2
لتكن A مصفوفة مربعة فإن A لها معكوس إذا و فقط $\det A \neq 0$.

مبرهنة 1.2.3
لتكن A و B مصفوفتين مربعتين فإن

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

ملاحظة 1.2.1
لتكن A مصفوفة مربعة و إذا كانت B هي الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A. إذا يوجد عدد منته من المصفوفات الأولية $E_1, \ldots, E_m$ بحيث $E_1 \ldots E_m A = B$. إذا

$$\det(E_1) \ldots \det(E_m) \det(A) = \det(B).$$

1.3 المصفوفة المصاحبة

تعريف 1.3.1
لتكن A مصفوفة مربعة نعرف المصفوفة $B = (C_{j,k})^T$ و تسمى المصفوفة المصاحبة للمصفوفة A و نرمز بها $\text{adj}A$.

مبرهنة 1.3.1
إذا كانت مصفوفة A مربعة من الدرجة n فإن

$$(\text{adj}A)A = A(\text{adj}A) = (\det A)I_n.$$

مبرهنة 1.3.2
إذا كانت مصفوفة A مربعة و لها معكوس فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}(A).$$

أمثلة 1.3.1

1. $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 5$, $\text{adj}A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ و $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = -13$

$$\mathrm{adj}A) = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

و $A^{-1} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

3. $n = 4$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = -24$

$$\mathrm{adj}A) = \begin{pmatrix} -20 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -20 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -20 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -20 \end{pmatrix}،$$

و $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

1.4 تمارين في الباب الثاني

تمرين 1 :
أوجد محدد المصفوفة التالية

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

تمرين 2 :
لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
أوجد A^2 واستنتج أن $A^2 = 2I - A$ و أن المصفوفة A لها معكوس و أوجد A^{-1}.

تمرين 3 :
لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. أثبت أن المصفوفة لها معكوس وأوجد P^{-1}.
2. أوجد المصفوفة $D = P^{-1}AP$.
3. احسب D^4.

تمرين 4 :
لتكن المصفوفات $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,
$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ و $Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. احسب PQ واستنتج أن المصفوفة P لها معكوس وأوجد P^{-1}.
2. أوجد المصفوفة $B = P^{-1}AP$.
3. أوجد المصفوفة $N = B - 4I_3$.
4. احسب N^2 واستنتج B^{-1} و A^{-1}.

تمرين 5 :

أوجد المحددات التالية

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix}$$

الجواب $(b-a)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$.

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

الجواب $(a+b+c)^3$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

الجواب $2abc(a-b)(b-c)(c-a)$.

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

الجواب $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

الجواب $-(a^3-b^3)^2$.

تمرين 6 :

لتكن كل من $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ مصفوفة مربعة من الدرجة 4 و تحقق

$$\mathbf{2AC - AB^2 + 9I = 0}$$

حيث $\mathbf{B = 6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{C = 9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. أوجد المصفوفة $\mathbf{A^{-1}}$.
2. أوجد محدد المصفوفة $\mathbf{A}$.

3. أوجد $\mathrm{adj}\mathbf{A}$.

تمرين 7 :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\
&= 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\
&= 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\
&= 24\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 24 \cdot 1 = 24.
\end{aligned}$$

تمرين 8 :
أوجد معكوس المصفوفات التالية

1. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $|a| \neq 1$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix}$.

تمرين 9 :
إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ و لها معكوس فأثبت أن $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-2}A$.

1.5 إصلاح تمارين الباب الثاني

حل التمرين 1:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} m & 0 & 1 & m \\ 1 & m & 0 & -1 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-m)\begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2m+2 & m & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-m)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ 2m+2 & m & 1-m^2 \end{vmatrix} \\
&= m(m+1)^2(2-m).
\end{aligned}$$

حل التمرين 2:

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I - A$. إذا $A(A+I) = 2I$. ونستنتج أن المصفوفة A لها معكوس و $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

حل التمرين 3:

1. $\mathrm{adj}P = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$، $\det P = 6$. إذا $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
2. أوجد المصفوفة $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. احسب $D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

حل التمرين 4:

1. $PQ = 4I_3$ و $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$.

2. $B = P^{-1}AP = 4I_3 + N$ و $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $N^2 = 0$, إذا $(B-4I_3)^2 = 0 = B^2 - 8B + 16I_3$.
و هذا يعطي $B^{-1} = \frac{-1}{16}(B - 8I_3)$ و
$A^{-1} = PB^{-1}P^{-1} = \frac{-1}{16}\begin{pmatrix} 10 & 14 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

حل التمرين 5:

حل التمرين 6:

1. $2AC - AB^2 + 9I = 0 \Rightarrow A(B^2 - 2C) = 9I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9}(B^2 - 2C).$

$$B^2 = 36\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

إذا

$$A^{-1} = 2\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. $|A^{-1}| = 2^6\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2^6.5 = -320$ ،$|A| = \dfrac{-1}{320}$.

3. $\mathrm{adj}A = \dfrac{-1}{320}A^{-1}$.

حل التمرين 7:

حل التمرين 8:

1. $A^{-1} = \frac{1}{1-a^2}\begin{matrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1 \end{matrix}$.

2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{100}{63}\begin{pmatrix} 35 & -175 & 161 \\ -175 & 911 & -850 \\ 161 & -850 & 800 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 55.6 & -277.8 & 255.6 \\ -277.8 & 1446.0 & -1349.2 \\ 255.6 & -1349.2 & 1269.8 \end{pmatrix}$.