باب 1

حقل الأعداد الحقيقية

1.1 الأعداد الطبيعية و الصحيحة والنسبية

1.1.1 مسلمة بيانو و الإستقراء الرياضي
(Peano's Postulates and Induction)

مسلمة بيانو هي مسلمة حول تعريف رياضي لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

مبرهنة 1.1.1 مسلمة بيانو
توجد مجموعة وحيدة تسمى مجموعة الأعداد الطبيعية و نرمز بها $\mathbb{N}$ تحقق ما يلي:

- $\mathbb{N}$ ليست المجموعة الخالية.
- لكل عنصر n من $\mathbb{N}$ يوجد عنصر وحيد $s(n)$ في $\mathbb{N}$ يسمى الموالي للعنصر n.
- يوجد عنصر وحيد m في $\mathbb{N}$ ليس عنصر موالي لأي عنصر من $\mathbb{N}$.
- إذا كان $p \neq q$ في $\mathbb{N}$ فإن $s(p) \neq s(q)$.
- (مبدأ الإستقراء الرياضي 1)
المجموعة الجزئية من $\mathbb{N}$ التي تحتوي على العنصر m و تحتوي على العناصر الموالية لكل عناصرها هي $\mathbb{N}$.

وفي ما يلي سنرمز بالرمز 1 عوضا عن العنصر m و نرمز بالرمز $n+1$ العنصر الموالي للعدد n.

سنكتب
$$2 = s(1), 3 = s(2), 4 = s(3), 5 = s(4), \ldots,$$

مبرهنة 1.1.2
كل عنصر n من $\mathbb{N}$ و $n \neq 1$ هو عنصر موالي لعدد طبيعي.

البرهان
لتكن المجموعة $P = s(\mathbb{N}) \cup \{1\}$.
$1 \in P$، $P \subset \mathbb{N}$، $s(P) \subset s(\mathbb{N}) \subset P$. إذا $P = \mathbb{N}$. □

مبرهنة 1.1.3 (مبدأ الإستقراء الرياضي 2)
إذا كان لدينا تقريرا رياضيا $P(n)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و يحقق

1. $P(1)$ تقريرا صائبا

2. إذا كان التقرير $P(n)$ صائبا فإن التقرير $P(n+1)$ صائبا كذلك.
إذا التقرير $P(n)$ صائبا مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

البرهان
لتكن المجموعة P مجموع $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $P(n)$ صائبا. المجموعة P تحقق مبدأ الإستقراء الرياضي 1 إذا $P = \mathbb{N}$.

□

مبرهنة 1.1.4 (مبدأ الإستقراء الرياضي 3)
إذا كان لدينا تقريرا رياضيا $P(n)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و يحقق

1. $P(1)$ تقريرا صائبا

2. إذا كانت التقارير $P(1), \ldots, P(n)$ صائبة فإن التقرير $P(n+1)$ صائبا كذلك.
إذا التقرير $P(n)$ صائبا مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

البرهان
لتكن المجموعة P مجموع $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $P(n)$ صائبا.
المجموعة P تحقق مبدأ الإستقراء الرياضي 1 إذا $P = \mathbb{N}$.

□

تعريف 1.1.1

1. لكل عدد طبيعي n نعرف المجموعة التالية

$$S(n) = \{s(n), s(n+1), \ldots, \} = \{s^p(n);\ p \in \mathbb{N}\}$$

مع $s^p(n) = \underbrace{s \circ \ldots \circ s}_{p \text{ times}}(n)$.

2. نقول أن عدد طبيعي m أكبر من عدد طبيعي n إذا كان $m \in S(n+1)$.

ملاحظة 1.1.1

1. بهذا التعريف نجد أن

$$\mathbb{N} = S(1), \qquad S(n) \cup \{1, \ldots, n\} = \mathbb{N}.$$

و $S(n)$ هو أصغر مجموعة تحتوي على n و غير متغيرة بالدالة s. (يعني أن كل عنصر له عنصر موالي في المجموعة).

2. لكل $m, n \in \mathbb{N}$ فإن $m \leq n$ أو $n \leq m$.

3. إذا كان $m + n \leq m + p$ لكل $m \in \mathbb{N}$ فإن $n \leq p$.

4. إذا كان $n \leq p$ فإن $m \cdot n \leq m \cdot p$ لكل $m \in \mathbb{N}$.

تعريف 1.1.2
لتكن P مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$.

1. نقول أن عنصر n من P هو أصغر عنصر في المجموعة P إذا كان $n \leq p$ لكل $p \in P$ و نرمز بذلك $n = \min P$.
2. نقول أن عنصر m من P هو أكبر عنصر في المجموعة P إذا كان $n \leq m$ لكل $n \in P$ و نرمز بذلك $m = \sup P$.

مبرهنة 1.1.5

1. كل مجموعة جزئية P غير خالية من $\mathbb{N}$ تحتوي على أصغر عنصر.
2. كل مجموعة منتهية في $\mathbb{N}$ تحتوي على أكبر عنصر.

1.2 المجموعات القابلة للعد

تعريفات 1

1. نقول أن مجموعتين X و Y متكافئتين إذا وجد تكافؤ $f : X \longrightarrow Y$, و في هذه الحالة نكتب $X \sim Y$.
2. نقول أن مجموعة قابلة للعد إذا كانت منتهية أو متكافئة مع المجموعة $\mathbb{N}$.
كل تكافؤ $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ يعتبر ترقيما لعناصر المجموعة X.

ملاحظة 1.2.1

1. إذا كانت المجموعة X منتهية و $\#X = n$ و $X \sim Y$, فإن $\#Y = n$. ($\#X$ هو عدد العناصر في المجموعة X).
2. مجموعتن منتهيتين X و Y متكافئتين إلا و إذا كان لهما نفس عدد العناصر.
3. المجموعة $\mathbb{N}_2$ للأعداد الطبيعية الزوجية هي قابلة للعد.
الدالة $n \mapsto 2n$ هي تكافؤ بين المجموعة $\mathbb{N}$ و المجموعة $\mathbb{N}_2$.
4. $\mathbb{Z}$ هي قابلة للعد.
الدالة $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ المعرفة كما يلي $f(n) = 2n$ إذا كان $n \geq 0$ و $f(n) = -2n + 1$ إذا كان $n < 0$ هي تكافؤ.

مبرهنة 1.2.1
العلاقة "تكافؤ" هي علاقة تكافؤ (انعكاسية ، متناظرة ، ومتعدية.)

البرهان
لتكن X, Y و Z ثلاث مجموعة.

1. الدالة $x \longmapsto x$ هي تكافؤ بين X و X, إذا $X \sim X$.
2. إذا كان $\varphi\colon X \to Y$ هي تكافؤ بين X و Y, إذا $\varphi^{-1} : Y \to X$ هي تكافؤ بين Y و X. إذا $\sim$ متناظرة.
3. إذا كانت $\varphi\colon X \to Y$ تكافؤ بين X و Y و إذا كان $\psi\colon Y \to Z$ تكافؤ بين Y و Z, إذا $\psi \circ \varphi\colon X \to Y$ هي تكافؤ بين X و Z. إذا $\sim$ متعدية.

□

مبرهنة 1.2.2
كل مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ قابلة للعد.

البرهان
نذكر بأن كل مجموعة جزئية A من $\mathbb{N}$، $\inf A \in A$.
لتكن A مجموعة جزئية غير منتهية من $\mathbb{N}$.
ليكن $n_1 = \inf A$، $n_2 = \inf A \setminus \{n_1\}$ و لكل $k \in \mathbb{N}$، $n_k = \inf A \setminus \{n_1, \ldots, n_{k-1}\}$. إذا $A = \{n_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ هي مجموعة قابلة للعد.
يمكن أن نأخذ الدالة $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ المعرفة كما يلي: $f(k) = n_k$ لكل $k \in \mathbb{N}$. □

نتيجة 1.2.3
كل مجموعة غير منتهية من مجموعة قابلة للعد هي مجموعة قابلة للعد.

مبرهنة تمهيدية 1.2.4
المجموعة $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ قابلة للعد.

البرهان
نأخذ الدالة $(m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$. □

مبرهنة 1.2.5
إذا كان X و Y مجموعتين قابلة للعد فإن المجموعة $X \times Y$ قابلة للعد.

البرهان
لتكن دالة $f\colon X \to \mathbb{N}$ و دالة $g\colon Y \to \mathbb{N}$ تقابل. نعرف الدالة $f \times g\colon X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ بما يلي $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$.
$f \times g$ هي تقابل. □

مبرهنة 1.2.6

1. إذا وجدت دالة $f\colon X \longrightarrow Y$ شاملة و X قابلة للعد فإن صورة f قابلة للعد.
2. إذا وجدت دالة $f\colon X \longrightarrow Y$ أحادية و Y قابلة للعد فإن المجموعة X قابلة للعد.
3. الضرب الديكرتي لمجموعتين قابلة للعد هي قابلة للعد.
4. كل إتحاد منته أو قابلة للعد لمجموعات قابلة للعد هي قابلة للعد.

مثال 1.2.1
المجموعة $\mathbb{Q}^+ \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{Q}\colon x > 0\}$ مجموعة قابلة للعد.
$\mathbb{Q}$ قابلة للعد.

البرهان
ليكن العدد الكسري $\frac{m}{n}$ بحيث m و n ليس لهما قاسم مشترك إلا 1. الدالة $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$ أحادية.
إذا $\mathbb{Q}^+$ هي مجموعة قابلة للعد.

مبرهنة 1.2.7
المجموعة $\mathbb{R}$ ليست قابلة للعد.

البرهان
بما أن الدالة $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ هي تقابل و أن الفترة $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ متكافئة مع الفترة $]0,1[$, إذا يكفي أن نبرهن أن الفترة $]0,1[$ ليست قابلة للعد.
لنفرض أن الفترة $]0,1[$ قابلة للعد. $]0,1[=\{x_n;\ n\in\mathbb{N}\}$. كل x_n يمثل متسلسلة من الأعداد العشرية $x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{n,k}}{10^k}$, مع $a_{n,k}\in\{0,\ldots,9\}$. (لا يوجد أي عدد $N\in\mathbb{N}$ بحيث $a_{n,k}=9$ لكل $k\geq N$). نعرف العدد x كما يلي
لكل $k\in\mathbb{N}$, نأخذ $b_k\in\{0,\ldots,8\}$ بحيث $b_k\neq a_{k,k}$ و $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$. $x\in]0,1[$ و لكن $x\neq x_n$ لكل $n\in\mathbb{N}$. $\square$

1.3 الزمر والحقول

تعريف 1.3.1
لتكن مجموعة G و عملية ثنائية تجميعية على G تحقق القواعد التالية

1. الإغلاق:
إذا كان a و b ينتميان للمجموعة G فإن $a*b$ ينتمي أيضا للمجموعة G.

2. العملية $*$ تحقق الخاصية تجميعية:
إذا كان a, b و c عناصر من G عندئذ يكون $(a*b)*c = a*(b*c)$.

3. G تحوي عنصر حيادي يرمز به غالبا e يحقق $e*a = a*e$ لكل عنصر من G.

4. كل عنصر من G له عنصر معاكس (أو عنصر نظير). أي لكل $a\in G$ يوجد $b\in G$ بحيث $a*b = b*a = e$.

ونقول أن الزمرة G إبدالية إذا كانت العملية الثنائية المعرفة عليها إبدالية. أي لكل $a,b\in G$ ، فإن $a*b = b*a$.

أمثلة 1.3.1
$(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ و $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x+y\sqrt{2}; x,y\in\mathbb{Q}\}$ تمثل زمرا إبدالية.

تعريف 1.3.2
لتكن مجموعة F و $+, .$ عمليتين ثنائية على F تحقق القواعد التالية

1. $(G,+)$ هي زمرة إبدالية. و 0 يرمز للعنصر المحايد.

2. $(G\setminus\{0\}, .)$ هي زمرة. و 1 يرمز للعنصر المحايد.

3. قانون التوزيع:
لكل $x,y,z\in F$, فإن $x.(y+z) = x.y + x.z$

ونقول أن الحقل F إبدالي إذا كانت العملية . إبدالية. أي لكل $a,b\in G$ ، فإن $a.b = b.a$.

أمثلة 1.3.2
$(\mathbb{Q},+,.)$ و $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x+y\sqrt{2}; x,y\in\mathbb{Q}\},+.)$ تمثل حقولا إبدالية.

1.4 الحقول المرتبة

تعريف 1.4.1 (المجموعات المرتبة)
لتكن X مجموعة و R علاقة ثنائية على X. نقول أن R هي ترتبب على X إذا توفر ما يلي:

1. (علاقة انعكاسية)
$$\forall x \in X;\ xRx.$$

2. (علاقة تخالفية)
$$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y.$$

3. (علاقة انعكاسية)
$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz.$$

ونقول أن هذا الترتيب شامل إذا كان xRy أو yRx لكل $x, y \in X$.
عادة ما نرمز بعلاقة ترتيب بالرمز التالي: $\leq$.

تعريف 1.4.2 (الحقول المرتبة)
نقول أن الحقل $(F, +, ., \leq)$ مرتب إذا تحقق ما يلي:

1. $\leq$ هو ترتيب شامل على الحقل F.
2. إذا كان $x \leq y$ فإن $x + z \leq y + z$ لكل $z \in F$
3. إذا كان $x \leq y$ و $z \geq 0$ فإن $x.z \leq y.z$

مثال 1.4.1
$(\mathbb{Q}, +, ., \leq)$ هو حقل مرتب.

ملاحظات 1.4.1

1. إذا كان $x \leq y$ فنكتب كذلك $y \geq x$.
2. إذا كان $x \neq 0$ و $x \geq 0$, فنكتب $x > 0$.

مبرهنة 1.4.1
ليكن $\mathbb{K}$ حقل مرتب

1. إذا كان $x \geq 0;$, فإن $(-x) \leq 0$.
2. إذا كان $x \geq 0$ و $y \leq z$و فإن $x.y \leq x.z$.
3. إذا كان $x \leq 0$ و $y \leq z$و فإن $x.y \geq x.z$.
4. لكل $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$و $x^2 > 0.$
5. إذا كان $x > y > 0$ فإن $0 < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$.

البرهان

1. إذا كان $x \geq 0$ فإن $(-x) \geq (-x) + x$ أو $0 \geq (-x)$.
2. $x \geq 0$ و $z - y \geq 0$ فإن $x.(z-y) \geq 0 \Rightarrow x.z - x.y \geq 0$.
3. إذا كان $x \leq 0$ فإن $(-x) \geq 0$ وباستعمال الخاصية 2 فنجد $(-x).(z-y) \geq 0$ و نستنتج أن $-(x.z) + x.y \geq 0$. إذا $x.y \geq x.z$.
4. إذا كان $x > 0$ فإن $x^2 > 0$.
   إذا كان $x < 0$, فباستعمال الخواص السابقة $y = x$ و $z = 0$ نجد $x.x > 0$.
5. $x > y > 0$ إذا $(\frac{1}{x}).(\frac{1}{y}).(x) > (\frac{1}{x}).(\frac{1}{y}).y > 0$ أو كذلك $\frac{1}{y} > \frac{1}{x} > 0$.

ملاحظة 1.4.1
إذا كان $x > 0$, فإن $\frac{1}{x} > 0$ لأن $(\frac{1}{x}).x = 1 > 0$ و $1 = 1^2$.

1.5 مسلمات الترتيب

1.5.1 الحد العلوي والحد السفلي للمجموعات

تعريف 1.5.1
لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة و لتكن P مجموعة جزئية من E.

1. نقول أن عنصر x من E هو حد أعلى للمجموعة P إذا توفر الشرط التالي $y \leq x$ لكل $y \in P$.
2. نقول أن عنصر x من E هو حد سفلي للمجموعة P إذا توفر الشرط التالي $x \leq y$ لكل $y \in P$.
3. نقول أن المجموعة P هي محدودة علويا في المجموعة E إذا كان لها حد علوي في E.
4. نقول أن المجموعة P هي محدودة سفليا في المجموعة E إذا كان لها حد سفلي في E.
5. نقول أن المجموعة P هي محدودة في المجموعة E إذا كانت محدودة علويا و سفليا في E.
6. نقول أن عنصر x في المجموعة P إن وجد هو أكبر عنصر إذا كان حدا علويا للمجموعة P.
7. نقول أن عنصر x في المجموعة P إن وجد هو أصغر عنصر إذا كان حدا سفليا للمجموعة P.

ملاحظة 1.5.1
إذا وجد العنصر الأكبر أو العنصر الأصغر فهو وحيد.

تعريف 1.5.2
لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة و لتكن P مجموعة جزئية من E.

1. إذا كانت المجموعة P محدودة علويا فإننا نسمي العنصر $c \in E$ إن وجد ، حدا علويا أصغر للمجموعة P إذا تحقق الشرطان
   - c حد علوي للمجموعة P
   - كل حد علوي للمجموعة P هو أكبر من c.

   نرمز بهذا العنصر $\sup P$.

2. إذا كانت المجموعة P محدودة سفليا فإننا نسمي العنصر $d \in E$ إن وجد ، حدا سفليا أكبر للمجموعة P إذا تحقق الشرطان

- d حد سفلوي للمجموعة P
- كل حد سفلوي للمجموعة P هو أصغر من d.

نرمز بهذا العنصر $\inf P$.

تمرين 1 :
لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة و لتكن P مجموعة جزئية من E.

1. أثبت أنه إذا وجد العنصر الأكبر للمجموعة P فإنه يساوي الحد العلوي الأصغر.
2. أثبت أنه إذا وجد العنصر الأصغر للمجموعة P فإنه يساوي الحد السفلوي الأكبر.

1.5.2 التمارين

1.6 مسلمات التمام

ملاحظة 1.6.1
يمكن لمجموعة جزئية من $\mathbb{Q}$ محدودة ug,dh في $\mathbb{R}$ و ليس لها أصغر حد علوي في $\mathbb{Q}$.

مثال 1.6.1
لتكن $P = \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 0 \text{ and } x^2 < 2\}$ و $T = \{t \in \mathbb{Q};\ t \geq 0 \text{ and } t^2 > 2\}$.

1. P ليس لها أصغر حد علوي في $\mathbb{Q}$.
2. T ليس لها أكبر حد سفلوي في $\mathbb{Q}$.
3. T هي مجموع الحدود العلوية للمجموعة P في $\mathbb{Q}$.

البرهان)

1. إذا كان للمجموعة P أصغر حد علوي في $\mathbb{Q}$. ليكن $\sup P = a = \frac{p}{q}$, مع p و q ليس لهما قاسم مشترك.
• إذا كان $a^2 = 2$, إذا 2 يقسم p.
إذا كان $p = 2s$, فإن $2s^2 = q^2$ وهذا يبرهن أن 2 تقسم q, و هذا متناقض مع الفرضية.
• إذا كان $a^2 < 2$, ليكن العدد $x = a + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. $x^2 = a^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2a}{n} < a^2 + \frac{2a+1}{n}$. إذا أخذنا $n > \frac{2a+1}{2-a^2}$, فنجد أن $x^2 < 2$, و هذا متناقض مع فرضية أن a هو أصغر حد علوي.
• إذا كان
$a^2 > 2$, ليكن العدد $b = a - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. $b^2 = a^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2a}{n} > a^2 - \frac{2a}{n}$.
إذا أخذنا $n > \frac{2a}{a^2-2}$, فنجد أن $b^2 > 2$, إذا b هو حد علوي للمجموعة P و $b < a$, و هذا تناقض.

2. بنفس الحجج المجموعة T ليس لها أكبر حد سفلي في $\mathbb{Q}$.
3. لكل $t \in T$ و $x \in P$ نجد أن $t^2 > 2 > x^2$, إذا $t > x$.
إذا كل عنصر من T هو حد علوي للمجموعة P.
سنبرهن الآن أن كل حد علوي للمجموعة P هو في T.
ليكن m حد علوي للمجموعة P, $m \geq x > 0,\ \forall x \in P$.
إذا كان $m^2 < 2$, إذا $m \in P$, و هذا متناقض مع ما أثبتناه في السؤال الأول .
بما أن المعادلة $m^2 = 2$ ليس لها حلول في $\mathbb{Q}$, فإن $m^2 > 2$, و هذا يثبت أن $m \in T$.

$\square$

مبرهنة 1.6.1 (مسلمة التمام)
يوجد حقل ابدالي مرتب يسمى حقل الأعداد الحقيقية و يرمز له بالرمز $\mathbb{R}$ و يحقق ما يلي:

1. $\mathbb{Q}$ هو حقل جزئي من $\mathbb{R}$.
2. كل مجموعة جزئية محدودة علوية من $\mathbb{R}$ لها حد علوي أصغر.

مبرهنة 1.6.2 (نظرية أرشميدس)
لكل x, y في $\mathbb{R}$ و $x > 0$, يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n.x \geq y$.

البرهان
لتكن المجموعة $P = \{k.x; k \in \mathbb{N} \wedge kx < y\}$.
إذا كان $P = \emptyset$, النتيجة بديهية.
إذا كان $P \neq \emptyset$. P لها حد علوي أصغر و نرمز به b. إذا $b - x < b$, يوجد $k_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $b - x < k_0 x \leq b$. إذا $(k_0 + 1)x > b \Rightarrow (k_0 + 1)x \geq y$. و نأخذ $n \geq k_0 + 1$. $\square$

نتيجة 1.6.3

1. $\forall a \in \mathbb{R}$, يوجد $n \in \mathbb{N}$; بحيث $n \geq a$.
2. $\forall b > 0$, يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $0 < \dfrac{1}{n} < b$.
3. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, يوجد $s \in \mathbb{Q}$; بحيث $a < s < b$. (نقول أن $\mathbb{Q}$ كثيف في $\mathbb{R}$).
4. لكل $x \in \mathbb{R}$, يوجد عدد صحيح وحيد $n \in \mathbb{Z}$ يحقق $n \leq x < n + 1$. نرمز بهذا العدد $E(x)$ و يسمى العدد الصحيح للعدد x.

البرهان

1. نطبق النظرية 1.6.2 عندما تكون $x = 1$ و $y = a$.
2. $\dfrac{1}{b} > 0$, نطبق 1) و نجد $n > \dfrac{1}{b}$, أي $0 < \dfrac{1}{n} < b$.
3. $b - a > 0$ و إذا يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n(b - a) > 1$, إذا يوجد $m \in \mathbb{N}$ بحيث $na < m < nb \Rightarrow a < \dfrac{m}{n} < b$. نأخذ $s = \dfrac{m}{n}$.

4. ليكن $E = \{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$.
المجموعة E غير خالية ومحدودة علويا في $\mathbb{Z}$.
ليكن m أكبر عناصرها. إذا $m \leq x < m + 1$.

$\square$

ملاحظة 1.6.2
إذا كان $x < y$ يوجد عدد ما لا نهائي من الأعداد الكسرية بين x و y.

نظرية 1.6.1
لتكن P مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.
حتى يكون العدد M هو الحد العلوي الأصغر للمجموعة P إلا وإذا كان

1. $\forall x \in P$, $x \leq M$.
2. $\forall \varepsilon > 0$, يوجد $x \in P$ بحيث $x > M - \varepsilon$.

البرهان
إذا كان M هو الحد العلوي الأصغر للمجموعة P إذا $\forall x \in P$, $x \leq M$. كذلك لكل $\varepsilon > 0$, العدد $M-\varepsilon$ ليس حد علوي للمجموعة P لأن M هو أصغر حد علوي. إذا يوجد $x \in P$ بحيث $x > M-\varepsilon$.
إذا تحققت شروط (1و (2. M هو حد علوي للمجموعة P, إذا P لها حد أصغر علوي M' ، $M' \leq M$.
إذا كان $M' < M$, نأخذ $\varepsilon = M - M' > 0$. و حسب الشرط 2) يوجد $x \in P$ بحيث $x > M - (M - M') = M'$ و هذا متناقض مع الشروط, إذا M هي الحد العلوي الأصغر للمجموعة P.
$\square$

مبرهنة 1.6.4
ليكن P مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. حتى يكون العدد m هو أكبر حد سفلي للمجموعة P إلا وإذا كان

1. $\forall x \in P, \ x \geq m.$
2. $\forall \varepsilon > 0$, يوجد $x \in P$ بحيث $x < m + \varepsilon$.

نظرية 1.6.2
كل مجموعة جزئية P من $\mathbb{R}$ محدودة سفليا لها أكبر حد سفلي.

البرهان
ليكن $T = \{-x; x \in P\}$.
المجموعة T غير خالية. و بما أن المجموعة P محدودة سفليا يوجد $m \in \mathbb{R}$ بحيث $x \geq m$ لكل $x \in P$, إذا T هي محدودة علويا بالعدد $(-m)$ و لها أصغر حد علوي M. ليكن $\varepsilon > 0$, يوجد $y \in T$ بحيث $M - \varepsilon < y \leq M$. إذا يوجد $x \in P$ بحيث $-M \leq x < -M + \varepsilon$. باستعمال المبرهنة 1.6.4 $-M$ هي الحد السفلي الأكبر للمجموعة P. $\square$

مثال 1.6.2
ليكن $P = \{1 + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. 2 هو حد أعلى للمجموعة P و ينتمي للمجموعة P, إذا 2 هو أكبر عنصر و هو الحد العلوي الأصغر للمجموعة P.
P هي مجموعة محدودة سفليا ، إذا لها أكبر حد علوي. 1 هو حد سفلي للمجموعة P. لنفرض أنه يوجد حد سفلي $s > 1$و $(s-1 > 0)$. باستعمال مبرهنة أرشميدس ,يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $\Rightarrow (s-1) > \dfrac{1}{n}$ $s > 1 + \dfrac{1}{n}$, وهذا تناقض. إذا 1 هي أكبر حد أدنى للمجموعة P. 1 لا ينتمي للمجموعة P, إذا P ليس لها أصغر عنصر.

مبرهنة 1.6.5 الجذر النوني لعدد حقيقي

ليكن $n \in \mathbb{N}$. لكل عدد حقيقي $x > 0$, يوجد عدد حقيقي وحيد $y > 0$ بحيث $y^n = x$. y يسمى الجذر النوني لعدد x.

البرهان
لنفرض لأنه يوجد عددين y و z يحققان $y^n = z^n = x$ و $0 < y < z$, إذا $0 < y^n < z^n$ و هذا تناقض.
ليكن $E = \{t \in \mathbb{R};\ t > 0 \ \wedge\ t^n < x\}$. المجموعة $E \neq \emptyset$ لأن $\frac{x}{1+x} \in E$. (يكفي أن نثبت أن $x^n < x(1+x)^n$, و هذا سهل الإثبات).
المجموعة E محدودة علوية بالعدد $(1+x)$.
ليكن y أصغر حد أعلى للمجموعة E, و نريد أن نثبت أن $y^n = x$.
إذا كان $y^n < x$, نأخذ عدد $0 < h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ و $h < 1$.
$(y+h)^n - y^n \leq nh(y+h)^{n-1} < nh(y+1)^{n-1} < x - y^n$, إذا $(y+h)^n < x$ و هذا تناقض لأن $y + h \notin E$.
إذا كان $y^n > x$, نأخذ عدد $0 < k < \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}$ و $k < 1$, $y^n - (y-k)^n < nky^{n-1} = y^n - x$, إذا $(y-k)^n > x$, و هذا تناقض لأن $y - k$ سيكون حد علوي. و نستنتج أن $y^n = x$.
سنطتب $y = \sqrt[n]{x}$

نتيجة 1.6.6
ليكن a و b عددين حقيقيين و $n \in \mathbb{N}$. إذا

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.$$

البرهان
لناخذ العددين $x = \sqrt[n]{a}$ و $y = \sqrt[n]{b}$, $ab = x^n y^n = (xy)^n$, إذا $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$.

□

نتيجة 1.6.7

إذا كان $n \in \mathbb{N}$, الدالة $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$ هي تقابل.

الفترات في $\mathbb{R}$
إذا كانت a, b
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$ و تسمى الفترة المغلقة و حدودها a و b.
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ و تسمى الفترة المفتوحة و حدودها a و b.
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ و تسمى الفترة المغلقة في a ومفتوحة في b.
إذا كانت مجموعة E غير محدودة علويا نكتب $\sup E = +\infty$ و إذا كانت غير محدودة سفليا نكتب $\inf E = -\infty$.
$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$,
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$,
$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$,
$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$.

تعريف 1.6.1
نقول أن مجموعة U هي جوار لعدد $a \in \mathbb{R}$ إذا كانت تحتوي على فترة مفتوحة تحتوي على a.

1.7 مجموعة تمارين الباب الثاني

تمرين 1 :
أثبت أن لكل $x \neq 1$ و لكل $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{1.1}$$

تمرين 2 :
أثبت بالستعمال الإستقراء الرياضي أنه إذا كان $x \geq 0$, فإن $(1+x)^n \geq 1+nx$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
تمرين 3 :
أثبت بالستعمال الإستقراء الرياضي أن $\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

تمرين 4 :

1. أثبت أن $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$,
2. $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$,
3. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
4. $\sum_{k=1}^{n+1} k2^k = n2^{n+2} + 2$
5. $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$.
6. $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$.
7. $\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{(2n+2)!}$.

تمرين 5 :
أثبت ما يلي بالستعمال طريقة الإستقراء الرياضي:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}. \tag{1.2}$$

تمرين 6 :
بين أن التقارير التالية صائبة لكل $n \in \mathbb{N}$.

1. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

3. $\sum_{k=1}^{n+1}k2^k = n2^{n+2}+2$

4. $\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{(2n+2)!}$

تمرين 7 :
لتكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة تزايدية. لأثبت أن مجموعة النقاط أين تكون الدالة f غير متصلة هي مجموعة قابلة للعد.

تمرين 8 :
أثبت أن مجموع كثيرات الحدود والتي تكون معاملها أعدادا صحيحة هي قابلة للعد.

تمرين 9 :
اثبت أن مجموعة المجموعات المنتهية في $\mathbb{N}$ هي قابلة للعد.

تمرين 10 :
هل توجد دالة متصلة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ بحيث $f(\mathbb{Q})\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ و $f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$.

تمرين 11 :
هل المجموعتين $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ و $\mathbb{Q}\cap]0,1[$ متكافئتين.

تمرين 12 :

الطريقة الأولى

نفرض أنه توجد متتالية $(x_n)_n$ بحيث $[0,1]=\{x_n;\ n\in\mathbb{N}\}$.
لتكن $a_1=1$ ،$b_1=1$ و $I_1=[a_1,b_1]$.

- أثبت أن أحد المجالات التالية $[a_n,\frac{1}{3}(2a_n+b_n)][\frac{1}{3}(2a_n+b_n),\frac{1}{3}(a_n+2b_n)][\frac{1}{3}(a_n+2b_n),b_n]$ لا يحتوي على x_n إذا كان $n=1$.
  ليكن $I_2=[a_2,b_2]$ أحد هذه المجالات الذي يحتوي على x_1.
- أثبت بالستعمال الإستقراء الرياضي وجود متتالية من المجالات $(I_n=[a_n,b_n])_n$ بحيث $I_{n+1}\subset I_n$ ،$x_n\notin I_{n+1}$ و $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n-a_n)$.
- أثبت أنه يوجد $a\in[0,1]$ بحيث $\bigcap_{n=1}^{+\infty}I_n=\{a\}$.
- إستنتج أن الفرضية $[0,1]=\{x_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ مستحيلة.

الطريقة الثانية

نفرض أنه توجد متتالية $(x_n)_n$ بحيث $[0,1[=\{x_n;\ n\in\mathbb{N}\}$.
إذا كان $x_n=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_{n,k}}{3^k}$. (نفرض أنه لا يوجد $p\in\mathbb{N}$ بحيث $a_{n,k}=2$ لكل $k\geq p$.)

- أثبت أنه يوجد $x \in [0,1[$, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$ بحيث $a_n \neq a_{n,n}$ لكل n.
- إستنتج.

تمرين 13 :
لتكن المجموعات التالية

$$E = \{\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{n+1}, m, n \in \mathbb{N}_0\} \qquad F = \{\frac{-1}{1+n^2} + (-1)^{n+1}, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

$$G = \{-\frac{1}{n+(-1)^{n+1}};\ n \in \mathbb{N}_0\}, \qquad H = \{\sqrt{1+x^2} - x;\ x \in \mathbb{R}^+\}.$$

أوجد إذا كان ممكنا
$\sup E$, $\sup F$, $\sup G$, $\sup H$, $\inf E$, $\inf F$, $\inf G$, $\inf H$,
$\max E$, $\max F$, $\max F$, $\max H$, $\min E$, $\min F$, $\min G$, $\min H$.
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

تمرين 14 :
هل المجموعة التالية محدودة $A = \{x \in \mathbb{R};\ \sin x > \alpha\}$, $\alpha \in]0,1[$.

تمرين 15 :
إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ ، بين ما يلي
$\max(x,y) + \min(x,y) = x+y$, $\max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|$,
$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ و $\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

تمرين 16 :
بين أن المجموعة التالية محدودة و أوجد $\sup E$ و $\inf E$
$E = \{\cos t + \tan^{-1} t;\ t \geq \pi\}$

تمرين 17 :
إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ ، بين ما يلي
$E(x) + E(y) \leq E(x+y)$
$E(x-y) \leq E(x) - E(y)$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $E\left[\frac{E(nx)}{n}\right] = E(x)$.

تمرين 18 :

1. أوجد مجموعة الحدود العليا و مجموعة الحدود السفلى والحد الأعلى والحد الأسفل للمجموعات التالية

$$E = \{\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{n+1}, m, n \in \mathbb{N}_0\} \qquad F = \{\frac{-1}{1+n^2} + (-1)^{n+1}, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

$$G = \{-\frac{1}{n+(-1)^{n+1}};\ n \in \mathbb{N}_0\}, \qquad H = \{\sqrt{1+x^2} - x;\ x \in \mathbb{R}^+\}.$$

2. ادرس وجود العنصر الأكبر والعنصر الأصغر للمجموعات.

تمرين 19 :
لكل $a, b \in \mathbb{R}$, أثبت ما يلي

$$\begin{aligned} \max\{a, b\} &= \frac{1}{2}(a + b + |b - a|) \\ \min\{a, b\} &= \frac{1}{2}(a + b - |b - a|) \end{aligned}$$

تمرين 20 :
أوجد $\sup A$ و $\inf A$ إذا وجدت
(a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 9 > 0\}$
(b) $A = \left\{n \in \mathbb{N};\ 1 - \frac{(-1)^n}{n}\right\}$
(c) $A = \mathbb{Q}$
(d) $A = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

تمرين 21 :
إذا كانت المجموعة A و B محدودة من الأعلى , أثبت أن $A \cup B$ محدودة من الأعلى و

$$\sup\,(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

أوجد و أثبت النتيجة المطابقة للحد الأسفل $\inf(A \cup B)$.

تمرين 22 :
لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$, نعرف المجموعة

$$A + B = \{a + b;\ a \in A, b \in B\}.$$

أثبت أن

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

إذا كان كل من A و B محدودتين من الأعلى.
أوجد و أثبت النتيجة المطابقة للحد الأسفل $\inf(A + B)$.

1.8 حلول مجموعة تمارين الباب الثاني

حل التمرين 1:

لتكن $P(n)$ التقرير التالي: $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{j=0}^{n} x^j$ إذا كان $x \neq 1$.

إذا كان $n=0$ فالتقرير بديهي. نفرض أن التقرير $P(n)$ صائب. لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1} x^j &= \sum_{j=0}^{n} x^j + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}\\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.\end{aligned}$$

المعادلة الأخيرة تدل على أن $P(n+1)$ صائب كذلك. إذا $P(n)$ صائب لكل $n \in \mathbb{N}$.

يمكن الإجابة عن السؤال بالطريقة التالية. إذا كان $S_n = \sum_{j=0}^{n} x^j = 1 + x + x^2 + \ldots x^n$. فإن

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots x^n,$$
$$xS_n = x + x^2 + \ldots x^n + x^{n+1},$$
$$(1-x)S_n = 1 - x^{n+1}.$$

حل التمرين 2:

التقرير صائب إذا كان $n=1$.

نفرض أن التقرير التالي صائب $(1+x)^n \geq 1 + nx$, إذا $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$.

حل التمرين 3:

التقرير صائب إذا كان $n=1$.

نفرض أن التقرير التالي صائب $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$, إذا

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k &= \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1)\\ &= \frac{(-1)^n(2n+1)-1+(-1)^{n+1}(4n+4)}{4}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}(4n+4-2n-1)-1}{4}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4}\end{aligned}$$

حل التمرين 4:

1. ليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$. $S_1 = 1$ و نفرض أن $S_n = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (2n+1)^2 \\ &= \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2 \\ &= (2n+1)\frac{n(2n-1)+3(2n+1)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}. \end{aligned}$$

2. ليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$. $S_1 = 1$ و نفرض أن $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^4 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + (n+1)^4 \\ &= (n+1)\frac{n(2n+1)(3n^2+3n-1)+30(n+1)^3}{30} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)(3(n+1)^2+3(n+1)-1)}{30}. \end{aligned}$$

3. ليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
$S_1 = \frac{1}{2}$ و نفرض أن $S_n = \frac{n}{n+1}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{n+1}(n + \frac{1}{n+2}) = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

ويمكن أن نثبت النتيجة بالطريقة التالية:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

4. ليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} k2^k$.
$S_1 = 2^3 + 2$ و نفرض أن $S_n = n2^{n+2} + 2$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+2)2^{n+2} \\ &= n2^{n+2} + 2 + (n+2)2^{n+2} = 2^{n+3}(n+1) + 2. \end{aligned}$$

ويمكن أن نثبت النتيجة بالطريقة التالية: ليكن $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \dfrac{1-x^{n+2}}{1-x}$, لكل $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1}$. إذا $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} k2^k = 2f'(2) = n2^{n+2}+2.$

5. ليكن $S_n = \prod_{k=2}^{n}(1-\dfrac{1}{k^2})$. $S_2 = \frac{3}{4}$ و نفرض أن $S_n = \dfrac{n+1}{2n}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n(1-\frac{1}{(n+1)^2}) \\ &= \frac{n+1}{2n}\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

6. ليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n} kk!$. $S_1 = 1$ و نفرض أن $S_n = (n+1)!-1$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)!-1+(n+1)(n+1)! = (n+2)!-1. \end{aligned}$$

7. ليكن $S_n = \prod_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(2k+1)(2k+2)}$. $S_0 = \frac{1}{2}$ و نفرض أن $S_n = \dfrac{1}{(2n+2)!}$.

$$S_{n+1} = S_n\frac{1}{(2n+3)(2n+4)} = \frac{1}{(2n+4)!}.$$

حل التمرين 5:
إذا كان $n = 1$ المتباينة صائبة. نضيف لكل جانب من المتباينة (1.2) العدد $\frac{1}{(n+1)^2}$, و نستنتج مايلي:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(n+1)^2} &\le 2-\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{(n+1)^2} \\ &= 2-\left(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= 2-\tfrac{(n+1)^2-n}{n(n+1)^2} \\ &= 2-\tfrac{1}{n+1}\cdot\tfrac{n^2+n+1}{n(n+1)} \\ &\le 2-\tfrac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

و هذا يثبت المتباينة.

حل التمرين 6:

1. التقرير صائب إذا كان $n = 1$.
نفرض أن التقرير التالي صائب $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, إذا

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2 = \frac{(2n+1)}{3}\left(2n^2+5n+3\right) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}. \end{aligned}$$

2. التقرير صائب إذا كان $n = 1$.
نفرض أن التقرير التالي صائب $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

3. التقرير صائب إذا كان $n = 1$.
نفرض أن التقرير التالي صائب $\sum_{k=1}^{n+1} k2^k = n2^{n+2} + 2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+2} k2^k &= n2^{n+2} + 2 + (n+1)2^{n+3} \\ &= 2^{n+2}\left(2n+2\right) + 2 = (n+1)2^{n+3} + 2. \end{aligned}$$

4. التقرير صائب إذا كان $n = 1$.
نفرض أن التقرير التالي صائب $\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{(2n+2)!}$

$$\prod_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{(2n+2)!(2n+3)(2n+4)} = \frac{1}{(2n+4)!}.$$

حل التمرين 7:
لتكن

$$f(x^+) = \lim_{t\to x^+} f(t), \qquad f(x^-) = \lim_{t\to x^-} f(t).$$

هذه النهايات موجودة لأن الدالة تزايدية.

$$f(x^-) \le f(x) \le f(x^+).$$

إذا كانت E مجموعة النقاط أين تكون الدالة f غير متصلة فإن

$$E \subset \{x \in \mathbb{R};\ f(x^-) < f(x^+).$$

إذا كان $x \in E$ نأخذ $r_x \in \mathbb{Q} \cap]f(x^-), f(x^+)[$.
الدالة $r\colon E \longrightarrow \mathbb{Q}$ المعرفة بما يلي $x \longmapsto r_x$ هي دلة أحادية. إذا E هي مجموعة قابلة للعد.

حل التمرين 8:
لكل كثيرة حدود $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ نعرف المجموعة $E_P = \{a_0, \ldots, a_n\}$.
بهذا نعرف $f : \mathcal{P}_n \longrightarrow zb$ دالة أحادية من مجموعة كثيرات الحدود $\mathcal{P}_n$ التي هي بدرجة أقل أو يساوي n والتي تكون معاملها أعدادا صحيحةK $f(P) = E_P = \{a_0, \ldots, a_n\}$. إذا مجموع كثيرات الحدود والتي تكون معاملها أعدادا صحيحة هي قابلة للعد.

حل التمرين 9:
لتكن F_n مجموعة المجموعات الجزئية من $\mathbb{N}$ والتي تحتوي على n عنصر.
لتكن مجموعة $A = \{p_1, \ldots p_n\}$ بحيث $p_1 \leq \ldots \leq p_n$. نعرف الدالة $g\colon F_n \longrightarrow \mathbb{N}^n$ كالتالي: $g(A) = \{p_1, \ldots p_n\}$.
بما أن الدالة g أحادية فإن F_n مجموعة قابلة للعد. كذلك المجموعة $F = \cup_{n=0}^{+\infty} F_n$ هي قابلة للعد.

حل التمرين 10:
بما أن $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد فإن $f(\mathbb{Q})$ قابلة للعد.
و بما أن $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ فإن $f(\mathbb{R})$ هي مجموعة قابلة للعد.
إذا كانت الدالة غير ثابتة فإن $f(\mathbb{R})$ يحتوي على فترة مقتوحة وهي غير قابلة للعد. إذا f ثابتة.

حل التمرين 11:
المجموعتين $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ و $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ متكافئتين لأنهما قابلة للعد.

حل التمرين 12:
$2 \in E$ و 2 هو حد أعلى للمجموعة E. إذا $2 = \max E = \sup E$.
0 هو حد سفلي للمجموعة E و إذا كان $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\varepsilon \leq \frac{1}{N}$ وهذا يعطي $+ \frac{1}{2N+1}$
$\varepsilon \leq \frac{1}{2N+1}$ و $\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+1} \in E$. إذا $0 = \inf E$ و $0 \notin E$.
$-1 - \frac{1}{2} \in E$ و $-\frac{3}{2}$ هو حد سفلي للمجموعة F. إذا $-\frac{3}{2} = \min E = \inf E$.
1 هو حد أعلى للمجموعة F و إذا كان $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\varepsilon \leq \frac{1}{N}$ وهذا يعطي $= \frac{1}{4N^2+1}$
$\varepsilon \leq |1 - (1 - \frac{1}{4N^2+1}))|$ و $1 - \frac{1}{4N^2+1} \in F$. إذا $1 = \sup F$ و $1 \notin F$.
لكل $n \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq |\frac{1}{n+(-1)^{n+1}} - |$.
$1 \in G$, $(n=0)$, و $-1 \in G$, $(n=1)$. إذا $1 = \sup G = \max G$ و $-1 = \min G = \inf G$.

$$\sqrt{1+x^2} - x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}.\ \text{إذا}\ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \leq 1.$$

$1 \in H$, $(x = 0)$. Y`h $1 = \max H = \sup H$. و إذا كان $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\varepsilon \leq \frac{1}{N}$
و هذا يعطي $\varepsilon \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+N^2}+N}$. إذا $0 = \inf H$ و $0 \notin H$.

حل التمرين 13:
$\frac{\pi}{2} + 2n\pi \in A$ لكل $n \in \mathbb{Z}$. إذا المجموعة A ليست محدودة لا علوية ولا سفلية.

حل التمرين 14:
ليكن $x, y \in \mathbb{R}$. يمكن أن نأخذ $x \leq y$. إذا $\max(x,y) = y$, $\min(x,y) = x$, وهذا يعطي $\max(x,y) + \min(x,y) = x + y$, $\max(x,y) - \min(x,y) = y - x = |x - y|$. ونستنتج بسهولة أن $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ و $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

حل التمرين 15:
نعرف أن $|\cos t| \leq 1$ و $|\tan^{-1} t| \leq \frac{\pi}{2}$. إذا المجموعة E محدودة.
$-1 + \tan^{-1}(\pi) \in E$ وهو حد سفلي. إذا $-1 + \tan^{-1}(\pi) = \inf E = \min E$.
$\frac{\pi}{2} + 1$ هو حد أعلى. و إذا كان $\varepsilon > 0$, يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $\varepsilon \leq \frac{1}{2n\pi}$). إذا

$$0 \le 1 + \frac{\pi}{2} - \big(\cos(2n\pi) + \tan^{-1}(2n\pi)\big) = \tan^{-1}(\frac{1}{2n\pi}) \le \varepsilon,$$

وهذا يبين أن
$\sup E = 1 + \frac{\pi}{2}.$

حل التمرين 16:

نذكر بأن $E(x)$ هو العدد الصحيح الوحيد الذي يحقق $E(x) \le x < E(x) + 1$.
بما أن $E(x+y)$ هو عدد صحيح فإن $E(x) + E(y) \le x + y$ و $E(x+y) \le x + y$, إذا $E(x) + E(y) \le E(x+y)$.
نستنتج $E(x-y) \le E(x) - E(y)$ من السؤال السابق بتعويض y بـ $-y$.
$E(x) \le x < E(x) + 1$, إذا $E(nx) \le nx < E(nx) + 1$ و $\frac{E(nx)}{n} \le x < \frac{E(nx)+1}{n}$.
نأخذ الجزئ الصيح لكل جانب لنجد

$$\begin{aligned} E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) &\le E(x) \le E\left(\frac{E(nx)+1}{n}\right) \le E\left(\frac{E(nx)}{n} + \frac{1}{n}\right) \\ &\le E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) - E(-\frac{1}{n}) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) + 1. \end{aligned}$$

إذا لكل $n \in \mathbb{N}$ $E(x) = E\left[\frac{E(nx)}{n}\right]$.

حل التمرين 17:

1. مجموعة الحدود العليا للمجموعة E هي $[2, +\infty[$. و مجموعة الحدود السفلى للمجموعة E هي $]-\infty, 0]$. $\sup E = 2$ و $\inf E = 0$.

   مجموعة الحدود العليا للمجموعة F هي $[1, +\infty[$. مجموعة الحدود السفلى للمجموعة F هي $]-\infty, -2]$. $\sup F = 1$ و $\inf F = -2$.

   مجموعة الحدود العليا للمجموعة G هي $[1, +\infty[$. مجموعة الحدود السفلى للمجموعة G هي $]-\infty, -1]$. $\sup G = 1$ و $\inf G = -1$.

   $\sqrt{1+x^2} - x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$. مجموعة الحدود العليا للمجموعة H هي $[1, +\infty[$. مجموعة الحدود السفلى للمجموعة H هي $]-\infty, 0]$. $\sup H = 1$ و $\inf H = 0$.

2. أكبر عنصر للمجموعة E هي 2.
   لا يوجد أصغر عنصر للمجموعة E.

   لا يوجد أكبر عنصر للمجموعة F.
   أصغر عنصر للمجموعة F هو -2.

   أكبر عنصر للمجموعة G هيو 1.
   أكبر عنصر للمجموعة G هو -1.

   أكبر عنصر للمجموعة H هو 1.
   لا يوجد أصغر عنصر للمجموعة H.

حل التمرين 18:
إذا كان $\max\{a,b\}=b$, إذا $\frac{1}{2}(a+b+|b-a|)=\frac{1}{2}(a+b+(b-a))=b$.
نتحصل بنفس الطريقة على النتيجة إذا كان $\max\{a,b\}=a$.
إذا كان $\min\{a,b\}=b$, إذا $\frac{1}{2}(a+b-|b-a|)=\frac{1}{2}(a+b-(a-b)=b$. نتحصل بنفس الطريقة على النتيجة إذا كان $\min\{a,b\}=a$.

حل التمرين 19:
(a) المجموعة A ليست محدودة لا من الأعلى ولا من الأسفل .
(b) $\sup A=2$, $\inf A=\frac{1}{2}$.
(c) المجموعة A ليست محدودة لا من الأعلى ولا من الأسفل .
(d) المجموعة A ليست محدودة لا من الأعلى . $\inf A=0$

حل التمرين 20:
بما أن $A\subset A\cup B$ و $B\subset A\cup B$, إذا $\max\{\sup A,\sup B\}\leq\sup(A\cup B)$.
من جانب آخر $\max\{\sup A,\sup B\}=\sup B$, لكل $\varepsilon>0$ يوجد $x\in B$ بحيث $\sup B-\varepsilon<x\leq\sup B$. إذا $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$.
$\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}$, لأن $A\subset A\cup B$ و $B\subset A\cup B$, إذا $\min\{\inf A,\inf B\}\geq\inf(A\cup B)$.
من جانب آخر $\min\{\inf A,\inf B\}=\inf B$, لكل $\varepsilon>0$ يوجد $x\in B$ بحيث $\inf B+\varepsilon>x\geq\inf B$. إذا $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}$.

حل التمرين 21:
لكل $\varepsilon>0$ يوجد $x\in A$ و $y\in B$ بحيث $\sup A-\varepsilon<x\leq\sup A$ و $\sup B-\varepsilon<y\leq\sup B$.
إذا $\sup A+\sup B\geq(x+y)>\sup A+\sup B-2\varepsilon$ و $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.
لكل $\varepsilon>0$ يوجد $x\in A$ و $y\in B$ بحيث $\inf A+\varepsilon>x\geq\inf A$ و $\inf B+\varepsilon>y\geq\inf B$.
إذا $\inf A,\inf B\leq(x+y)<\inf A+\inf B+2\varepsilon$ و $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.