

المحددات

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

4 أكتوبر 2017

المحتويات

1 تعريف المحدد

2 خواص المحددات

3 المصفوفة المصاحبة

تعريف المحدد

تعريف

إذا كانت $A = (a_{j,k})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n نرمز $A_{j,k}$ المصفوفة مربعة من الدرجة $n - 1$ نحصل عليها من المصفوفة A بحذف الصف j والعمود k .

مثال:

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ فإن } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ إذا كانت}$$

تعريف

1 إذا كانت مصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$|A| = \det(A) = ad - bc.$$

2 إذا كانت مصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

تعريف

إذا كانت مصفوفة

3

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$\begin{aligned} |A| = \det(A) &= a_{1,1} \det A_{1,1} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \det A_{1,n} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1,j}. \end{aligned}$$

1 إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, محدد المصفوفة A هو

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 2.$$

2 إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, محدد المصفوفة A هو

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

3 إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ محدد المصفوفة A هو

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

تعريف

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n , يسمى المحدد $\det A_{j,k}$ مصغر العنصر $a_{j,k}$ ويسمى العدد $C_{j,k} = (-1)^{j+k} \det A_{j,k}$ المعامل المصاحب للعنصر $a_{j,k}$

ملاحظة

1 إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n , محدد المصفوفة A يساوي

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{1,j} C_{1,j}.$$

2 بإعادة ترتيب الحدود نخلص إلى

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n a_{1,j} C_{1,j} = \sum_{j=1}^n a_{k,j} C_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,j} C_{k,j}. \end{aligned}$$

مبرهنة Sarrus

إذا كانت $n = 3$ و المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{1,1}(a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}) \\ &\quad - a_{1,2}(a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}) \\ &\quad + a_{1,3}(a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ إذا كانت}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 1 + (-4) \cdot 6 \cdot 2 - (-6) \cdot 6 \cdot 3 = 81. \end{aligned}$$

خواص المحددات

مبرهنة

- 1 إذا كانت مصفوفة A مربعة فإن $\det A^T = \det A$.
- 2 إذا كانت مصفوفة A مربعة وتحتوي على صف أو عمود صفري فإن محددها يساوي صفر.
- 3 إذا كانت مصفوفة A مثلثية علوية أو سفلية فإن محددها يساوي $a_{1,1} \dots a_{n,n}$.
- 4 إذا كانت مصفوفة A مربعة وتحتوي على صف مضاعف لصف آخر أو عمود مضاعف لعمود آخر فإن محددها يساوي صفر.

مبرهنة

5 إذا حصلنا على مصفوفة B من مصفوفة A بضرب صف بعدد c فإن

$$\det B = c \det A \quad (\text{يعني } |cR_j A| = c|A|)$$

6 إذا حصلنا على مصفوفة B من مصفوفة A بتبديل صفين (أو عمودين) فإن

$$\det B = -\det A \quad (\text{يعني } |R_{j,k} A| = -|A|)$$

7 إذا حصلنا على مصفوفة B من مصفوفة A بضرب صف بعدد وإضافة الناتج لصف

$$\text{آخر فإن } \det B = \det A \quad (\text{يعني } |cR_{j,k} A| = |A|)$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (-2)R_{1,2}, (-3)R_{1,3} \\ \underline{\underline{(-1)R_{1,4}}} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
 & = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 & \begin{array}{l} (-1)R_{1,2} \\ \underline{\underline{(-1)R_{1,2}}} \end{array} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 & = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.
 \end{aligned}$$

مثال

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 2R_{1,2}, -3R_{1,3} \\ \underline{\underline{}} \\ -1R_{1,4}, -1R_{1,5} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -13 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} -1 & 9 & -3 & -2 \\ 3 & -13 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
 \begin{array}{l} 3R_{1,2}, 1R_{1,3} \\ \underline{\underline{}} \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 9 & -3 & -2 \\ 0 & 14 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 14 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 14 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -2 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{(-1)R_{1,2}, 2R_{1,3}}{=} \begin{vmatrix} 14 & 6 & 1 \\ -17 & -6 & 0 \\ 24 & 7 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -17 & -6 \\ 24 & 7 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{1R_{1,2}}{=} \begin{vmatrix} -17 & -6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 42 - 17 = 25.
 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3.$$

مثال

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

مبرهنة

لتكن مصفوفة A مربعة فإن A لها معكوس إذا و فقط $\det A \neq 0$.

مبرهنة

لتكن A و B مصفوفتين مربعيتين فإن

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

ملاحظات

- 1 إذا كانت مصفوفة A مربعة من الدرجة n فإن $|cA| = c^n|A|$.
 - 2 لتكن مصفوفة A مربعة و إذا كانت B هي صيغة درجية صفية للمصفوفة A . فإنه يوجد عدد منته من المصفوفات الأولية E_1, \dots, E_m بحيث $E_1 \dots E_m A = B$.
إذا
- $$\det(E_1) \dots \det(E_m) \det(A) = \det(B).$$

المصفوفة المصاحبة

تعريف

لتكن مصفوفة A مربعة نعرف المصفوفة $B = (C_{j,k})^T$ و تسمى المصفوفة المصاحبة للمصفوفة A و نرمز بها $\text{adj}(A)$.

مبرهنة

إذا كانت مصفوفة A مربعة من الدرجة n فإن

$$(\text{adj}(A))A = A(\text{adj}(A)) = (\det A)I_n.$$

مبرهنة

إذا كانت مصفوفة A مربعة ولها معكوس فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A).$$

مثال

$$\text{و } \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \det A = 5, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, n = 2 \quad 1$$

$$.A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -13, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, n = 3 \quad 2$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$.A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \text{ و}$$

مثال

$$\det A = -24, A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, n = 4 \quad 3$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -20 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -20 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -20 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -20 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ و}$$

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ ولها معكوس فأثبت أن $\text{adj}(\text{adj}(A)) = (\det A)^{n-2} A$.

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
أوجد قيمة العدد a بحيث $A^2 - AB + aI_3 = 0$ واستنتج معكوس المصفوفة A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ لتكن المصفوفة المربعة}$$

1 أوجد المصفوفة $B = \text{adj}(A)$ و محدد المصفوفة A .

2 أوجد معكوس المصفوفة A إن أمكن ذلك.