باب 1

نظرية المجموعات

1.1 مدخل لعلم المنطق

تعريف 1.1.1

التقرير

تسمى الجملة الرياضية تقريرا بسيطاإذا كان بالإماكن الحكم عليها صائبة أو خاطئة ولا تكون صائبة و خاطئة في نفس الوقت.

التقرير المركب

التقرير المركب هو جملة رياضية مكونة من تقارير بسيطة مقترنة ببعض الروابط المنطقية التالية:

النفي

إذا كان P تقريرا بسيطا فإن ليس P و نرمز به $\sim P$ (أو P^c) و يكون صائبا عندما يكون P خاطئًا.

الوصل

إذا كان P, Q تقريريرين بسيطين نعرف التقرير "P و Q" و نرمز به $P \wedge Q$ و لا يكون صائبا إلا إذا كان كل من P و Q صائبين.

الفصل

إذا كان P, Q تقريريرين بسيطين نعرف التقرير "P أو Q" و نرمز به $P \vee Q$ و لا يكون خاطئًا إلا إذا كان كل من P و Q خاطئين.

الشرط

إذا كان P, Q تقريريرين بسيطين نعرف التقرير "إذا P فإن Q" و يكون صائبا في جميع الأحوال إلا عندما يكون P صائبا و Q خاطئًا و نرمز به $P \to Q$.
عندما يكون التقرير $P \to Q$ صائبا نقول أن P يقتضي Q و نرمز بذلك $P \Rightarrow Q$.

تعريف 1.1.2
إذا كان P, Q تقريريرين نعرف التقرير "P إذا وفقط إذا Q" والذي نرمز به $P \leftrightarrow Q$ و يكون صائبا عندما يكون التقريران P, Q صائبين معا أو خاطئين معا. و يكون خاطئًا في ما عدا ذلك.
و في حالة صواب التقرير $P \leftrightarrow Q$ فنقول أن التقريرين متكافئين و نكتب $P \Leftrightarrow Q$.

$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\sim Q$	$\sim P$	Q	P
T	T	T	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T	F
T	T	F	F	T	T	F	F

مثال 1.1.1
أثبت أن التقرير $P \to Q$ يكافئ التقرير
$\sim Q \to \sim P$.

الحل

$\sim Q \to \sim P$	$P \to Q$	$\sim Q$	$\sim P$	Q	P
T	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	T
T	T	F	T	T	F
T	T	T	T	F	F

1.2 الخواص العامة للمجموعات

تعريف 1.2.1
لتكن X مجموعة غير خالية.

1. إذا كان x عنصر من X ، فنرمز بذلك $x \in X$ و نقول أن x ينتمي للمجموعة X.
2. إذا كانت Y مجموعة جزئية من X ، فنرمز بذلك $Y \subset X$.
3. إذا كانت Y مجموعة جزئية من X ، نعرف المجموعة Y^c وهي المجموعة المكملة للمجموعة Y في X.
$$Y^c = \{x \in X;\ x \notin Y\}.$$
4. إذا كانت X و Y مجموعتين ، نعرف متممة المجموعة Y في المجموعة X المجموعة
$$X \setminus Y = \{x \in X \text{ and } x \notin Y\}.$$

تعريف 1.2.2 العمليات على المجموعات

1. (إتحاد مجموعتين)
إذا كانت X و Y مجموعتين ، فإن $X \cup Y$ ترمز لإتحاد المجموعتين X و Y و المعرفة كالتالي
$$X \cup Y = \{x \in X \vee\ x \in Y\}.$$
الرمز $\vee$ يرمز للفصل بين تقريرين.
2. (إتحاد المجموعات)
إذا كانت $(X_j)_{j\in I}$ مجموعة من المجموعات ، فإن $\cup_{j\in I} X_j$ ترمز لإتحاد المجموعات $(X_j)_{j\in I}$ و المعرفة كالتالي
$$\cup_{j\in I} X_j = \{x;\ \exists j \in I; x \in X_j\}.$$

3. (تقاطع مجموعتين)
إذا كانت X و Y مجموعتين ، فإن $X \cap Y$ ترمز لتقاطع المجموعتين و المعرفة كالتالي

$$X \cap Y = \{x \in X \wedge x \in Y\}.$$

الرمز $\wedge$ يرمز للوصل بين تقريرين.

4. (تقاطع المجموعات)
إذا كانت $(X_j)_{j\in I}$ مجموعة من المجموعات ، فإن $\cap_{j\in I} X_j$ ترمز لتقاطع المجموعات $(X_j)_{j\in I}$ و المعرفة كالتالي

$$\cap_{j\in I} X_j = \{x \in X_j \ ; \ \forall j \in I\}.$$

5. نقول أن مجموعتين X و Y غير متقاطعتين إذا كان $X \cap Y = \emptyset$.

1.2.1 تمارين

تمرين 1.2.1
أثبت أن العمليات $\cup$ و $\cap$ لها الخاصية التبديلية والخاصية التجميعية:
$A \cup B = B \cup A, \ A \cap B = B \cap A$ و

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

إذا كانت A, B و C ثلاث مجموعات.

حل التمرين 1:
$x \in A \cup B$ إلا وإذا كان $x \in A$ أو $x \in B$, إذا $A \cup B = B \cup A$.
$x \in (A \cup B) \cup C$ إلا وإذا كان $x \in (A \cup B)$ أو
$x \in C$, وهذا متكافئ مع يلي $x \in A$ أو $x \in B$ أو $x \in C$, إذا $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
$x \in A \cap B$ إلا وإذا كان $x \in A$ و $x \in B$, إذا $A \cap B = B \cap A$.
$x \in (A \cap B) \cap C$ إلا وإذا كان $x \in (A \cap B)$ و $x \in C$, وهذا متكافئ مع يلي $x \in A$, $x \in B$ و $x \in C$, إذا $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

تمرين 1.2.2
لتكن $E = \{0, 1, 3, 5\}$ و $F = \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$. إعط نفي التقارير التالية و اعط من منهما صحيح.

1. $\exists x \in E, \ x \leq 2$.
2. $\exists x \in E, \ \forall y \in F, \ x \leq y$.
3. $\forall x \in E, \ x \in F$.

حل التمرين 2:

1. التقرير التالي $\exists x \in E,\ x \leq 2$ صائب. (يمكن أن نأخذ $x = 0$). إذا نفي هذا التقرير غير صائب. نفي هذا التقرير هو:

$$\forall x \in E,\ x > 2.$$

2. التقرير التالي $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ x \leq y$ صائب. إذا نفي هذا التقرير غير صائب. نفي هذا التقرير هو:

$$\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ x > y.$$

3. التقرير التالي $\forall x \in E,\ x \in F$ صائب. إذا نفي هذا التقرير غير صائب. نفي هذا التقرير هو:

$$\exists x \in E, x \notin F.$$

1.3 الدوال

تعريف 1.3.1
إذا كانت X و Y مجموعتين غير خالية نعرف مجموعة حاصل الضرب الديكرتي للمجموعتين كما يلي:

$$X \times Y = \{(x,y);\ x \in X\ \wedge y \in Y\}.$$

مثال 1.3.1
إذا كان $X = \{1,2,a\}$ و $Y = \{0,1,b\}$ فإن

$$\begin{aligned} X \times Y \quad = \quad & \{(1,0),(1,1),(1,b),(2,0),(2,1), \\ & (2,b),(a,0),(a,1),(a,b)\}. \end{aligned}$$

تعريف 1.3.2

1. إذا كانت X و Y مجموعتين غير خالية. أي مجموعة جزئية R من $X \times Y$ تسمى علاقة ثنائية من X إلى Y.
2. إذا كانت R علاقة ثنائية من X إلى Y و إذا كان $(x,y) \in R$ نقول أن x على علاقة R مع y و نكتب xRy.
3. إذا كان $X = Y$ نقول أن R علاقة على X.
4. إذا كانت R علاقة من X إلى Y نعرف العلاقة العكسية R^{-1} العلاقة من Y إلى X والمعرفة كما يلي:

$$R^{-1} = \{(y,x);\ (x,y) \in R\}.$$

مثال 1.3.2
إذا كان $X = \{1,2,a\}$ و $Y = \{0,1,b\}$ فإن

$$R_1 = \{(1,b),(2,0),(2,b),(a,0),(a,b)\},$$
$$R_2 = \{(1,0),(1,1),(a,0),(a,1),(a,b)\},$$
$$R_3 = \{(2,0),(2,1),(2,b),(a,0),(a,b)\}$$

هي علاقات من X إلى Y.

$$R_1^{-1} = \{(b,1),(0,2),(b,2),(0,a),(b,a)\},$$
$$R_2^{-1} = \{(0,1),(1,1),(0,a),(1,a),(b,a)\},$$
$$R_3^{-1} = \{(0,2),(1,2),(b,2),(0,a),(b,a)\}.$$

تعريف 1.3.3

1. نسمي العلاقة R من المجموعة الغير الخالية X إلى المجموعة الغير خالية Y تطبيقا أو دالة إذا كان
   - $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$, $(x,y) \in R$
   - $(x,y) \in R$, $(x,z) \in R \Rightarrow y = z$.
2. إذا كانت R تطبيقا نعرف الدالة $f: X \longrightarrow Y$ كالتالي: $(x,y) \in R \iff y = f(x)$ و نقول أن الدالة f معرفة بالتطبيق R و نقول أن y هي صورة x بالدالة f أو أن y هي قيمة f عند x.
   x يسمى الصورة العكسية للعنصر y.
3. تسمى المجموعة X مجال الدالة f ويشار إليه بالرمز D_f.
   تسمى المجموعة Y مجال f المصاحب.
4. إذا كانت A مجموعة جزئية من X نعرف المجموعة
   $$f(A) = \{f(x);\ x \in A\}$$
   وتسمى صورة المجموعة A. و $f(X)$ يسمى مدى f و يرمز له بالرمز R_f.
5. إذا كانت B مجموعة جزئية من Y نعرف المجموعة
   $$f^{-1}(B) = \{x \in X;\ f(x) \in B\}$$
   وتسمى الصورة العكسية للمجموعة B.

تعريف 1.3.4
لتكن دالة $f: X \longrightarrow Y$.

1. نقول أن الدالة متباينة أو أحادية إذا كان
   $$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$
2. نقول أن الدالة شاملة (أو غامرة) إذا كان $R_f = Y$.
3. نقول أن الدالة هي تقابل إذا كانت شاملة و متباينة.

تعريف 1.3.5
إذا كانت $f: X \longrightarrow Y$ دالة و $A \subset X$ فإن الدالة $g: A \longrightarrow Y$, $g(x) = f(x)$ تسمى مقصور الدالة f على A و يرمز إليها بالرمز $f_{\restriction A}$. وفي هذه الحالة تسمى f هي إمتداد الدالة g على X.

تعريف 1.3.6
إذا كانت $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ دوال نعرف الدالة $g \circ f: X \longrightarrow Z$ بما يلي

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

و تسمى تحصيل الدالة g مع الدالة f.

1.4 مجموعة تمارين الباب الأول

تمرين 1 :
أثبت أنه إذا كان $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow R$ فإن $P \Rightarrow R$.

تمرين 2 :
ضع جدول الصواب للتقارير التالية

1. $P \rightarrow (Q \vee R)$
2. $(\sim P \vee Q) \rightarrow \sim R$

تمرين 3 :
لتكن E مجموعة غير خالية و A, B, C ثلاث مجموعات جزئية من E.
أثبت تكافئ التقارير التالية:

1. $B^c \subset A^c \iff A \subset B$.
2. $A \cup B = B \iff A \subset B$.
3. $A \cap B = A \iff A \subset B$.
4. $A \setminus B = \emptyset \iff A \subset B$.
5. $A^c \cup B = E \iff A \subset B$.
6. $B = C \iff \begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases}$.

تمرين 4 :
أثبت أنه إذا كان $A \cup B = A$ و $A \cap B = A$, فإن $A = B$.

تمرين 5 :
أوجد $\left]0, 1 - \frac{1}{n}\right[\bigcup_{n=2}^{+\infty}$,
$\left]0, 1 - \frac{1}{n}\right] \bigcup_{n \geq 1}$,
$\left]0, \frac{1}{n}\right[\bigcap_{n \geq 1}$.

تمرين 6 :
ليكن $f : A \longrightarrow B$. أثبت ما يلي

1. $f(\emptyset) = \emptyset$,
2. إذا كان $A_1 \subset A_2 \subset A$, فإن $f(A_1) \subset f(A_2)$.
3. $f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f\left(A_\lambda\right)$,

4. $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$,
5. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$,
6. إذا كان $B_1 \subset B_2 \subset B$, فإن $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
7. $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$,
8. $f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$,
9. $f^{-1}(E^c) = \left(f^{-1}(E)\right)^c$.

تمرين 7 :
ليكن X و X' مجموعتين غير خاليتين, $f : X \longrightarrow X'$ دالة ، $(A_j)_{j\in J}$ مجموعات جزئية من X و $(B_j)_{j\in J}$ مجموعات جزئية من X'.
أثبت ما يلي

1. $f(\cup_j A_j) = \cup_j f(A_j)$.
2. $f(\cap_j A_j) \subset \cap_j f(A_j)$.
3. $f^{-1}(\cap_j B_j) = \cap_j f^{-1}(B_j)$.
4. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$, $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

تمرين 8 :
ليكن $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ و$C \xrightarrow{h} D$ ثلاث دوال. أثبت

1. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$,
2. إذا كانت f و g متباينة فأثبت أن $g \circ f$ متباينة.
   إذا كانت f و g غامرة فأثبت أن $g \circ f$ غامرة.
   إذا كانت f و g تكافئ فأثبت أن $g \circ f$ تكافئ.
3. إذا كانت f متباينة فأثبت أن $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ لكل $x \in D_f$, و $(f \circ f^{-1})(x) = x$ لكل $x \in R_f$.

تمرين 9 :
لتكن $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ و $k : G \longrightarrow H$ ثلاث دوال.
ماهي من العبارات التالية صحية

1. إذا كانت $k \circ g \circ f$ شاملة, فإن f شاملة .
2. إذا كانت $k \circ g \circ f$ أحادية, فإن f أحادية.

3. إذا كانت $k \circ g \circ f$ أحادية, فإن g شاملة.
4. إذا كانت $k \circ g \circ f$ تطابق, فإن g تطابق.
5. إذا كانت $k \circ g \circ f$ تطابق, فإن k شاملة و f أحادية.
6. إذا كانت g ليست شاملة, فإن $k \circ g \circ f$ ليست شاملة.
7. إذا كانت g ليست لا أحادية ولا شاملة , فإن $k \circ g \circ f$ ليست أحادية ولا شاملة.

تمرين 10 :
لتكن $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ معرفة بما يلي $f(n) = n^2 - 12n + 40$.

1. هل الدالة f أحادية؟
2. هل الدالة f شاملة ؟