جامعة الملك سعود
كلية العلوم- قسم الرياضيات

الاختبار الفصلي الأول
في المقرر 151 ريض

الفصل الثاني 1439/1438هـ
الزمن: ساعة ونصف

السؤال الأول

أ- أوجد جدول صواب العبارة: $(\neg x \wedge y) \to (z \leftrightarrow \neg x)$. (3 درجات)

ب- بدون استخدام الجداول أثبت أن: $(p \vee r) \wedge (\neg r \to \neg p) \equiv r$. (درجتان)

السؤال الثاني

أ- ليكن n عددا صحيحا. استخدم طريقة المكافئ العكسي لإثبات ما يلي :
" إذا كان العدد 4 لا يقسم $(n^2 - 1)$ فإن n عدد زوجي". (درجتان)

ب- استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن : $n^2 - n$ عدد زوجي لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (4 درجات)

ج- لتكن $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية معرفة كما يلي:
$u_0 = 2, u_1 = 3$ و $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} - 1$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$.
أثبت أن $u_n = n + 2$ لكل عدد صحيح $n \geq 0$. (4 درجات)

السؤال الثالث

أ- لتكن R علاقة من $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ إلى $B = \{2, 3, 4, 5\}$ معرفة كما يلي: $aRb \Leftrightarrow b = a^2 + 1$.

1- اكتب العلاقة R كمجموعة أزواج مرتبة. (درجتان)
2- أوجد كلا من مجال ومدى العلاقة R. (درجة)
3- مثّل العلاقة R بمصفوفة. (درجة)

ب- لتكن $S = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2)\}$ علاقة على المجموعة $C = \{1, 2, 3\}$.

1- مثّل العلاقة S برسم موجَه. (درجة)
2- أوجد $S \cap S^{-1}$. (درجة)
3- أوجد $S - S^{-1}$. (درجة)
4- أوجد $\overline{S} \cup S^{-1}$. (درجة)
5- أوجد S^2. (درجتان)

للفصل الثاني ١٤٣٧/٣٨ هـ

السؤال الأول (5 درجات)

(أ) $A : (\neg x \wedge y) \rightarrow (z \leftrightarrow \neg x)$

x	y	z	$\neg x$	$(\neg x \wedge y)$	$z \leftrightarrow \neg x$	A
T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	F	T
	0,5	0,5		0,5	0,5	1

(ب) $(p \vee r) \wedge (\neg r \rightarrow \neg p) \overset{?}{\equiv} r$

$(p \vee r) \wedge (\neg r \rightarrow \neg p) \equiv (p \vee r) \wedge (r \vee \neg p)$ 0,5

$\equiv r \vee (p \wedge \neg p)$ 1

$\equiv r \vee F = r$ 0,5

السؤال الثاني (10 درجات)

(أ) المكافئ العكسي للعبارة هي: "إذا كان n فرديًا فإن $4 \mid (n^2-1)$" 1

الاثبات: نفترض أن n هو عدد فردي فإن $n = 2k+1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

1 حيث $M \in \mathbb{Z}$ ، $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4[k^2+k] = 4M$

وبالتالي $4 \mid (n^2-1)$

(ب) نضع $P(n)$: $(n^2 - n)$ هو عدد زوجي

• خطوة الأساس: $n = 1$

1 $1^2 - 1 = 0$ والصفر هو عدد زوجي يعني $P(1)$ صائب

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 2$. نفترض أن $P(k)$ صائب

1 يعني لدينا $(k^2 - k)$ هو عدد زوجي فلنثبت صحة $P(k+1)$

$[(k+1)^2 - (k+1)]$ هو عدد زوجيا؟

② $(k+1)^2-(k+1) = k^2+2k+1-k-1$

$= (k^2-k)+2k$

$= 2M + 2k = 2(M+k) = 2L$

و بالتالي $[(k+1)^2-(k+1)]$ هو عدد زوجي

(ج) نفرض $P(n):\ u_n = n+2$

• خطوة الأساسية:

$n=0$	$n=1$
$2 = u_0 \overset{?}{=} 0+2$	$3 = u_1 \overset{?}{=} 1+2$
صح و بالتالي $P(0)$ صائب (0,5)	صح و بالتالي $P(1)$ صائب (0,5)

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 2$ نفترض أن $P(2), \ldots, P(k)$ جميعها صائبة ولنثبت صحة $P(k+1)$

(0,5) $u_{k+1} \overset{?}{=} (k+1)+2$

(0,5) نعلم أن $u_{k+1} = 3u_k - 2u_{k-1} - 1$

(0,5) بما أن $P(k)$ صائب يعني لدينا $u_k = k+2$
كذلك $P(k-1)$ صائب يعني لدينا $u_{k-1} = (k-1)+2$

عندئذ

$u_{k+1} = 3(k+2) - 2(k+1) - 1$

$= 3k+6-2k-2-1$

(1) $= k+3 = (k+2)+1$

السؤال الثالث (10 درجات)

(أ) ① (2) $R = \{(-2,5);(-1,2);(1,2);(2,5)\}$

② (0,5) مجال R هو $D_R = \{-2,-1,1,2\}$

(0,5) مدى R هو $Im R = \{2,5\}$

③ (1)
$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ب) $S = \{(1,1);(1,3);(2,2);(2,3);(3,2)\}$

① (1)

$S^{-1} = \{(1,1), (3,1), (2,2), (3,2), (2,3)\}$ ②

① $S \cap S^{-1} = \{(1,1); (2,2), (3,2); (2,3)\}$

③

① $S - S^{-1} = \{(1,3)\}$

① $\overline{S} \cup S^{-1} = \{(1,2), (2,1), (3,1); (3,3), (1,1), (2,2), (3,2), (2,3)\}$ ④

$S^2 = S \circ S = \{(1,1); (1,3), (1,2), (2,2); (2,3); (3,2); (3,3)\}$ ⑤

②