د/ برهان

الاختبار الشهري الثاني للمقرر 111 ريض للفصل الأول 1438- 1439 هـ	كلية العلوم – قسم الرياضيات	جامعة الملك سعود King Saud University
الزمن: ساعة ونصف. الدرجة:	الإسم: .... الرقم الجامعي:................................ أستاذ المقرر:................................	

ملاحظات : 1. عدد الورقات 4   2. ممنوع استخدام الالة الحاسبة.

السؤال الأول (4 درجات): احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y=\sqrt{x}\tanh\sqrt{x}$ (درجتان)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\tanh(\sqrt{x})+\sqrt{x}\,\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\tanh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})$$

1   1

(2) $y=\sinh\left(\tanh^{-1}(2x)\right)$ (درجتان)

$$\frac{dy}{dx}=\cosh\left(\tanh^{-1}(2x)\right)\cdot\frac{2}{1-4x^2}$$

السؤال الثاني (21 درجة): احسب التكاملات التالية :

(1) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (درجتان)

نضع $u=e^x$ فإن $du=e^x dx$

$du=u\,dx$

يعني $dx=\frac{du}{u}$

وبالتالي

1 $\quad\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int\frac{du}{u\sqrt{1-u^2}}=-\operatorname{sech}^{-1}(u)+c$

1 $\quad=-\operatorname{sech}^{-1}(e^x)+c$

(درجتان)

$\int \ln(1+x^2)\, dx$ (2)

نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة:

$u(x) = \ln(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$v'(x) = 1 \qquad\qquad\quad v(x) = x$

(1) $\int \ln(1+x^2)\, dx = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx$

(1) $= x\ln(1+x^2) - 2\left[\int \left[1 - \frac{1}{1+x^2}\right] dx\right]$

$= x\ln(1+x^2) - 2[x - \tan^{-1}x] + cst$

(درجتان)

$\int \cos^3 x\, dx$ (3)

$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx$

(1) $= \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx$

$\overset{u=\sin x}{=} \int (1-u^2)\, du$

(1) $= u - \frac{u^3}{3} + cst$

$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + cst$

(درجتان)

$\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$ (4)

$\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec x \tan x\, dx$

$= \int (\sec^2 x - 1)\sec^2 x \sec x \tan x\, dx$

(1,5) $\overset{u=\sec x}{=} \int (u^2-1)u^2\, du$

$= \int (u^4 - u^2)\, du$

(0,5) $= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + cst$

$= \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + cst$

(5) $\int \cos(6x)\cos(4x)\,dx$ مع العلم أن : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$ (درجتان)

0,5 $\quad \cos 6x \cos 4x = \frac{1}{2}\left[\cos(2x)+\cos(10x)\right]$

1,5

$$\int \cos(6x)\cos(4x)\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos(2x)+\cos(10x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(10x)}{10}\right]+cst$$

(6) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ (3 درجات)

نستخدم التعويض المثلثي: $x = \sec\theta$ فإن

0,5

$$dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

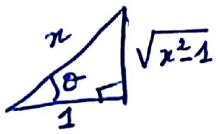
$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta-1} = \sqrt{\tan^2\theta} = |\tan\theta|$$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{\sec\theta\,\cancel{\tan\theta}}{\sec^3\theta\,\cancel{\tan\theta}}\,d\theta = \int\frac{d\theta}{\sec^2\theta}$$

1

$$= \int\cos^2\theta\,d\theta = \int\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

$\sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$



0,5

$$= \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]+cst$$

$$= \frac{1}{2}\sec^{-1}x + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\cdot\frac{1}{x}+cst$$

1

$$= \frac{1}{2}\sec^{-1}x + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}+cst$$

(7) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$ (3 درجات)

نستخدم طريقة إكمال المربع: $x^2+6x = (x+3)^2-9$

1

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-3^2}}$$

2

$$= \cosh^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right)+cst$$

$$= \ln\left(\frac{x+3}{3}+\sqrt{\left(\frac{x+3}{3}\right)^2-1}\right)+cst$$

$$= \ln\left(\frac{(x+3)+\sqrt{x^2+6x}}{3}\right)+cst$$

(3 درجات) $\int \frac{x-2}{x^3+x}dx$ (8)

0.5 $$\int \frac{x-2}{x^3+x}dx = \int \left[\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right]dx$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x}dx = A\int\frac{dx}{x} + \frac{B}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx + C\int\frac{dx}{x^2+1}$$

1 $$\int \frac{x-2}{x^3+x}dx = A\ln|x| + \frac{B}{2}\ln(x^2+1) + c\tan^{-1}x + cst$$

حساب الثوابت A , B و C : $x \neq 0$; $f(x) = \frac{x-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

- $A = \lim_{x\to 0} x f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x^2+1} = -2 \Rightarrow A=-2$ 0.5
- $\lim_{x\to\infty} x f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2+1} = 0 = A+B \Rightarrow B=2$ 0.5
- $f(1) = \frac{-1}{2} = A + \frac{B+C}{2} = -2 + \frac{2+C}{2} = \frac{-2+C}{2} \Rightarrow C=1$ 0.5

(درجتان) $\int \frac{dx}{x^{1/3}+x^{1/4}}dx$ (9)

$lcm(3,4)=12$

نضع $u = x^{1/12}$ فإن $u^{12}=x$

إذن $dx = 12u^{11}du$ وبالتالي

$x^{1/3} = u^4$ و $x^{1/4} = u^3$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}} = \int\frac{12u^{11}}{u^4+u^3}du$$

$$= 12\int\frac{u^8}{u+1}du$$ 1

$$u^8 \div (u+1) = u^7-u^6+u^5-u^4+u^3-u^2+u-1$$

$$\begin{array}{l} u^8 \\ \underline{-u^8-u^7} \\ -u^7 \\ \underline{+u^7+u^6} \\ u^6 \\ \underline{-u^6-u^5} \\ -u^5 \\ \underline{u^5+u^4} \\ u^4 \\ \underline{-u^4-u^3} \\ -u^3 \\ \underline{u^3+u^2} \\ u^2 \\ \underline{-u^2-u} \\ -u \\ \underline{u+1} \\ 1 \end{array}$$

$$= 12\int\left[u^7-u^6+u^5-u^4+u^3-u^2+u-1+\frac{1}{1+u}\right]du$$

$$= 12\left[\frac{u^8}{8}-\frac{u^7}{7}+\frac{u^6}{6}-\frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{4}-\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}-u+\ln|1+u|\right]+c$$

$$= \frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{12}{7}x^{7/12} + 2\sqrt{x} - \frac{12}{5}x^{5/12} + 3\sqrt[3]{x} - 4x^{1/4} + 6x^{1/6} - 12x^{1/12} + 12\ln|1+x^{1/12}| + c$$

1