جامعة الملك سعود- كلية العلوم قسم الرياضيات.	الامتحان الفصلي الثاني ٢٠٩ ريض الفصل الثاني ١٤٣٩/١٤٤٠ هـ.	يوم الخميس ١٤٤٠/٧/١٤ هـ الزمن : ساعة ونصف.

السؤال الأول (9) : أ) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة $f(x) = \frac{x}{(2-3x)^2}$ ثم استنتج صحة العلاقة التالية : $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$.

ب) أوجد الحدود الأربعة الأولى لمتسلسلة تايلور للدالة $f(x) = tan^{-1}(x)$ حيث $c = 1$.

السؤال الثاني (10) : أ) برهن أن مجموعة الدوال التالية :

$\{\cos((n+1)x) \ , \ n = 1, 2, 3, \ n, \dots \}$ متعامدة على الفترة $[0 \ , \ \pi]$. احسب أيضا" قيمة المقدار : $\|\cos((n+1)x)\|$ ، حيث $n \in N$.

ب) أوجد متسلسلة فورييه للدالة التالية :

$f(x) = \begin{cases} 0 \ ; & -1 \le x < 0 \\ x^2 \ ; & 0 \le x \le 1 \end{cases}$ على الفترة $[-1,1]$ ، حيث $f(x+2) = f(x)$ لكل $x \in R$. استنتج أيضا" صحة العلاقة التالية :

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

السؤال الثالث (6): لتكن الدالة $f(x) = \begin{cases} x+2 \ ; & -2 \le x < 0 \\ -x+2 \ ; & 0 \le x \le 2 \\ 0 \ ; & |x| > 2 \end{cases}$.

أ) ارسم الدالة f على R .

ب) أوجد تكامل فورييه للدالة f ثم استنتج المعادلة التالية :

$$\int_0^{\infty} \frac{(1-\cos(2\alpha))}{\alpha^2} d\alpha = \pi \ .$$

تصحيح الاختبار الشهري الثاني 209 ريض

السؤال الأول: (9 درجات)

(أ) $f(x)=\frac{x}{(2-3x)^2}$ ؛ نأخذ $g(x)=\frac{1}{2-3x}$ فإن $g'(x)=\frac{3}{(2-3x)^2}$

وبالتالي $f(x)=\frac{1}{3}x\,g'(x)$. نعلم أن $\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n$ لكل $-1<u<1$

0.5 1

فإن $g(x)=\frac{1}{2-3x}=\frac{1}{2[1-\frac{3x}{2}]}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}x^n$ لكل $-1<\frac{3x}{2}<1$

0.5

عندئذ باستخدام اشتقاق المتسلسلة القوى

1 $$g'(x)=\frac{3}{(2-3x)^2}=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}x^n\right)$$

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}\,n\,x^{n-1}$$ لكل $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$

فنستنتج أن لكل $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$

1 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{2^{n+1}}\,n\,x^n$$

1 الآن نأخذ قيمة $x=\frac{1}{3}$ فإن

$$\frac{1}{3}=\frac{1/3}{(2-3\cdot\frac{1}{3})^2}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{2^{n+1}}\,n\,\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}$$

يعني $1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}$.

(ب) $f(x)=\tan^{-1}x$ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق عدة مرات عند $c=1$. فهي تحظى بمفكوك تايلور

لكل x في جوار 1 $$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3+\dots$$

1

$f(1)=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$ ، $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ وبالتالي $f'(1)=\frac{1}{2}$

1

②

$$f^{(3)}(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x\cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} \text{ ، } f''(1) = -\frac{1}{2} \text{ فإن } f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

(1)

$$f^{(3)}(1) = \frac{-8+16}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + \cdots$$

لكل x في جوار 1 (1)

السؤال الثاني (10 درجات)

$S = \{ f_n(x) = \cos[(n+1)x] \,/\, n = 1, 2, \ldots \}$ المجموعة S متعامدة (أ)

لأن عندما تكون $n \neq m$ (أعداد صحيحة موجبة)

$$\delta_{n,m} = \langle f_n \mid f_m \rangle = \int_0^{\pi} \cos[(n+1)x] \cos[(m+1)x] \, dx$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

(2)

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[\cos[(n+m+2)x] + \cos[(n-m)x] \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin[(n+m+2)x]}{n+m+2} + \frac{\sin[(n-m)x]}{n-m} \right]_0^{\pi} = 0$$

$\sin k\pi = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}$

(0,5)

$$\| \cos[(n+1)x] \|^2 = \int_0^{\pi} \cos^2[(n+1)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [1 + \cos(2(n+1)x)] \, dx$$

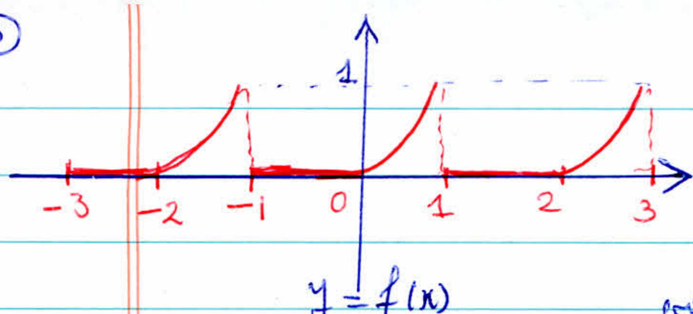
$$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin(2(n+1)x)}{2(n+1)} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

(0,5)

$$\| \cos[(n+1)x] \| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$ وبالتالي فإن

③



(ب) $f(x)=\begin{cases} 0\,; & -1\le x\le 0 \\ x^2\,; & 0\le x\le 1 \end{cases}$

بما أن f دالة متصلة على $(-1,1)$ فهي تحظى بمفكوك فورييه : لكل $-1<x<1$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)\right]$$

0,5 حيث $a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$

لكل $n\geq 1$,

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos(n\pi x)\,dx=\int_0^1 x^2\cos(n\pi x)\,dx$$

1

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin(n\pi x)\,dx=\int_0^1 x^2\sin(n\pi x)\,dx$$

$$a_n=\int_0^1 x^2\cos(n\pi x)\,dx=\frac{1}{n\pi}\underbrace{\left[x^2\sin(n\pi x)\right]_0^1}_{=0}-\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx$$

$u(x)=x^2$, $\vartheta'(x)=\cos(n\pi x)$ $\Rightarrow$ $u'(x)=2x$, $V(x)=\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$; $I_n=\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx$

$u_1(x)=x$, $v_1'(x)=\sin(n\pi x)$ $\Rightarrow$ $u_1'(x)=1$, $v_1(x)=\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}$

$$I_n=-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos(n\pi x)\right]_0^1+\frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_0^1\cos(n\pi x)\,dx}_{=0}$$

$$I_n=-\frac{(-1)^n}{n\pi}$$

2 و بالتالي $\boxed{a_n=\frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}}$

$$b_n=\int_0^1 x^2\sin(n\pi x)\,dx=-\frac{1}{n\pi}\left[x^2\cos(n\pi x)\right]_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx$$

$u(x)=x^2$, $v'(x)=\sin(n\pi x)$ $\Rightarrow$ $u'(x)=2x$, $V(x)=-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}$, $J_n=\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx$

$u_1(x)=x$, $v_1'(x)=\cos(n\pi x)$ $\Rightarrow$ $u_1'(x)=1$, $v_1(x)=\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$

$$J_n=\frac{1}{n\pi}\underbrace{\left[x\sin(n\pi x)\right]_0^1}_{=0}-\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin(n\pi x)\,dx=\frac{1}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi x)\right]_0^1$$

$$J_n=\frac{\left[(-1)^n-1\right]}{n^2\pi^2}$$

(4)
$$b_n = \frac{-1}{n\pi}\left[(-1)^n\right] + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\right]$$

(1,5)
$$\boxed{b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{n^3\pi^3}}$$

لكل $0 \leq x < 1$;
$$x^2 = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}\right)\sin n\pi x\right]$$

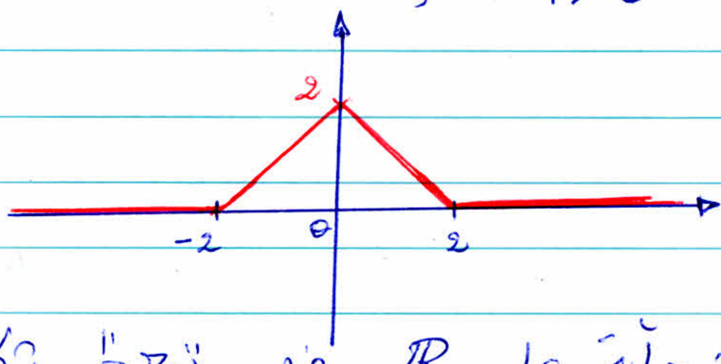
بوضع قيمة $x = 0$

(2)
$$0 = \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} = \frac{2}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$
$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

السؤال الثالث :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 \ ; & -2 \leq x < 0 \\ -x+2 \ ; & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \ ; & |x| > 2 \end{cases}$$

(أ)



f دالة زوجية

(2)

ب) f مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي تحقق بتكامل فورية

لكل $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\sin(\alpha x)\right]d\alpha$

(1)
حيث $\quad A(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$

$$A(\alpha) = 2\int_0^{2}(2-x)\cos(\alpha x)\,dx = 2\left[\left[\frac{(2-x)\sin(\alpha x)}{\alpha}\right]_0^2 + \frac{1}{\alpha}\int_0^2 \sin(\alpha x)\,dx\right.$$

$u(x) = 2 - x \qquad u'(x) = -1$

$v'(x) = \cos(\alpha x) \Rightarrow v(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$

$$= \frac{-2}{\alpha}\left[\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}\right]_0^2 = \frac{-2}{\alpha^2}\left[\cos(2\alpha) - 1\right]$$

5

2 $$A(\alpha) = \frac{2}{\alpha^2}\left[1-\cos(2\alpha)\right]$$

$$B(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(\alpha x)\,dx = 0$$

وبالتالي

لكل $x \in \mathbb{R}$ $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2\alpha)}{\alpha^2}\cos(\alpha x)\,d\alpha$$

عندما $x = 0$

1 $$2 = f(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2\alpha)}{\alpha^2}\,d\alpha$$

فإن

$$\pi = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2\alpha)}{\alpha^2}\,d\alpha$$